

Masse négative
et inversion de masse
par un potentiel magnétique.
(Annexe-3).

Bénédictus Servant *
Québec, Amérique du Nord.

10 avril 2019

Résumé

Dans cette annexe nous montrons graphiquement à quoi correspond une inversion unitaire du temp.

*e-mail : bservant05@hotmail.com

1 Représentations en termes d'axes de rotation.

1.1 Bi-spineurs de Dirac et axes de rotation

Nous avons montré en annexe A du [1], qu'il est possible d'associer des axes de rotation aux spineurs. De plus, il est facile de montrer que les nouvelles bases de spineurs $|\eta\rangle_{\text{II}}$ et $|\eta\rangle_{\text{I}}$ (i.e. éqs. (34) et (35) de l'article où $\eta = \pm$) peuvent être obtenues à partir des anciennes (i.e. $|\eta\rangle_2$ et $|\eta\rangle_1$) en utilisant les opérations de rotation suivantes :

$$|\eta\rangle_1 \rightarrow |\eta\rangle_{\text{I}} = Q_1 |\eta\rangle_1 \quad (1)$$

et

$$|\eta\rangle_2 \rightarrow |\eta\rangle_{\text{II}} = Q_2 |\eta\rangle_2 \quad (2)$$

où Q_2 et Q_1 sont des matrices 2×2 du groupe $SU(2)$:

$$Q_2 \equiv R_{\mathbf{u}_2}(\theta) = \cos(\theta/2)\mathbf{I} - i \sin(\theta/2)\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}_2 \quad (3)$$

$$Q_1 \equiv R_{\mathbf{u}_1}(\varphi) = \cos(\varphi/2)\mathbf{I} - i \sin(\varphi/2)\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}_1 \quad (4)$$

dans lesquelles \mathbf{I} est la matrice unité et où :

$$\mathbf{u}_2 = -\sin(\phi)\mathbf{x}_2 + \cos(\phi)\mathbf{y}_2 \quad (5)$$

$$\mathbf{u}_1 = -\sin(\chi)\mathbf{x}_1 + \cos(\chi)\mathbf{y}_1 \quad (6)$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{x}_k \boldsymbol{\sigma}_x + \mathbf{y}_k \boldsymbol{\sigma}_y + \mathbf{z}_k \boldsymbol{\sigma}_z \quad (7)$$

où \mathbf{x}_k , \mathbf{y}_k et \mathbf{z}_k sont des vecteurs unitaires et où les matrices de Pauli sont données par :

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (8)$$

Les trois vecteurs unitaires \mathbf{x}_k , \mathbf{y}_k et \mathbf{z}_k ($k = 1$ ou 2) sont mutuellement perpendiculaires (fig. 1) et forment un trièdre droit :

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{z}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (9)$$

Les trièdres $k = 1$ et 2 sont indépendants l'un de l'autre. Par ailleurs, dans la représentation sous forme d'axes nous avons de l'annexe A du [1] :

$$\mathbf{z}'_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} = Q_1(\mathbf{z}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma})Q_1^\dagger \quad (10)$$

et

$$\mathbf{z}'_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} = Q_2(\mathbf{z}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma})Q_2^\dagger . \quad (11)$$

La matrice Q_1 transforme par rotation autour de l'axe \mathbf{u}_1 avec un angle φ l'axe \mathbf{z}_1 en l'axe \mathbf{z}'_1 . La matrice Q_2 transforme par rotation autour de l'axe \mathbf{u}_2 avec un angle θ l'axe \mathbf{z}_2 en l'axe \mathbf{z}'_2 . De (11), \mathbf{z}'_2 est donné par :

$$\mathbf{z}'_2 = \sin(\theta) \cos(\phi) \mathbf{x}_2 + \sin(\theta) \sin(\phi) \mathbf{y}_2 + \cos(\theta) \mathbf{z}_2 \quad (12)$$

et de (10), on a pour \mathbf{z}'_1 :

$$\mathbf{z}'_1 = \sin(\varphi) \cos(\chi) \mathbf{x}_1 + \sin(\varphi) \sin(\chi) \mathbf{y}_1 + \cos(\varphi) \mathbf{z}_1 . \quad (13)$$

Les axes \mathbf{z}'_1 et \mathbf{z}'_2 sont associés aux spineurs $|\eta\rangle_I$ et $|\eta\rangle_{II}$ respectivement alors que, par définition, les axes \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 sont associés aux spineurs $|\eta\rangle_1$ et $|\eta\rangle_2$.

