Champs de Dirac à masse +m et -m
et
leur interconnexion.

Bénédictus Servant *
Québec, Amérique du Nord

7 mai 2019

Résumé

Dans ce travail nous présentons les champs de Dirac à masse +m et -m et nous montrons comment ils sont reliés.

*e-mail : bservant05@hotmail.com

Table des matières

1 Introduction

Dans un précédent article[1] nous avons proposé une approche qui avait pour but d'inverser la masse d'un électron de +m à -m [1]. Or cela semble poser problème. En effet, si au lieu de calculer la probabilité de transition exprimée par l'éq. (72) en [1] à savoir :

$$P(t) = |\Theta^{\dagger}_{+,R,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t)|^2 \ , \tag{1}$$

on calcule la probabilité suivante :

$$\tilde{P}(t) \equiv |\Theta^{\dagger}_{-,R,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t)|^2 \ . \tag{2}$$

De (44) en [1] on a :

$$\Theta^{\dagger}_{j,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \theta^{\dagger}_{j,S,\mathbf{p}} \ \mathrm{e}^{-\ i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar)} \tag{3}$$

et de (56) en [1] on a :

$$\Theta^{\dagger}_{-,R,\mathbf{p}} = \ \Big[\cos(\varphi/2)\langle+|_1 - \sin(\varphi/2)\langle-|_1\Big]\langle+|_{\mathrm{II}} \ \ , \tag{4}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t) = &|a_{+,R,\mathbf{p}}(t)|^2\cos^2(\varphi) \ + \ |a_{-,R,\mathbf{p}}(t)|^2\sin^2(\varphi) \\ &- \Big(a^{*}_{+,R,\mathbf{p}}(t)a_{-,R,\mathbf{p}}(t) \ + \ a^{*}_{-,R,\mathbf{p}}(t)a_{+,R,\mathbf{p}}(t)\Big)\sin(\varphi)\cos(\varphi) \ .\end{aligned} \tag{5}$$

Le problème est qu'à $t = 0$ les conditions initiales en (79) de [1] sont telles que l'on a :

$$\tilde{P}(0) = \cos^2(\varphi) = \left(\frac{\mathrm{mc}^2}{\varepsilon(\mathbf{p})}\right)^2 \ \ . \tag{6}$$

Cela signifie qu'il y a une probabilité non-nulle pour inverser la masse d'un électron même sans potentiel magnétique. Cette probabilité serait près de 1 si l'électron est non-relativiste (i.e. $\mathrm{c}|\mathbf{p}| \ll \mathrm{mc}^2$). Or, il n'y a aucune évidences expérimentales (bien au contraire) qui suggères que des électrons inversent leur masse spontannément. Il semble donc qu'il y ait un problème au niveau théorique. Pour mieux comprendre nous pensons qu'il faut pousser plus loin la théorie en considérant les champs de Dirac (la seconde quantification).

1. Au mieux le potentiel magnétique permet de passer d'un état d'électron $\Phi_{+,R,\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ de masse +m à un état de positron $\Phi_{-,R,\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ de masse +m avec une probabilité $P(t) = |\Phi^{\dagger}_{-,R,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t)|^2 = |a_{-,R,\mathbf{p}}(t)|^2$.

2 Champ de Dirac à masse positive.

Rappelons les définitions des opérateurs du champ de Dirac (à masse +m) $\Psi(\mathbf{r})$ et $\Psi^{\dagger}(\mathbf{r})$ au point $\mathbf{r}$:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{p} \sum_S \Big(\Phi_{+,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \mathrm{a}_{+,S,\mathbf{p}} + \Phi_{-,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\ \mathrm{a}^{\dagger}_{-,S,-\mathbf{p}} \Big), \tag{7}$$

$$\Psi^{\dagger}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{p} \sum_S \Big(\Phi^{\dagger}{}_{+,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\ \mathrm{a}^{\dagger}_{+,S,\mathbf{p}} + \Phi^{\dagger}{}_{-,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\ \mathrm{a}_{-,S,-\mathbf{p}} \Big), \tag{8}$$

