

VARIABLES ALÉATOIRES



En 1654, *Blaise Pascal* (1623 ; 1662) entretient avec *Pierre de Fermat* (1601 ; 1665) des correspondances sur le thème des jeux de hasard et d'espérance de gain qui les mènent à exposer une théorie nouvelle : les calculs de probabilités. Ils s'intéressent à la résolution de problèmes de dénombrement comme par exemple celui du *Chevalier de Méré* :
 « Comment distribuer équitablement la mise à un jeu de hasard interrompu avant la fin ? »

I. Variable aléatoire et loi de probabilité

1) Variable aléatoire

Exemple :

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat."
 L'ensemble de toutes les issues possibles $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ s'appelle l'univers des possibles.

On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2 €.
- Si le résultat est 1, on gagne 3 €.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ qui peut prendre les valeurs 2, 3 ou -4 .

Pour les issues 2, 4 ou 6, on a : $X = 2$

Pour l'issue 1, on a : $X = 3$

Pour les issues 3 et 5, on a : $X = -4$.

Définition : Une variable aléatoire X associe un nombre réel à chaque issue de l'univers E .

2) Loi de probabilité

Exemple : On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.

Chaque issue du lancer de dé est équiprobable et égale à $\frac{1}{6}$.

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 2 est égale à $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

On note : $P(X = 2) = \frac{1}{2}$.

De même : $P(X = 3) = \frac{1}{6}$ et $P(X = -4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i	-4	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Ce tableau résume la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Définition : La loi de probabilité de X est donnée par toutes les probabilités $P(X = x_i)$.

Remarques :

- $P(X = x_i)$ peut se noter p_i .
- $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

Exemple :

Dans l'exemple traité plus haut : $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$.

Méthode : Déterminer une loi de probabilité

 Vidéo https://youtu.be/2Ge_4hclPnl

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."

On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cœur, on gagne 2 €.
- Si on tire un roi, on gagne 5 €.
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui, à une carte tirée, associe un gain ou une perte.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X.
- 2) Calculer $P(X \geq 5)$ et interpréter le résultat.

1) La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 5, -1 mais aussi 7.
En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 5(roi) + 2(cœur) = 7 €.

- Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), $X = 2$.

$$P(X = 2) = \frac{7}{32}$$

- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), $X = 5$.

$$P(X = 5) = \frac{3}{32}$$

- Si la carte tirée est le roi de cœur, $X = 7$.

$$P(X = 7) = \frac{1}{32}$$

- Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, $X = -1$.

$$P(X = -1) = \frac{21}{32}$$

La loi de probabilité de X est :

x_i	-1	2	5	7
p_i	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

On constate que : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{21}{32} + \frac{7}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = 1$

$$2) P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 7) = \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

La probabilité de gagner plus de 5 € est égale à $\frac{1}{8}$.

II. Espérance

Méthode : Calculer l'espérance d'une loi de probabilité

 **Vidéo** <https://youtu.be/AcWVxHgtWp4>

Dans le jeu de la "Méthode" du paragraphe précédent, calculer l'espérance de la loi de probabilité de X et interpréter le résultat.

Définition : L'**espérance mathématique** de la loi de probabilité de X est :

$$E(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

$$E(X) = \frac{21}{32} \times (-1) + \frac{7}{32} \times 2 + \frac{3}{32} \times 5 + \frac{1}{32} \times 7 = \frac{15}{32}$$

L'espérance est égale à $\frac{15}{32} \approx 0,5$ signifie qu'en jouant, on peut espérer gagner environ 0,50€.

Remarque :

L'espérance est donc la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales