Connexion entre le théorème de Wilson et la conjecture de Lenstra-Pomerance-Wagstaff

Daoudi R.*

Université de Caen Normandie 14 000 FRANCE

E-mail: red.daoudi@laposte.net

Abstract

Un nombre de Mersenne est un nombre de la forme $M_n = 2^n - 1$ avec n un entier naturel. Un nombre de Mersenne premier est de la forme $M_p = 2^p - 1$ avec certaines valeurs de p premières.

Lenstra, Pomerance et Wagstaff (ci-après abrégée conjecture LPW) ont conjecturé qu'il y a une infinité de nombre de Mersenne premiers.

Dans cet article j'essaye de reformuler la conjecture LPW en utilisant le théorème de Wilson.

La reformulation

Soit n un entier tel que $n \geq 1$ et $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs de n et k est un entier tel que $k \geq 1$.

$$\frac{1}{(n-\sigma(n))^2} - \frac{(\sigma(n)-n)!}{(n-\sigma(n))^3} = k$$

Je vérifie la formule en utilisant Python, Wolframalpha pour les petits nombres et Sage.

1. Quand n est premier alors k=2
2. Avec certaines valeurs de n, $k \neq 2$

Nous étudierons le cas où $k \neq 2$

Parfois $k \neq 2$ pour différentes valeurs n mais avec les mêmes valeurs de $\sigma(n) - n$

Par exemple avec n=27 et n=35 il vient : $k = 2834329$.

Python et contre-exemples

J'utilise le code suivant pour trouver un éventuel contre-exemple.

```
from math import *
from fractions import Fraction


def div(n):
ll = []
for i in range(1, n+1):
 if n % i == 0:
 ll.append(i)
return sum(ll)


for i in range(2, 10000):
divi = div(i)-i
res = Fraction(1, divi**2) - Fraction(factorial(divi), divi**3)
if res.denominator==1 and res.numerator!=2:
print(i, res)
```

Notons que $div(n)$ devrait être remplacé par $mu(n)$ afin de réduire le temps d'exécution du programme.

Preuve

Conjecture: Soit p un nombre premier tel que $p \geq 3$, n un nombre composé et k un entier tel que $k \neq 2$. Pour certaines valeurs de n il existe un entier k tel que :

$$\frac{1}{(n-\sigma(n))^2} - \frac{(\sigma(n)-n)!}{(n-\sigma(n))^3} = k$$

où $\sigma(n) - n = p$

Preuve : J'ai essayé de trouver tous les entiers n tels que $\sigma(n) - n$ soit premier.

Il est trivial que si p est un nombre premier alors $\sigma(p) - p = 1$.

Si $\sigma(n) - n$ n'est pas premier, je ne m'attarderai pas sur les valeurs pour lesquelles n est premier.

Lemme : Je conjecture que

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma(n) - n = +\infty$$

et donc $\sigma(n) - n$ serait un très grand nombre et tendrait vers l'infini. Nous employons le conditionnel car la limite est une forme indéterminée.

Si $\sigma(n) - n$ pair on a : $\sigma(n) - n = 1 + 2 + ...$

Si $\sigma(n) - n$ est impair on a : $\sigma(n) - n = 1 + ...$

D'après le théorème de Wilson : $(1 + 2 + ...)$ est premier

si et seulement si $((1 + 2 + ...) - 1)! \equiv -1 \mod (1 + 2 + ...)$. En d'autres termes :$(2 + ...)$

$\equiv -1 \mod (1 + 2 + ...)$

C'est-à-dire que : $(2 + ...) = k(1 + 2 + ...) - 1$

Nous pouvons simplifier :

$\sigma(n) - n = (1 + 2 + ...)$ and $\sigma(n) - (n + 1) = (2 + ...)$, ensuite on réinjecte et on a :

$(\sigma(n) - (n + 1))! = k(\sigma(n) - n) - 1$

Donc $((\sigma(n) - (n + 1))! + 1) = k(\sigma(n) - n)$

Donc $\frac{((\sigma(n)-(n+1))!+1)}{(\sigma(n)-n)} = k$

Finalement, k doit être un entier tel que $k \neq 2$ et dans ce cas $\sigma(n)-n$ est un nombre premier.

La connexion entre le théorème de Wilson et la conjecture LPW

Je me suis demandé s'il y avait une infinité d'entiers n tels que $\sigma(n) - n$ soit premier.

Nous pouvons reformuler le problème ainsi : il y a une infinité d'entiers n tels que $\frac{((\sigma(n)-(n+1))!+1)}{(\sigma(n)-n)} = k$ où k est un entier $\neq 2$

Malheureusement cela semble être un sous-problème de la conjecture LPW qui dit plus précisément qu'il y a une infinité de nombres de Mersenne premiers.