$\mathrm{a}_{j,S,\mathbf{p}}$ et $\mathrm{a}^{\dagger}_{j,S,\mathbf{p}}$ sont respectivement les opérateurs d'annihilation et de création de fermions dans l'espace du nombre d'occupation de l'état à une particule caractérisé par les nombres quantiques j, S et $\mathbf{p}$. Ils obéissent aux habituelles relations d'anticommutation :

$$\{\mathrm{a}_{j,S,\mathbf{p}}\ ,\ \mathrm{a}^{\dagger}_{j',S',\mathbf{p}'}\} = \delta_{j,j'}\ \delta_{S,S'}\ \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{9}$$

$$\{\mathrm{a}^{\dagger}_{j,S,\mathbf{p}}\ ,\ \mathrm{a}^{\dagger}_{j',S',\mathbf{p}'}\} = 0, \tag{10}$$

$$\{\mathrm{a}_{j,S,\mathbf{p}}\ ,\ \mathrm{a}_{j',S',\mathbf{p}'}\} = 0. \tag{11}$$

L'indice $j = (+, -)$ caractérise les fréquences (énergies) positives et negatives. S = (R, L) est l'état d'hélicité. Le vecteur $\mathbf{p}$ est la variable canonique classique de quantité de mouvement conjuguée au vecteur de position $\mathbf{r}$. $\Phi_{j,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ sont les états stationnaires de l'équation aux valeurs propres :

$$H_{\mathrm{o}}\ \ \Phi_{j,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = j\ \varepsilon(\mathbf{p})\ \ \Phi_{j,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\ . \tag{12}$$

L'opérateur hamiltonien H_{o} de Dirac pour une particule libre de spin 1/2 et de masse +m est donné par :

$$H_{\mathrm{o}} = \mathrm{c}\alpha \cdot \mathbf{P} + \beta \mathrm{mc}^{\mathbf{2}}\ . \tag{13}$$

c et m sont respectivement la vitesse de la lumière dans le vide et la masse au repos. β et α_μ (μ = x, y, z) sont les matrices de Dirac :

$$\alpha_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} \end{pmatrix} \tag{14}$$

où σ_μ sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

et I, la matrice unité 2×2. En (13), $\mathbf{P} \to -i\hbar\nabla$ (opérateur). $\varepsilon(\mathbf{p})$ est l'énergie propres donnée par :

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = (\mathrm{c}^2\mathbf{p}^2 + \mathrm{m}^2\mathrm{c}^4)^{1/2} . \tag{16}$$

Les fonctions d'ondes orthonormalisées peuvent être exprimées comme suit :

$$\Phi_{j,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \phi_{j,S,\mathbf{p}}\, \mathrm{e}^{\,i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar)} \tag{17}$$

où $\phi_{j,S,\mathbf{p}}$ sont les bi-spineurs[1] :

$$\phi_{+,R,\mathbf{p}} = \Big[\cos(\varphi/2)|+\rangle_1 + \sin(\varphi/2)|-\rangle_1\Big]|+\rangle_{\mathrm{II}} \tag{18}$$

$$\phi_{+,L,\mathbf{p}} = \Big[\cos(\varphi/2)|+\rangle_1 - \sin(\varphi/2)|-\rangle_1\Big]|-\rangle_{\mathrm{II}} \tag{19}$$

$$\phi_{-,R,\mathbf{p}} = \Big[-\sin(\varphi/2)|+\rangle_1 + \cos(\varphi/2)|-\rangle_1\Big]|+\rangle_{\mathrm{II}} \tag{20}$$

$$\phi_{-,L,\mathbf{p}} = \Big[\sin(\varphi/2)|+\rangle_1 + \cos(\varphi/2)|-\rangle_1\Big]|-\rangle_{\mathrm{II}} \tag{21}$$

ou bien :

$$\phi_{+,R,\mathbf{p}} = |+\rangle_{\mathrm{I}(\chi=0)}\ |+\rangle_{\mathrm{II}} \tag{22}$$

$$\phi_{+,L,\mathbf{p}} = |+\rangle_{\mathrm{I}(\chi=\pi)}\ |-\rangle_{\mathrm{II}} \tag{23}$$

$$\phi_{-,R,\mathbf{p}} = |-\rangle_{\mathrm{I}(\chi=0)}|+\rangle_{\mathrm{II}} \tag{24}$$

$$\phi_{-,L,\mathbf{p}} = |-\rangle_{\mathrm{I}(\chi=\pi)}|-\rangle_{\mathrm{II}} \quad , \tag{25}$$

avec :

$$\phi^{\dagger}_{j,S,\mathbf{p}}\phi_{j',S',\mathbf{p}} = \delta_{j,j'}\delta_{S,S'} . \tag{26}$$