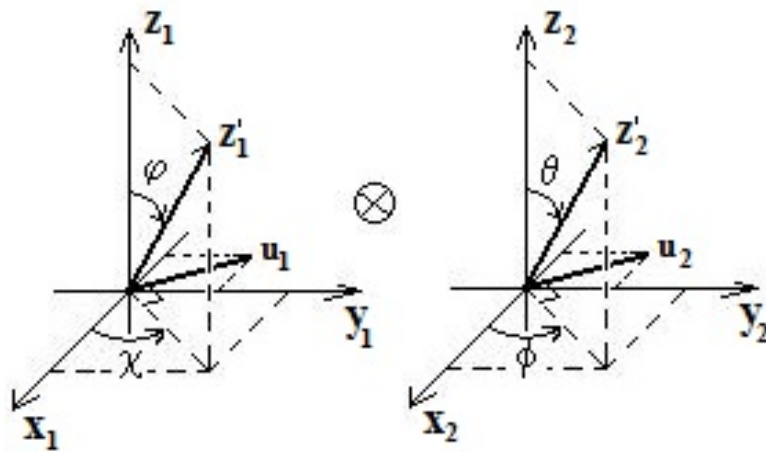


FIGURE 1 – Systèmes d’axes associés aux espaces de spineurs ζ_1 et ζ_2 (voir texte). L’espace de spineurs ζ_2 est de dimension deux et contient des états telque $|\eta\rangle_2$ et $|\eta\rangle_{II}$ où $\eta = \pm$. ζ_1 est de même dimension mais renferme les états telque $|\eta\rangle_1$ et $|\eta\rangle_I$. L’ensemble de ces axes est associé à l’espace vectoriel $\zeta = \zeta_1 \otimes \zeta_2$ qui est un espace de spineurs de dimension quatre ou espace de bi-spineurs.

1.2 Fonctions d'onde et rotations autour d'un axe.

Nous avons vu en annexe A du [1] que pour tout axe tel \mathbf{u} les spineurs associés sont $|\eta\rangle_{\mathbf{u}}$ donnés par :

$$\begin{aligned} |+\rangle_{\mathbf{u}} &= \cos(\theta_u/2) |+\rangle + \sin(\theta_u/2)e^{i\phi_u} |-\rangle \\ |-\rangle_{\mathbf{u}} &= -\sin(\theta_u/2)e^{-i\phi_u} |+\rangle + \cos(\theta_u/2) |-\rangle \end{aligned} \quad (14)$$

où, par définition, les $|\eta\rangle$ sont associés à l'axe \mathbf{z} d'un trièdre (droit) $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. Les spineurs $|\eta\rangle_{\mathbf{u}}$ satisfont à :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}}(\gamma)|\eta\rangle_{\mathbf{u}} = e^{-i\eta\frac{\gamma}{2}}|\eta\rangle_{\mathbf{u}}. \quad (15)$$

où :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}}(\gamma) = \cos(\gamma/2)\mathbf{I} - i\sin(\gamma/2)\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} \quad (16)$$

avec :

$$\mathbf{u} = \mu_1\mathbf{x} + \mu_2\mathbf{y} + \mu_3\mathbf{z} \quad (17)$$

et :

$$\begin{aligned} \mu_1 &\equiv \sin(\theta_u)\cos(\phi_u) \\ \mu_2 &\equiv \sin(\theta_u)\sin(\phi_u) \\ \mu_3 &\equiv \cos(\theta_u). \end{aligned} \quad (18)$$

γ est l'angle de rotation autour de l'axe \mathbf{u} et :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Dans la représentation sous forme de spineurs la rotation en (15) ne change pas les spineurs $|\eta\rangle_{\mathbf{u}}$ parce que ce sont ceux associés à l'axe de rotation lui-même \mathbf{u} . Cependant, l'information à propos de cette rotation particulière apparaît comme un facteur de phase $e^{-i\eta\frac{\gamma}{2}}$.

