

Schéma de Bernoulli

I) Epreuve et loi de Bernoulli

1) Définition

On appelle **épreuve de Bernoulli de paramètre p** toute expérience aléatoire admettant deux issues exactement :

- L'une appelée **succès notée S** dont la probabilité de réalisation est p
- L'autre appelée **échec notée E ou \bar{S}** dont la probabilité de réalisation est $1 - p$

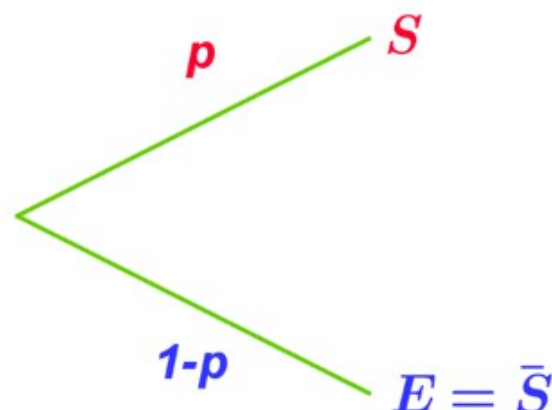
Exemples

1) Un lancer de pièce de monnaie bien équilibrée est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$ (le succès S étant indifféremment « obtenir PILE » ou « obtenir FACE »).

2) Un lancer de dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, dans lequel on s'intéresse à l'apparition de S : « obtenir un 1 » est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$ et la probabilité de \bar{S} est donc $1 - p = \frac{5}{6}$

3) Extraire une carte d'un jeu de 32 cartes et s'intéresser à l'obtention d'un as est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{8}$ et la probabilité de \bar{S} est donc $1 - p = \frac{7}{8}$

Illustration



Note historique : Jacques **Bernoulli** est un mathématicien suisse (1654 – 1705)

II) Schéma de Bernoulli

1) Définition 1 : Schéma de Bernoulli

On appelle **schéma de Bernoulli** comportant n épreuves (n entier naturel non nul) de paramètre p , toute expérience consistant à répéter n fois de façon indépendantes une même épreuve de Bernoulli de paramètre p .

Exemples :

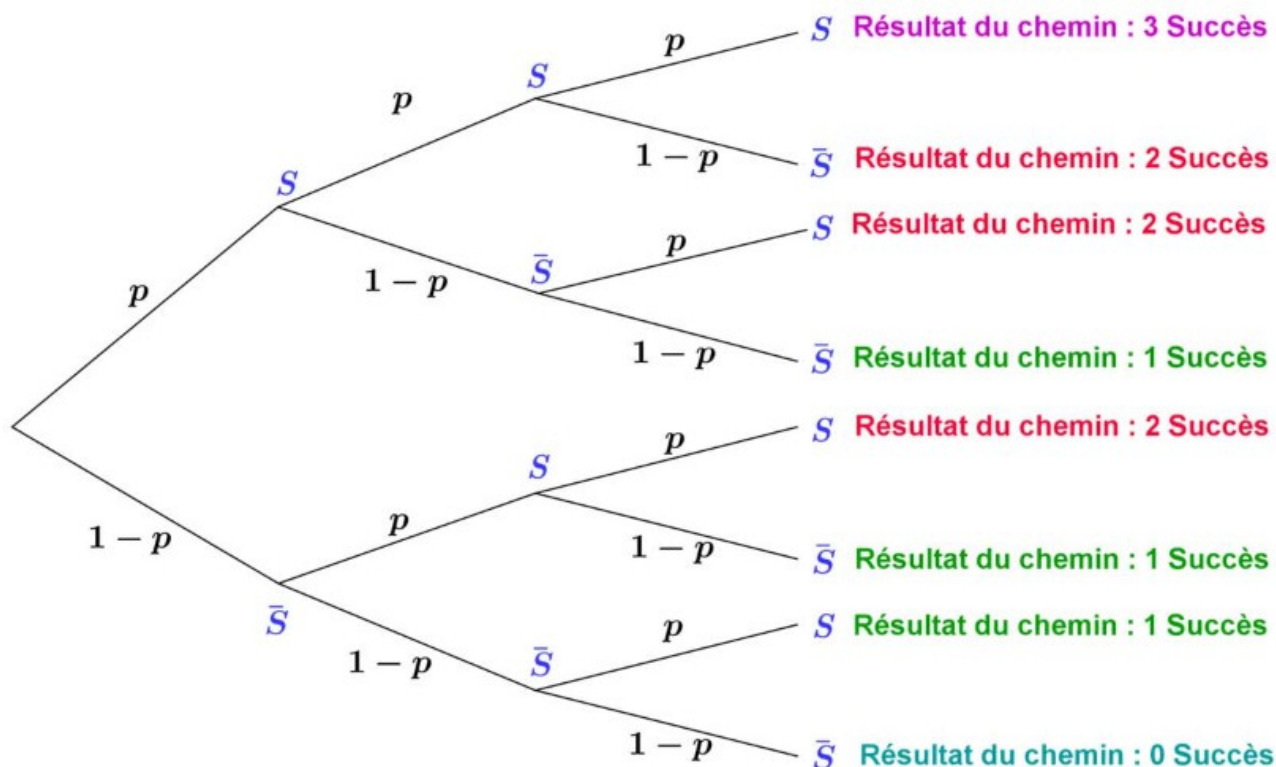
1) 5 lancers successifs d'une pièce bien équilibrée, en appelant succès l'obtention de PILE constitue un schéma de Bernoulli avec $n = 5$ et de paramètre $p = \frac{1}{2}$

2) 10 lancers de dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, en appelant succès l'apparition de S : « obtenir un 1 » constitue un schéma de Bernoulli avec $n = 10$ et de paramètre $p = \frac{1}{6}$

Remarques :

- Un schéma de Bernoulli peut être illustré par un arbre (ci-dessous cas de $n = 3$)
- Un résultat est une liste de n issues S ou \bar{S} (par exemple $\{S, \bar{S}, \bar{S}, S, \bar{S}\}$ dans un schéma à 5 épreuves)
- Le chemin codé $S \bar{S} \bar{S} S \bar{S}$ est un chemin qui réalise 2 succès lors de 5 répétitions.

Illustration :



2) Définition 2 : Schéma de Bernoulli

On considère un **schéma de Bernoulli de n épreuves** (n entier naturel non nul), représenté par un arbre comme ci-dessus ($n = 3$).

Sur chaque branche de l'arbre on indique la probabilité de l'événement placé à droite de cette branche.

On admet que, **pour la répétitions d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chacun des résultats.**

Exemple :

Dans l'arbre représenté ci-dessus on a :

La probabilité de la liste ($s ; \bar{s} ; s$) est : $p \times (1 - p) \times p$

La probabilité de la liste ($\bar{s} ; \bar{s} ; \bar{s}$) est : $(1 - p) \times (1 - p) \times (1 - p) = (1 - p)^3$