Les équations (22) et (23) donnent les bi-spineurs correspondants à la valeur propre $j\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p})$ (i.e. fréquence ou énergie positive) alors que (24) et (25) donnent ceux associés à la valeur propre $j\varepsilon(\mathbf{p}) = -\varepsilon(\mathbf{p})$ (i.e. fréquence ou énergie négative).

L'hamiltonien du champ de Dirac pour des particules libres à masse positive est simplement donné par :

$$\widehat{H}_o \equiv \int d^3\mathbf{r}\ \Psi^\dagger(\mathbf{r}) H_o \Psi(\mathbf{r}) + \text{cte} \ = \int d^3\mathbf{p} \sum_{j,S} \varepsilon(\mathbf{p})\ \mathrm{a}^\dagger_{j,S,\mathbf{p}} \mathrm{a}_{j,S,\mathbf{p}} \tag{27}$$

où :

$$\text{cte} = 2\delta(0) \int d^3\mathbf{p}\ \varepsilon(\mathbf{p})\ . \tag{28}$$

Il faut signaler que dans ce formalisme les positrons sont associés à l'indice $j =$ - (fréquence ou énergie négatives) alors que les électrons sont associés à l'indice j = + (fréquence ou énergie positives). On voit sur (27) que positrons et électrons ont tous des énergies positives (i.e. $+\varepsilon(\mathbf{p})$) ce qui est conforme aux observations. La constante en (28) est infinie. Les gens l'ont toujours "balayée sous le tapis". En fait on l'a attribuée au vide en disant que le vide a une énergie infinie et c'était son "zéro" d'énergie. On va voir plus loin qu'avec les champs à masse négative cette constante disparaît parce qu'il y a une constante exactement égale et de signe opposée qui provient de ces champs.

3 Champ de Dirac à masse négative.

Par définition les opérateurs du champ de Dirac (à masse -m) $\tilde{\Psi}(\mathbf{r})$ et $\tilde{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ au point $\mathbf{r}$ sont donnés par :

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{p} \sum_S \Big(\Theta_{-,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \mathrm{b}_{-,S,\mathbf{p}} + \ \Theta_{+,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\ \mathrm{b}^\dagger_{+,S,-\mathbf{p}} \Big), \tag{29}$$

$$\tilde{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{p} \sum_S \Big(\Theta^\dagger{}_{-,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\ \mathrm{b}^\dagger_{-,S,\mathbf{p}} + \ \Theta^\dagger{}_{+,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\ \mathrm{b}_{+,S,-\mathbf{p}} \Big), \tag{30}$$

$\mathrm{b}_{j,S,\mathbf{p}}$ et $\mathrm{b}^\dagger_{j,S,\mathbf{p}}$ sont respectivement les opérateurs d'annihilation et de création de fermions dans l'espace du nombre d'occupation de l'état à une particule caractérisé par les nombres quantiques j, S et $\mathbf{p}$. Ils obéissent aux habituelles relations d'anticommutation :

$$\{\mathrm{b}_{j,S,\mathbf{p}}\ ,\ \mathrm{b}^{\dagger}_{j',S',\mathbf{p}'}\} = \delta_{j,j'}\ \delta_{S,S'}\ \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{31}$$

$$\{\mathrm{b}^{\dagger}_{j,S,\mathbf{p}}\ ,\ \mathrm{b}^{\dagger}_{j',S',\mathbf{p}'}\} = 0, \tag{32}$$

$$\{\mathrm{b}_{j,S,\mathbf{p}}\ ,\ \mathrm{b}_{j',S',\mathbf{p}'}\} = 0. \tag{33}$$

