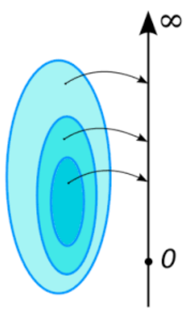
UNIVERSITÉ DE ROUEN NORMANDIE

PROJET TUTORE LICENCE 3
MATHÉMATIQUES OPTION MATHS

MESURE COMPLEXE



KOUAME konan jean
marie vianney
BA Mamoudou
ZHOU Qianhan
Promo 2018

Tuteur : Professeur .
VOLNY Dalibor

Table des matières

1 INTRODUCTION

En mathématiques, une mesure positive (ou simplement mesure quand il n'y a pas de risque de confusion) est une fonction qui associe une grandeur numérique à certains sous-ensembles d'un ensemble donné. Il s'agit d'un important concept en analyse et en théorie des probabilités.

Intuitivement, la mesure d'un ensemble ou sous-ensemble est similaire à la notion de taille, ou de cardinal pour les ensembles discrets. Dans ce sens, la mesure est une généralisation des concepts de longueur, aire ou volume dans des espaces de dimension 1, 2 ou 3 respectivement.

L'étude des espaces munis de mesures est l'objet de la théorie de la mesure.

Dans certains contextes, notamment pour exposer la construction de mesures à partir de leurs valeurs sur des classes d'ensembles plus petites que des tribus, il est agréable de disposer d'une définition plus générale pour énoncer brièvement divers résultats ; selon les sources le mot « mesure » est employé pour des fonctions vérifiant la propriété d'additivité dénombrable sur des algèbres d'ensembles, anneaux d'ensembles voire semi-anneaux d'ensembles.

Dans certains cas, il est utile d'avoir une « mesure » dont les valeurs ne sont pas restreintes aux réels positifs et à l'infini. Par exemple, une fonction σ-additive définie sur des ensembles et qui prend des valeurs réelles est appelée **mesure signée**, tandis qu'une telle fonction qui prend des valeurs complexes est appelée **mesure complexe**.

Dans la suite de notre exposé nous essayerons de parler de ce qu'est la mesure complexe développé par l'imminent Professeur de mathématique de l'Université de Wisconsin, Madison **WALTER RUDIN** dans son ouvrage Real and Complex Analysis paru en 1966 au **THIRD EDITION**.

Nous avons travaillé avec la version française paru en 2009 au édition **DUNOD**.

Cette approche que nous avons faite ne saurais égaler celle du Professeur **WALTER RUDIN**.

Par ailleurs nous tenons a remercier le Professeur **Dalibor VOLNY** qui a su faire preuve de patience et a su nous diriger sur la bonne voie, ainsi qu'*á* Dieu qui nous a donn*é* la force de faire ce travail.

2 MESURE COMPLEXE

2.1 Définition

Soit $\mathcal{M}$ une σ-algèbre définie sur un ensemble X.
Une collection dénombrable $\{E_i\}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ est une partition de E si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ dès que $i \neq j$ et si $E = \bigcup_i E_i$.
Une mesure complexe μ sur $\mathcal{M}$ est une fonction à valeur complexes telle que

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \tag{1}$$

pour toute partition $\{E_i\}$ de E ($E \in \mathcal{M}$)

3 Théorème de la convergence dominée sur $\mathbb{C}$

3.1 Théorème de la convergence dominée

Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$
une suite de fonction mesurables. On suppose que :

1. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existe $\forall x \in X$

2. il existe $g : X \to [0, \infty[$ intégrable telle que : $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$. Alors $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est intégrable, et on a :
   $\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$ et $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \,d\mu = 0$

3.1.1 Démonstration

On sait que $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\forall$ x $\in$ X et comme $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall$ x $\in$ X alors $|f(x)| \leqslant g(x)$ $\forall$ x $\in$ X et f intégrable car g l'est.