Considérons le cas de la masse positive. En particulier, les éqs. (4) et (6) de l'article. Les solutions stationnaires qui en découlent sont simplement :

$$\Phi_{j,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) = \phi_{j,S,\mathbf{p}} e^{-i(j\varepsilon(\mathbf{p})t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/\hbar}. \quad (20)$$

En considérant l'équation (15) ci-dessus il est facile de montrer que les exponentielles en (20) peuvent être interprétées comme étant le résultat de deux opérations de rotation. Une rotation autour de l'axe \mathbf{z}'_1 et une autour de l'axe \mathbf{z}'_2 avec des angles qui sont les produits de l'énergie $\varepsilon(\mathbf{p})$ (>0) par le temps t et de l'impulsion \mathbf{p} par le vecteur position \mathbf{r} . En effet :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}'_1(\chi=0)} \left(+2\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar \right) |+\rangle_{I(\chi=0)} = e^{-i\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar} |+\rangle_{I(\chi=0)} \quad (21)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}'_2} \left(-2\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar \right) |+\rangle_{II} = e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar)} |+\rangle_{II} \quad (22)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}'_1(\chi=\pi)} \left(+2\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar \right) |+\rangle_{I(\chi=\pi)} = e^{-i\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar} |+\rangle_{I(\chi=\pi)} \quad (23)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}'_2} \left(+2\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar \right) |-\rangle_{II} = e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar)} |-\rangle_{II} . \quad (24)$$

Notons que \mathbf{z}'_2 et \mathbf{p} sont des vecteurs qui pointent dans la même direction. Il suffit pour le voir de comparer (12) ci-dessus avec l'éq. (12) de l'article. Les produits vectoriels \otimes des opérations de rotation sur ces états nous redonnent les résultats en (20) ci-dessus :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{z}'_1(\chi=0)} \left(+2\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar \right) |+\rangle_{I(\chi=0)} \otimes \mathbf{R}_{\mathbf{z}'_2} \left(-2\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar \right) |+\rangle_{II} \\ = e^{-i(\varepsilon(\mathbf{p})t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/\hbar} |+\rangle_{I(\chi=0)} |+\rangle_{II} = \Phi_{+,R,\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{z}'_1(\chi=\pi)} \left(+2\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar \right) |+\rangle_{I(\chi=\pi)} \otimes \mathbf{R}_{\mathbf{z}'_2} \left(+2\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar \right) |-\rangle_{II} \\ = e^{-i(\varepsilon(\mathbf{p})t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/\hbar} |+\rangle_{I(\chi=\pi)} |-\rangle_{II} = \Phi_{+,L,\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) . \end{aligned} \quad (26)$$

Nous pouvons également vérifier que :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}'_1(\chi=0)} \left(+2\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar \right) |-\rangle_{I(\chi=0)} = e^{i\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar} |-\rangle_{I(\chi=0)} . \quad (27)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}'_1(\chi=\pi)} \left(+2\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar \right) |-\rangle_{I(\chi=\pi)} = e^{i\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar} |-\rangle_{I(\chi=\pi)} . \quad (28)$$

Les produits vectoriels des opérations de rotation nous redonnent les résultats en (20) :

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_{\mathbf{z}'_1(\chi=0)} \left(+ 2\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar \right) |-\rangle_{I(\chi=0)} \otimes \mathbf{R}_{\mathbf{z}'_2} \left(- 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar \right) |+\rangle_{II} \\ & = e^{i(\varepsilon(\mathbf{p})t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar} |-\rangle_{I(\chi=0)} |+\rangle_{II} = \Phi_{-,R,\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_{\mathbf{z}'_1(\chi=\pi)} \left(+ 2\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar \right) |-\rangle_{I(\chi=\pi)} \otimes \mathbf{R}_{\mathbf{z}'_2} \left(+ 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar \right) |-\rangle_{II} \\ & = e^{i(\varepsilon(\mathbf{p})t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar} |-\rangle_{I(\chi=\pi)} |-\rangle_{II} = \Phi_{-,L,\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) . \end{aligned} \quad (30)$$

À la lumière des résultats précédents on peut dire que l'axe de rotation \mathbf{z}'_1 est "l'axe de temps" puisque les opérations de rotation autour de cet axe font intervenir la variable de temps t. Notons que lorsque $\mathbf{p} = 0$, $\varepsilon(\mathbf{p}) = mc^2$ (i.e. la masse au repos) et $\mathbf{z}'_1 = \mathbf{z}_1$. Par suite t devrait être égal à τ ; le temps propre. Ainsi \mathbf{z}'_1 est l'axe de temps t où la particule est en mouvement et \mathbf{z}_1 est l'axe de temps τ où elle est au repos.