L'indice $j = (+,\, -)$ caractérise les fréquences (énergies) positives et negatives. $S = (R,\, L)$ est l'état d'hélicité. Le vecteur $\mathbf{p}$ est la variable canonique classique de quantité de mouvement conjuguée au vecteur de position $\mathbf{r}$. $\Theta_{j,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ sont les états stationnaires de l'équation aux valeurs propres :

$$\tilde{H}_{\mathrm{o}}\ \ \Theta_{j,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = j\ \varepsilon(\mathbf{p})\ \ \Theta_{j,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r})\ . \tag{34}$$

où l'opérateur hamiltonien $\tilde{H}_{\mathrm{o}}$ de Dirac à une particule libre de spin 1/2 et de masse -m est donné par :

$$\tilde{H}_{\mathrm{o}} = \mathrm{c}\alpha\cdot\mathbf{P} - \beta\mathrm{mc}^{\mathbf{2}} \tag{35}$$

et

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = (\mathrm{c}^2\mathbf{p}^2 + \mathrm{m}^2\mathrm{c}^4)^{1/2}\ . \tag{36}$$

c et m sont respectivement la vitesse de la lumière dans le vide et la masse au repos. β et α_{μ} (μ = x, y, z) sont les mêmes matrices qu'en section § **??** et on a encore $\mathbf{P} \to -i\hbar\nabla$ (opérateur). $\Theta_{j,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ sont les états stationaires donnés par :

$$\Theta_{j,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \theta_{j,S,\mathbf{p}}\ \mathrm{e}^{\ i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar)} \tag{37}$$

où $\theta_{j,S,\mathbf{p}}$ sont les bi-spineurs[1] :

$$\theta_{+,R,\mathbf{p}} = \ \Big[\sin(\varphi/2)|+\rangle_1 + \cos(\varphi/2)|-\rangle_1\Big]|+\rangle_{\mathrm{II}} \tag{38}$$

$$\theta_{+,L,\mathbf{p}} = \ \Big[-\sin(\varphi/2)|+\rangle_1 + \cos(\varphi/2)|-\rangle_1\Big]|-\rangle_{\mathrm{II}} \tag{39}$$

$$\theta_{-,R,\mathbf{p}} = \ \Big[\cos(\varphi/2)|+\rangle_1 - \sin(\varphi/2)|-\rangle_1\Big]|+\rangle_{\mathrm{II}} \tag{40}$$

$$\theta_{-,L,\mathbf{p}} = \ \Big[\cos(\varphi/2)|+\rangle_1 + \sin(\varphi/2)|-\rangle_1\Big]|-\rangle_{\mathrm{II}} \tag{41}$$

ou encore :

$$\theta_{+,R,\mathbf{p}} = |-\rangle_{\mathrm{I}(\chi=\pi)}\ |+\rangle_{\mathrm{II}} \tag{42}$$

$$\theta_{+,L,\mathbf{p}} = |-\rangle_{\mathrm{I}(\chi=0)}\ |-\rangle_{\mathrm{II}} \tag{43}$$

$$\theta_{-,R,\mathbf{p}} = |+\rangle_{\mathrm{I}(\chi=\pi)}|+\rangle_{\mathrm{II}} \tag{44}$$

$$\theta_{-,L,\mathbf{p}} = |+\rangle_{\mathrm{I}(\chi=0)}|-\rangle_{\mathrm{II}}\ \ . \tag{45}$$

avec :

$$\theta^{\dagger}_{j,S,\mathbf{p}}\theta_{j',S',\mathbf{p}} = \delta_{j,j'}\delta_{S,S'}\ . \tag{46}$$

Les équations (42) et (43) donnent les bi-spineurs correspondants à la valeur propre $j\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p})$ (i.e. fréquence ou énergie positive) alors que (44) et (45) donnent ceux associés à la valeur propre $j\varepsilon(\mathbf{p})$ = -$\varepsilon(\mathbf{p})$ (i.e. fréquence ou énergie négative).