a)$|f(x)| \leqslant g(x)$ $\forall$ x $\in$ X

b)$|f_n(x)| \leqslant g(x)$ $\forall$ n $\in \mathbb{N}$ $\forall$ x $\in$ X

$\Longrightarrow |f(x)| + |f_n(x)| \leqslant 2g(x)$.

or $|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f(x)| + |f_n(x)|$

donc $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2g(x) \Longrightarrow 2g(x)$ - $|f_n(x) - f(x)| \geqslant 0$

D'après le lemme de fatou on a :

$$\int 2g d\mu = \int \varliminf_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|) d\mu \tag{2}$$
$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int 2g - |f_n - f| \, d\mu \tag{3}$$
$$= \varliminf_{n\to\infty} (\int 2g d\mu - \int |f_n - f| \, d\mu) \tag{4}$$
$$= \int 2g d\mu - \varlimsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu \tag{5}$$

On en déduit que $\varlimsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \ \mathrm{d}\mu \leqslant 0$ donc $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \ \mathrm{d}\mu$ $=0$.
Comme
$\left|\int f_n d\mu - \int f d\mu\right| \leqslant \int |f_n - f| \ \mathrm{d}\mu$

On conclut que $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$

Démonstration. □

4 Variation totale

Théorème 1. *La variation totale $|\mu|$ d'une mesure complexe μ sur $\mathcal{M}$ est une mesure positive sur $\mathcal{M}$.*

4.1 Démonstration

4.2 Définition d'une mesure positive

soit $(X,\mathcal{M})$ un espace mesurable
On appelle positive sur X une application $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0\,;\infty]$ vérifiant les assertion suivante :

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Additivité dénombrable

- si $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ est une famille dénombrable d'ensemble deux à deux disjoints alors

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

On dit que $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré, on dira mesure au lieu de mesure positive s'il n'y a pas d'ambiguité.

Proposition 1 (Propriété d'une mesure positive)**.**

1. *Monotonie*
   si A,$B \in \mathcal{M}$ *et* $A \subset B$ *alors* $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. *Sous additivité*
   si $A_n \in \mathcal{M}$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.
3. *si* $A_n \in \mathcal{M}$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ *et* $A_n \subset A_{n+1}$ *alors* $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$
4. *si* $A_n \in \mathcal{M}$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ *et* $A_n \supset A_{n+1}$ *avec* $\mu(A_0) < \infty$
   alors $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

4.2.1 Démonstration

1. Monotonie
   On a B=$A \cup (B \setminus A)$ union disjointe d'éléments de $\mathcal{M}$ donc

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(A \cup (B \setminus A)) \\ &= \mu(A) + \mu(B \setminus A) \\ \mu(B) &\geq \mu(A) \end{aligned}$$

   si $\mu(A) < \infty$

2. Sous additivité
   Posons $B_0 = A_0$ $\forall$ $n \geq 1$. $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1}(A_k)$
   $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, on a $\bigcup_{k=0}^{n}(A_k) = \bigcup_{k=0}^{n}(B_k)$ en outre les $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints et $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$.

$$\begin{aligned} \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) &= \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \\ \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \end{aligned}$$

3. Posons $B_0 = A_0$ et $\forall\ n \geq 1$.
   $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ alors les B_n sont deux à deux disjoints et $\forall$ n $\in \mathbb{N}$
   $A_n = \bigcup_{k=0}^{n}(B_k)$ ainsi

$$\mu(A_n) = \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) \longrightarrow n \to \infty \implies \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_k) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$$

4. posons $B_n = A_0 \setminus A_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ alors la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante avec $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A_0 \setminus \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$
   En outre $\mu(B_n) = \mu(A_0) - \mu(A_n)$ car $\mu(A_0 < \infty)$

$$\begin{aligned} \mu(A_0) - \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) &= \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \qquad = \mu(A_0) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