L'hamiltonien du champ de Dirac pour des particules libres à masse négative est simplement donné par :

$$\widehat{\tilde{H}}_o \equiv \int d^3\mathbf{r}\ \tilde{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r})\tilde{H}_o\tilde{\Psi}(\mathbf{r}) - \mathrm{cte}\ = \int d^3\mathbf{p}\sum_{j,S}(-\varepsilon(\mathbf{p}))\ \mathrm{b}^{\dagger}_{j,S,\mathbf{p}}\mathrm{b}_{j,S,\mathbf{p}} \tag{47}$$

où cte est donné en (28).

Nous verrons à la section suivante que dans ce formalisme les positrons sont associés à l'indice j = + (fréquence ou énergie positives) alors que les électrons sont associés à l'indice j = - (fréquence ou énergie négatives). C'est la situation inverse de celle avec les champs à masse positive. On voit sur (47) que positrons et électrons ont tous des énergies négatives (i.e. $-\varepsilon(\mathbf{p})$). On peut voir aussi qu'avec les champs à masse négative la somme des énergies à masse +m et -m (i.e. (27) plus (47)) élimine la constante “cte”. Ainsi, le vide n'a plus une énergie infinie mais nulle.

3.1 États des électrons et des positrons à masse négative.

Considérons les bi-spineurs des fermions à masse +m (i.e. éqs. (18)-(21)) et les bi-spineurs à masse -m (i.e. éqs. (38)-(41)). Dans le cas de la masse +m il est convenu dans la littérature d'attribuer le terme d'électron (charge négative) aux bi-spineurs (18) et (19) alors que la charge positive (positron) est attribuée aux bi-spineurs (20) et (21). Lorsqu'on considère la cas limite $\mathbf{p} = 0$ les bi-spineurs à masse +m se réduisent à :

$$\phi_{+,R,\mathbf{p}=0} = |+\rangle_1 |+\rangle_{II} \tag{48}$$

$$\phi_{+,L,\mathbf{p}=0} = |+\rangle_1 |-\rangle_{II} \tag{49}$$

$$\phi_{-,R,\mathbf{p}=0} = |-\rangle_1 |+\rangle_{II} \tag{50}$$

$$\phi_{-,L,\mathbf{p}=0} = |-\rangle_1 |-\rangle_{II} \tag{51}$$

mais les bi-spineurs à masse -m deviennent :

$$\theta_{+,R,\mathbf{p}=0} = |-\rangle_1 |+\rangle_{II} \tag{52}$$

$$\theta_{+,L,\mathbf{p}=0} = |-\rangle_1 |-\rangle_{II} \tag{53}$$

$$\theta_{-,R,\mathbf{p}=0} = |+\rangle_1 |+\rangle_{II} \tag{54}$$

$$\theta_{-,L,\mathbf{p}=0} = |+\rangle_1 |-\rangle_{II} \ . \tag{55}$$

Dans ce cas limite ce qui semble caractériser un électron dans (48) et (49) c'est le spineur $|+\rangle_1$ alors que pour le positron dans (50) et (51) c'est le spineur $|-\rangle_1$. Si cela est vrai et puisque l'on retrouve cette même caractéristique en (52)-(55) alors on est en droit de penser que pour -m l'électron est attribué aux spineurs en (40) et (41) et le positron à (38) et (39). En résumé pour +m :

$$\phi_{+,S,\mathbf{p}} \rightarrow \text{electron}$$
$$\phi_{-,S,\mathbf{p}} \rightarrow \text{positron}$$

et pour -m :

$$\theta_{+,S,\mathbf{p}} \rightarrow \text{positron}$$
$$\theta_{-,S,\mathbf{p}} \rightarrow \text{electron} \ .$$