Démonstration. □

4.2.2 Démonstration de la variation totale

soit λ une mesure qui domine une mesure complexe que nous donnons ici par μ sur $\mathcal{M}$ (σ-algèbre)
en ce sens que $|\mu(E)| \leqslant \lambda(E) \forall E \in \mathcal{M}$ en tâchant de prendre la plus petite mesure λ possible.
Une telle mesure λ si elle existe, doit satisfaire

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \tag{6}$$

Par la suite on a λ est au moins égale à la borne supérieure des mesures de droite donc

$$\lambda(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|\, E \in \mathcal{M}$$

cela suggère de définir ue fonction d'ensembles $|\mu(E)|$ sur $\mathcal{M}$ selon

$$|\mu|\,(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|\, E \in \mathcal{M} \tag{7}$$

et on note que $|\mu|(E) \geq |\mu(E)|$ mais en général $|\mu|(E) \neq |\mu(E)|$

On a $\mathcal{M}$ une σ-algèbre donc une tribu, X un ensemble.
$\mathcal{M}$ est constitué de partition de E qui est ici une collection dénombrable $\{E_i\}$.
Posons $\lambda = |\mu|$
Montrons que λ est une mesure positive sur $\mathcal{M}$.

On a $\lambda(\emptyset) = 0$. Supposons une partition dénombrable $\{E_i\}$ de E, soit $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, on veut montrer que :

$$\lambda(A) = \lambda(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(A_i) \tag{8}$$

donnons nous une autre partition $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ de A, poue chaque j on a

$$\begin{aligned}
\lambda(B_j) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(B_j \cap A_i) \\
&\Longrightarrow |\mu(B_j)| \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(B_j \cap A_i)| \\
&\Longrightarrow \sum_{j\in\mathbb{N}} |\mu(B_j)| \leq \sum_j \sum_i |\mu(B_j \cap A_i)| = \sum_i \sum_j |\mu(B_j \cap A_i)| \\
&\Longrightarrow \sum_j |\mu(B_j)| \leq \sum_i \lambda(A_i) \\
&\Longrightarrow \sum_j |\mu(B_j)| \leq \sum_i |\mu|(A_i)
\end{aligned}$$

On obtient donc que

$$|\mu(A)| \leq \sum_i |\mu|(A_i) \tag{9}$$

On sait que en prenant le sup de la $\sum_{j\in\mathbb{N}} |\mu(B_j)|$ on a

$$\sum_i |\mu|(A_i) \leq |\mu(A)| \tag{10}$$

et en conclusion on a

$$\sum_i |\mu|(A_i) = |\mu(A)|$$

Démonstration. $\square$

Lemme 1. *Si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont des nombres complexes, il exite un sous-ensemble S de $1, 2, \ldots, n$ tel que*

$$\left|\sum_{j\in\mathcal{S}} z_j\right| \geq \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} |z_j|$$

4.3 Démonstration

Définissons $w = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$. Le plan complexe est la réunion des quatre quadrants délimités par les droites $y = \pm x$, et l'un au moins de ces quadrants Q (disons,sans perdre de généralité, qu'il s'agit de celui défini par $|y| \leqslant x$) à la propriété que la somme des $|z_j|$, pour $z_j \in$ Q, est au moins $\frac{w}{4}$

Pour $z \in$ Q, on a

$$\Re z \geq \frac{|z|}{\sqrt{2}}$$

Si S est l'ensemble des j tels que $z_j \in$ Q, il vient

$$\left|\sum_{j\in\mathcal{S}} z_j\right| \geq \sum_{j\in\mathcal{S}} \Re z_j \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j\in\mathcal{S}} |z_j| \geq \frac{w}{4\sqrt{2}} \geq \frac{w}{6}$$

Théorème 2. *Si μ est une mesure complexe sur X on a $|\mu|(X) < \infty$*

4.4 Démonstration

Nous montrons d'abord que si $|\mu|(E) = \infty$ pour un certain $E \in \mathcal{M}$, on a $E = A \bigcup B$ ou A et $B \in \mathcal{M}$, $A \bigcap B = \varnothing$ et

$$|\mu(A)| > 1, |\mu|(B) = \infty \tag{11}$$

En effet, la définition de $|\mu|$ assure que tout $t < \infty$; il existe une partition $\{E_j\}$ et $E \in \mathcal{M}$ telle que $\sum |\mu(E_j)| > t$. Prenons alors $t = 6(1 + |\mu(E)|)$. Il vient

$$\sum_{j=1}^{n} |\mu(E_j)| > t \tag{12}$$

Pour un certain n. si nous appliquons le lemme avec $z_j = \mu(E_j)$ et posons

$$A = \bigcap_{j \in \mathbb{S}} (E_j), \tag{13}$$

il s'ensuit que A⊂E et que $|\mu(A)| > \dfrac{t}{6} \geqslant 1$. Si $B = E - A$, on a

$$|\mu(B)| = |\mu(E) - \mu(A)| \geqslant |\mu(A)| - |\mu(E)| > \frac{t}{6} - |\mu(E)| = 1, \tag{14}$$

Puisque $|\mu(E)| = |\mu|(A) + |\mu|(B)$ grâce au théorème 6.2,on en déduit $|\mu|(A) = \infty$ ou $|\mu|(B) = \infty$ (ou simultanément). supposons maintenant $|\mu|(X) = \infty$ et posons $B_0 = X$. Prenons $n \geqslant 0$ et choisissons B_n de sorte $|\mu|(B_n) = \infty$. Appliquons l'inégalité (1) avec B_n au lieu de E, on constate que B_n est la réunion de deux ensembles disjoints A_{n+1} et B_{n+1} tels que $|\mu(A_{n+1})| > 1$ et $|\mu|(B_{n+1}) = \infty$. Par récurrence, on obtient des ensembles disjoints $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tels que $|\mu(A_n)| > 1$. Si $C = \bigcup A_n$, l'additivité dénombrable de μ montre que

$$\mu(C) = \sum_{1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{15}$$

Mais cette série ne peut converger car $\mu(A_n)$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$. Cette contradiction établit la validité du théorème énoncé.

4.5 Proposition

Si μ et λ sont des mesures complexes sur la même σ-algèbre $\mathcal{M}$, on définit $\mu + \lambda$ et $c\mu$ par

$$(\mu+\lambda)(E)=\mu(E)+\lambda(E)(c\mu)(E)=c\mu(E)(E\in\mathcal{M}) \tag{16}$$

Pour tout scalaire c, selon la manière usuelle. il est alors trivial de vérifier que $\mu+\lambda$ et $c\mu$ sont des mesures complexes. Ainsi, la famille de toutes les mesures complexes sur $\mathcal{M}$ forme un espace vectoriel. Posant

$$||\mu|\,|=|\mu|\,(X). \tag{17}$$

il est facile de vérifier que tous les axiomes d'un espace vectoriel normé sont satisfaits.

5 Variation positive et négative

5.1 Proposition

Spécialisons nous au cas d'une mesure réelle μ sur une σ-algèbre $\mathcal{M}$. On appelle souvent mesures ***signés*** de telles mesures. On définit $|\mu|$ comme ci-dessus, puis on définit aussi

$$\mu^+=\frac{1}{2}(|\mu|+\mu),\mu^-=\frac{1}{2}(|\mu|-\mu) \tag{18}$$

Dans ce cas μ^+ et μ^- sont simultanément des mesures positives sur $\mathcal{M}$ et sont bornées grâce au théorème ci-dessus. De plus

$$\mu=\mu^+-\mu^-,|\mu|=\mu^++\mu^- \tag{19}$$

les mesures μ^+ et μ^- sont appelées respectivement *les variations positives et négatives de μ*. La représentation de μ comme différence de deux mesures positives μ^+ et μ^- s'appelle *la décomposition de Jordan de μ*. Parmi toutes les représentations de μ comme différence de deux mesures positives, la décomposition de Jordan possède une certaine propriété minimale comme on l'établira plus loin.