4 Interconnexion entre les fermions à masse +m et -m.

Il existe une interconnexion entre les opérateurs de fermions $a_{j,S,\mathbf{p}}$ à masse +m et les opérateurs de fermions $b_{j,S,\mathbf{p}}$ à masse -m. Cette interconnexion se manifeste par l'intermédiaire d'opérateurs communs. Considérons les opérateurs $c_{j,S,\mathbf{p}}$ et $c^{\dagger}_{j,S,\mathbf{p}}$. Ce sont respectivement les opérateurs d'annihilation et de création de fermions dans l'espace du nombre d'occupation de l'état à une particule caractérisé par les nombres quantiques j, S et $\mathbf{p}$. Ils obéissent aux habituelles relations d'anticommutation :

$$\{c_{j,S,\mathbf{p}}\ ,\ c^{\dagger}_{j',S',\mathbf{p}'}\} = \delta_{j,j'}\ \delta_{S,S'}\ \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{56}$$

$$\{c^{\dagger}_{j,S,\mathbf{p}}\ ,\ c^{\dagger}_{j',S',\mathbf{p}'}\} = 0, \tag{57}$$

$$\{c_{j,S,\mathbf{p}}\ ,\ c_{j',S',\mathbf{p}'}\} = 0. \tag{58}$$

L'indice $j = (+, -)$ caractérise les fréquences (énergies) positives et negatives. $S = (R, L)$ est l'état d'hélicité. Par définition on a :

$$a_{+,R,\mathbf{p}} = \cos(\varphi/2) c_{+,R,\mathbf{p}} + \sin(\varphi/2)\ c_{-,R,\mathbf{p}} \tag{59}$$

$$a_{+,L,\mathbf{p}} = \cos(\varphi/2)\ c_{+,L,\mathbf{p}} - \sin(\varphi/2)\ c_{-,L,\mathbf{p}} \tag{60}$$

$$a_{-,R,\mathbf{p}} = -\sin(\varphi/2)\ c_{+,R,\mathbf{p}} + \cos(\varphi/2)\ c_{-,R,\mathbf{p}} \tag{61}$$

$$a_{-,L,\mathbf{p}} = \sin(\varphi/2)\ c_{+,L,\mathbf{p}} + \cos(\varphi/2)\ c_{-,L,\mathbf{p}} \tag{62}$$

pour les fermions à masses +m et

$$b_{+,R,\mathbf{p}} = \sin(\varphi/2)\ c_{+,R,\mathbf{p}} + \cos(\varphi/2)\ c_{-,R,\mathbf{p}} \tag{63}$$

$$b_{+,L,\mathbf{p}} = -\sin(\varphi/2)\ c_{+,L,\mathbf{p}} + \cos(\varphi/2)\ c_{-,L,\mathbf{p}} \tag{64}$$

$$b_{-,R,\mathbf{p}} = \cos(\varphi/2)\ c_{+,R,\mathbf{p}} - \sin(\varphi/2)\ c_{-,R,\mathbf{p}} \tag{65}$$

$$b_{-,L,\mathbf{p}=0} = \cos(\varphi/2)\ c_{+,L,\mathbf{p}} + \sin(\varphi/2)\ c_{-,L,\mathbf{p}} \tag{66}$$

pour les fermions à masse -m.

Ces définitions pour les opérateurs présentent une similitude avec les équations pour les bi-spineurs (18)-(21) et (38)-(41) respectivement et cela n'est pas fortuit. On voit que dans le cas limite où $\mathbf{p} = 0$ on a :

$$\mathrm{a}_{+,R,\mathbf{p}=0} = \mathrm{c}_{+,R,\mathbf{p}=0} \tag{67}$$

$$\mathrm{a}_{+,L,\mathbf{p}=0} = \mathrm{c}_{+,L,\mathbf{p}=0} \tag{68}$$

$$\mathrm{a}_{-,R,\mathbf{p}=0} = \mathrm{c}_{-,R,\mathbf{p}=0} \tag{69}$$

$$\mathrm{a}_{-,L,\mathbf{p}=0} = \mathrm{c}_{-,L,\mathbf{p}=0} \tag{70}$$

alors que :

$$\mathrm{b}_{+,R,\mathbf{p}=0} = \mathrm{c}_{-,R,\mathbf{p}=0} \tag{71}$$

$$\mathrm{b}_{+,L,\mathbf{p}=0} = \mathrm{c}_{-,L,\mathbf{p}=0} \tag{72}$$

$$\mathrm{b}_{-,R,\mathbf{p}=0} = \mathrm{c}_{+,R,\mathbf{p}=0} \tag{73}$$

$$\mathrm{b}_{-,L,\mathbf{p}=0} = \mathrm{c}_{+,L,\mathbf{p}=0} \ . \tag{74}$$

Les opérateurs $\mathrm{c}_{j,S,\mathbf{p}=\mathbf{0}}$ sont associés aux spineurs $|\pm\rangle_1$. Comme pour la section §3.1 on déduit que pour +m :