5.2 Démonstration

Supposons donc que μ soit à valeurs réelles. Si A est une partie mesurable, qui a été partitionnée en des A_n, on peut faire l'union des A_n avec $\mu(A_n)\geq 0$, alors $\mu(A)\leq\mu(B)$ ce qui donne un certain $B\subset A$. Alors $\sum|\mu(A_n)|=\mu(B)+|\mu(C)|$ avec $C=B\setminus A$. Comme

$$\mu(A)=\mu(B)+\mu(C)$$
$$ona\,|\mu(C)|\leq\mu(B)+|\mu(A)|\,,$$
$$etdonc2\mu(B)\geq-|\mu(A)|+\sum|\mu(A_n)|\,.$$

Donc si $\nu(A)=\infty$ alors on peut trouver $B\subset A$ avec $\mu(B)$ arbitrairement grand, disons $\mu(B)\geq 2\,|\mu(A)|+1$. Mais de $\mu(A)=\mu(B)+\mu(C)$ on déduit $|\mu(C)|\geq\mu(B)-|\mu(A)|$ donc $|\mu(C)|\geq|\mu(A)|+1$. Et comme ν est une mesure on a $\nu(B)=\infty$ ou $\nu(C)=\infty$.

On peut donc par récurrence, si l'on suppose $\nu(X)=\infty$, affirmer l'existence de $A_0=X, A_1\subset A_0,\dots,A_{n+1}\subset A_n,\dots$ avec $\forall\ n$, $|\mu(A_{n+1})|\geq|\mu(A_n)|+1$ (et $\nu(A_{n+1})=\infty$). Mais alors $|\mu(A_n\setminus A_{n+1})|\geq 1$ et la série $\sum_n\mu(A_n\setminus A_{n+1})$

ne peut pas être convergente ce qui contre dit l'axiome d'additivité dénombrable (pour une réunion disjointe). C'est donc que l'hypothèse $\nu(X)=\infty$ est à rejeter. On a ainsi $\nu(X)<\infty$[1].
Posons $\mu_1=\dfrac{1}{2}(|\mu|+\mu)$ et $\mu_2=\dfrac{1}{2}(|\mu|-\mu)$.
Ce sont clairement deux mesures positives finies. Et $\mu=\mu_1-\mu_2$. Toute mesure signée est donc la différence de deux mesures positives finies. Réciproquement soit σ_1 une mesure positive finie vérifiant $\sigma_1(A)\geq\mu(A)$ pour tout A. Il est immédiat que $\sigma_2(A)=\sigma_1(A)-\mu(A)$ est une mesure positive (finie). Comme $\mu=\sigma_1-\sigma_2$, on a clairement (?) $|\mu|\leq\sigma_1+\sigma_2$, donc en sommant $2\mu_1\leq 2\sigma_1$, et en soustrayant, $2\mu_2\leq 2\sigma_2$. Cela montre que μ_1 est caractérisée comme étant ≪ la plus petite ≫ mesure positive σ_1 vérifiant $\sigma_1\geq\mu$. Et μ_2 est la plus petite mesure positive σ_2 vérifiant $\sigma_2\geq-\mu$. Bien sûr $|\mu|$ est la plus petite mesure positive minorée par $\max(\mu,-\mu)$, c'est-à-dire telle que pour tout A, $|\mu|\,(A)\geq|\mu(A)|$. Comme μ peut s'écrire comme la différence de deux mesures positives, on peut définir $\int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x)$ de manière évidente :

$$\int_X f(x)\mathrm{d}\sigma_1(x)-\int_X f(x)\mathrm{d}\sigma_2(x)$$

Petit exercice, si $\sigma_1-\sigma_2=\sigma_3-\sigma_4$ alors $\sigma_1+\sigma_4=\sigma_2+\sigma_3$ donc ... indépendant des choix, ou on prend directement les canoniques μ_1 et μ_2. le choix canonique est utile pour voir que

1. Cette valeur finie s'appelle la variation totale de μ sur X

$$
\begin{aligned}
\left|\int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x)\right| &\leq \left|\int_X f(x)\mathrm{d}\mu_1(x)\right| + \left|\int_X f(x)\mathrm{d}\mu_2(x)\right| \\
&\leq \int_X |f(x)|\,\mathrm{d}\mu_1(x) + \int_X |f(x)|\,\mathrm{d}\mu_2(x) \\
&= \int_X |f(x)|\,\mathrm{d}\,|\mu|\,(x).
\end{aligned}
$$

6 Définition

Soit μ une mesure positive sur la σ-algèbre $\mathcal{M}$ et soit λ une mesure arbitraire sur $\mathcal{M}$; λ pouvant être positive ou complexe. (Rappelons qu'une mesure complexe a son image dans le plan complexe tandis qu'une mesure positive peut inclure ∞ dans son image, ce qui interdit de considérer les mesures positives comme cas particulier des mesures complexes).
Nous disons que λ est absolument continue par rapport *á* μ, et écrivons

$$\lambda \ll \mu$$

si $\lambda(E) = 0$ pour tout $E \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(E) = 0$.
s'il existe un ensemble $A \in \mathcal{M}$ tel que $\lambda(E) = \lambda(A \bigcap E)$ pour tout $E \in \mathcal{M}$, on dit que λ est portée par A.
Ceci équivaut à l'hypothèse $\lambda(E) = 0$ pour tout E tel que $E \bigcap A = \varnothing$.

Soient λ_1 et λ_2 deux mesures sur $\mathcal{M}$ et supposons qu'il existe deux ensembles disjoints A et B tels que λ_1 soit portée par A et λ_2 soit portée par B.
on dit que λ_1 et λ_2 sont mutuellement singulières, et on écrit

$$\lambda_1 \perp \lambda_2$$

voici quelques propriétés élémentaires de ces notions.

Proposition 2. *Supposons que $\mu, \lambda, \lambda_1 et \lambda_2$ soient des mesures sur une σ-algèbre $\mathcal{M}$, μ étant positive.*

a) Si λ est portée par A, il en est de même de $|\lambda|$.

b) Si $\lambda_1 \perp \lambda_2$, on a $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.

c) Si $\lambda_1 \perp \mu$ et $\lambda_2 \perp \mu$ on a $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.

d) Si $\lambda_1 \ll \mu$ et $\lambda_2 \ll \mu$ on a $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$.

e) Si $\lambda \ll \mu$ on a $|\lambda| \ll \mu$.

f) Si $\lambda_1 \perp \mu$ et $\lambda_2 \perp \mu$ on a $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

g) Si $\lambda \ll \mu$ et $\lambda \perp \mu$ on $\lambda = 0$.

6.1 Démonstration

a) Si $E \bigcap A = \varnothing$ et si E_j est une partition quelconque de E, on a $\lambda(E_j) = 0$ pour tout j, donc $|\lambda|(E) = 0$.

b) provient immédiatement de (a).

c) Il existe deux ensembles disjoints A_1 et B_1 tels que λ_1 est portée par A_1 et μ portée par B_1 et de même il existe deux ensembles disjoints A_2 et B_2 tels que λ_2 est portée par A_2 et μ portée par B_2. Par suite, $\lambda_1 + \lambda_2$ est portée par $A = A_1 \bigcup A_2$ et μ est portée par $B = B_1 \bigcap B_2$ mais $A \bigcap B = \varnothing$.

d) Évident.

e) Supposons $\mu(E) = 0$ et soit E_j une partition de E. On a $\mu(E_j) = 0$ et puisque $\lambda \ll \mu$, $\lambda(E_j) = 0$ pour tout j. Par suite ; $\sum |\lambda(E_j)| = 0$, ce qui implique $|\lambda|(E) = 0$.

f) Puisque $\lambda_2 \perp \mu$, il existe un ensemble A tels que $\mu(A) = 0$ et par lequel λ_2 soit portée. Puisque $\lambda_1 \perp \mu, \lambda(E) = 0$ pour tout $E \subset A$. Ainsi λ_1 est portée par le complémentaire de A.

g) Grâce à (*f*), l'hypothèse de (*g*) implique $\lambda \perp \lambda$ et ceci induit, nécessairement, $\lambda = 0$.