$$\begin{aligned} \mathrm{a}_{+,S,\mathbf{p}} &\rightarrow \text{electron} \\ \mathrm{a}_{-,S,\mathbf{p}} &\rightarrow \text{positron} \end{aligned}$$

et pour -m :

$$\begin{aligned} \mathrm{b}_{+,S,\mathbf{p}} &\rightarrow \text{positron} \\ \mathrm{b}_{-,S,\mathbf{p}} &\rightarrow \text{electron} \ . \end{aligned}$$

On peut vérifier en utilisant (56) à (66) que l'on retrouve les relations d'anticommutations en (9)-(11) et (31)-(33). Enfin on peut aussi vérifier à l'aide de (59)-(66) que :

$$\widehat{H}_o = \int d^3\mathbf{p} \sum_{j,S} \varepsilon(\mathbf{p})\ \mathrm{a}^\dagger_{j,S,\mathbf{p}} \mathrm{a}_{j,S,\mathbf{p}} = \int d^3\mathbf{p} \sum_{j,S} \varepsilon(\mathbf{p})\ \mathrm{c}^\dagger_{j,S,\mathbf{p}} \mathrm{c}_{j,S,\mathbf{p}} \tag{75}$$

et

$$\widehat{\tilde{H}}_o = \int d^3\mathbf{p} \sum_{j,S} (-\varepsilon(\mathbf{p}))\, \mathrm{b}^\dagger_{j,S,\mathbf{p}} \mathrm{b}_{j,S,\mathbf{p}} = \int d^3\mathbf{p} \sum_{j,S} (-\varepsilon(\mathbf{p}))\, \mathrm{c}^\dagger_{j,S,\mathbf{p}} \mathrm{c}_{j,S,\mathbf{p}} \tag{76}$$

de sorte que l'énergie totale pour +m et -m est nulle :

$$\widehat{H}_o + \widehat{\tilde{H}}_o = 0\ . \tag{77}$$

5 Conclusion

Nous avons considéré la théorie des champs de Dirac (à masse +m) et l'avons étendue au cas -m. Ce que nous constatons c'est que le passage de la mécanique quantique MQ (i.e. l'article [1]) à la théorie quantique des champs QFT (le présent article) n'apporte rien qui mène à penser que le résultat en (6) soit faux. Et si nos conclusions de la section §3.1 sont exactes le résultat (6) nous donnerait la probabilité d'un transfert (sans potentiel magnétique) entre un électron de masse +m vers un électron de masse -m. Par contre le résultat (84) en [1] nous donnerait la probabilité d'un transfert entre un électron de masse +m vers un positron de masse -m (à la condition d'utiliser un potentiel magnétique adéquat). Dans ce dernier cas non seulement on changerait le signe de la masse mais aussi celui de la charge électrique.

Dans le [1] les bi-spineurs $\phi_{j,S,\mathbf{p}}$ associés à +m avaient en commun avec les bi-spineurs $\theta_{j,S,\mathbf{p}}$ associés à -m les spineurs $|\pm\rangle_1$. L'interconnexion entre eux était $|\pm\rangle_1$. Ici ce sont les opérateurs de fermions $\mathrm{c}_{j,S,\mathbf{p}}$ qui constituent l'interconnexion entre les opérateurs de fermions $\mathrm{a}_{j,S,\mathbf{p}}$ à masse +m et les opérateurs de fermions $\mathrm{b}_{j,S,\mathbf{p}}$ à masse -m. Des résultats intéressants issus de QFT : les constantes infinies associées à +m et -m s'annulent mutuellement (i.e. l'énergie (de fermions) du vide est nulle). L'énergie totale éq.(77) des deux systèmes de fermions (+m et -m) est nulle.

Références

[1] Servant, B., *Masse négative et inversion de masse par un potentiel magnétique.* https ://bservant05.blogspot.com