Nous nous tournons maintenant vers le théorème principale concernant l'absolue continuité. De fait,c'est peut être le théorème le plus important en théorie de la mesure.

Théorème 3. *Soient λ et μ deux mesures positives bornées sur une σ-algèbre $\mathcal{M}$ définie sur un ensemble X.*

a) il existe un couple unique de mesures λ_a et λ_s sur $\mathcal{M}$ tel que

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \lambda_a \ll \mu, \lambda_s \perp \mu. \tag{20}$$

ces mesures sont positives et $\lambda_a \perp \lambda_s$.

b) il existe un unique élément $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tel que

$$\lambda_a(E) = \int_E h \mathrm{d}\mu(E \in \mathcal{M}) \tag{21}$$

Le couple (λ_a, λ_s) [2]. L'unicité de la décomposition se voit facilement car si $\lambda_a^{'}$ et $\lambda_s^{'}$ est un autre couple satisfaisant l'équation (20) on a

$$\lambda_a^{'} - \lambda_a = \lambda_s - \lambda_s^{'} \tag{22}$$

$\lambda_a^{'} - \lambda_a \ll \mu$ et $\lambda_s - \lambda_s^{'} \perp \mu$ en utilisant les point (c), (d) et (g) de la *proposition* ci-dessus. Par suite, les deux membres de l'équation (22) sont nul.

L'existence de la décomposition est la partie réellement intéressante de (a). L'assertion (b) est connue sous le nom de *théorème de Radon-Nikodym. A* nouveau l'unicité de h du (théorème 1.39) . (b) Bien sûr, si h est une fonction quelques *quelconque* de $\mathcal{L}^1(\mu)$, l'intégrale (21) définit une mesure sur $\mathcal{M}$ (théorème 1.29), laquelle mesure est visiblement absolument continue par rapport *á* μ. Le point essentiel dans le *théorème de Radon-Nikodym* est la réciproque : toute λ telle que $\lambda \ll \mu$ $(c'estdire \lambda = \lambda_a)$ s'obtient de cette façon (*quation* (21)). La fonction h survenant dans (21) est connue sous le nom de *dérivée de Radon-Nikodym* de λ_a par rapport à μ. comme on l'a remarqué après le (théorème 1.29), on peut exprimer (21) sous la forme $\mathrm{d}\lambda_a = h\mathrm{d}\mu$ ou même sous la forme $h = \mathrm{d}\lambda_a / h\mathrm{d}\mu$.
L'idée de la démonstration que nous allons donner, et qui fournit d'un coup les deux théorèmes, est due à Von Neumann [3].

6.2 Démonstration du théorème de Radon Nikodym

Soit $\lambda = |\mu| + \nu$ $\mathcal{L}^2(X, \lambda)$. Alors $f \to \int_X f(x) \mathrm{d}\,|\mu|\,(x)$ est une forme linéaire continue, donc de la forme $\int_X f(x)G(x)\mathrm{d}\lambda(x)$. On a $\int_A G(x)\mathrm{d}\lambda(x) =$

2. s'appelle la décomposition de lebesgue de λ relative à μ

3. John von Neumann, né Neumann János Lajos en 1903 à Budapest et mort en 1957 à Washington, est un mathématicien et physicien américano-hongrois

$|\mu|(A) \geq 0$ pour toute partie mesurable donc $G \geq 0 \lambda p.p.$, et on peut changer G pour vérifier partout $G \geq 0$. De même $\int_A G(x)\mathrm{d}\lambda(x) \leq \int_A \mathrm{d}\lambda(x)$, donc $G \leq 1 p.p.$ et on peut imposer $G \leq 1$ partout.
Enfin soit $A = G = 1$, alors $|\mu|(A) = \lambda(A)$ donc $\nu(A) = 0$. On a aussi que A est $|\mu|$-négligeable, donc A est $\lambda(A)$-négligeable, donc au total pn peut supposer $0 \leq g < 1$ partout.
Soit f une fonction mesurable bornée, on a pour tout A mesurable :

$$\int_A f(x)\mathrm{d}\,|\mu|\,(x) = \int_A f(x)G(x)(\mathrm{d}\,|\mu|\,(x) + \mathrm{d}\nu(x))$$

On applique cela aussi *á* $fG_1, fG_2, fG_3, \ldots, fG_{n-1}$ et l'on fait la somme télescopique ce qui donne :

$$\int_A f(x)(1 - G(x)_n)\mathrm{d}\,|\mu|\,(x) = \int_A f(x)(G(x) + \cdots + G(x)_n)\mathrm{d}\nu(x)$$

Supposons $f \geq 0$, *á* gauche on applique la convergence dominée et *á* droite on applique la convergence monotone. il vient, avec $g_0(x) = \dfrac{G(x)}{1 - G(x)}$:

$$\int_A f(x)\mathrm{d}\,|\mu|\,(x) = \int_A f(x)g_0(x)\mathrm{d}\nu(x)$$

En prenant $A = X, f \equiv 1$ on obtient $g_0 \in \mathcal{L}^2(X, \nu)$.Puis via $f = \max(f, 0) - \max(-f, 0)$ on étend *á* toute f réelle bornée, puis évidemment *á* toute f mesurable complexe bornée.
Nous savons qu'il existe h de module 1 avec $\mu(A) = \int_A h(x)\mathrm{d}\,|\mu|\,(x)$ pour tout A.
Donc $\mu(A) = \int_A g(x)\mathrm{d}\nu$ avec $g(x) = h(x)g_0(x) \in \mathcal{L}^2(X, \nu)$ puisque $|h| = 1$. il ne serait pas difficile d'obtenir la décomposition plus générale $\mu = g\nu + \mu s$ de toute mesure complexe en une partie $\nu - absolument.continue$ et une partie $\ll \nu - singuli\acute{e}re \gg$.
On pourra consulter un livre compétent (théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym)

7 Petit Rappel

théorème 1.29, soit $f : X \to [0, +\infty[$une fonction mesurable et définissons

$$\phi(E) = \int_E f\mathrm{d}\mu(E \in \mathcal{M})$$

Alors ϕ est une mesure sur $\mathcal{M}$et $\int_X g\mathrm{d}\phi = \int_X fg\mathrm{d}\mu$.
Pour toute fonction mesurable g sur X dont l'image est dans $[0, +\infty]$.

théorème 1.39,

a) Supposons que $f : X \to [0, +\infty]$ soit une fonction mesurable, $E \in \mathcal{M}$ et $\int_E f\mathrm{d}\mu = 0$. Dans ce cas $f = 0 p.p. sur E$

b) Supposons que $f \in \mathcal{L}^1$ et $\int_E f\mathrm{d}\mu = 0$ pour tous $E \in \mathcal{M}$. Alors $f = 0 p.p. sur X$.

c) Supposons que $f \in \mathcal{L}^1$ et

$$\left| \int_X f\mathrm{d}\mu \right| = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

il existe une constante α de sorte que $\alpha f = |f|$ presque partout sur X.

Références

[1] Rudin WALTER. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1966.

[2] Université Lille 1LICENCE SEMESTRE 6. *Mesure Complexe.*UFR Mathématique Math 312, 2005/2006.

[3] Université Lille 1LICENCE SEMESTRE 6. *continuité absolue et Radon Nikodym.*UFR Mathématique Math 312, 2005/2006.