2 Hélicité temporelle.

Dans ce qui suit nous allons nous attarder qu'aux spineurs $|\eta\rangle_{I(\chi=0,\pi)}$ et aux opérations de rotation autour de leurs axes associés à savoir les axes temporels $\mathbf{z}'_1(\chi=0,\pi)$. Pour commencer considérons uniquement les spineurs à masse +m (i.e.

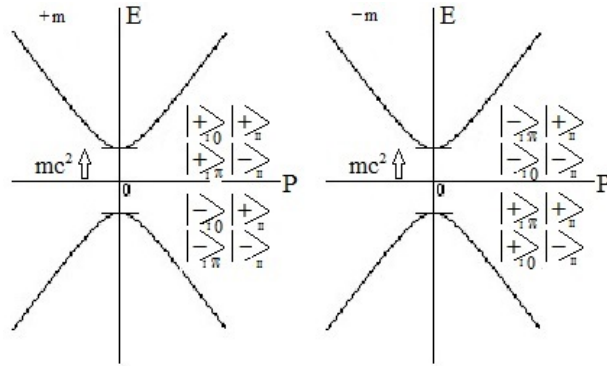


FIGURE 2 – Reproduction de la figure 1 de l'article.

bandes E vs P, à gauche sur la fig. 2). On reconnaît près de ces dernières les spineurs qui apparaissent en (21) et (23) qui sont indiqués au-dessus de $E = 0$ parce que leur énergie est positive et ceux en (27) et (28) qui sont indiqués sous $E = 0$ parce que leur énergie est négative. Afin d'illustrer graphiquement les choses

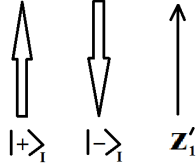


FIGURE 3 – On identifie une flèche pointant vers le “haut” au spineur $|+\rangle_{I(\chi=0,\pi)}$ et une flèche vers le “bas” au spineur $|-\rangle_{I(\chi=0,\pi)}$. “Bas” et “haut” font référence à l’orientation de l’axe \mathbf{z}'_1 . “Haut” signifie de même orientation que \mathbf{z}'_1 et “bas” d’orientation opposé.

imaginons que l’on se donne pour règle d’identifier ces spineurs à des flèches telque représenté en figure 3.

Considérons l’éq. (21) (ou (23)). Nous l’avons représentée graphiquement en figure 4. Cette dernière représente graphiquement l’action de l’opération de rotation sur un spineur “haut” à différents temps. On retrouve la même opération de rotation dans le membre de gauche de l’équation (27) (ou (28)). La figure 5 montre l’action de cette même opération de rotation mais sur un spineur “bas”. La seule chose qui change entre (21) et (27) (entre les figures 4 et 5) c’est le spineur et le facteur de phase à droite de ces égalités. Le signe de la phase est inversé. On peut interpréter ce changement de signe de la façon suivante. Considérons par exemple l’équation (27). On peut la réécrire comme suit :

$$\mathbf{R}_{-\mathbf{z}'_1(\chi=0)} \left(-2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p})t/\hbar \right) |-\rangle_{I(\chi=0)} = e^{i\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p})t/\hbar} |-\rangle_{I(\chi=0)} . \quad (31)$$

On constate alors qu’en disposant l’axe de rotation dans la direction $-\mathbf{z}'_1$ soit la même orientation que le spineur $|-\rangle_I$ (i.e. flèche vers le bas), l’angle de rotation apparaît alors de sens opposé c’est-à-dire négatif (i.e. vis gauche). En d’autres mots, le changement de signe de la phase indique un sens de rotation opposé résultant du fait que l’on “regarde” dans une direction opposée à \mathbf{z}'_1 (i.e. $-\mathbf{z}'_1$) tout en gardant le même sens de progression des n (i.e. vers les $n > 0$). Toutefois si on change le signe du temps dans (31) on obtient :

$$\mathbf{R}_{-\mathbf{z}'_1(\chi=0)} \left(2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p})t/\hbar \right) |-\rangle_{I(\chi=0)} = e^{-i\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p})t/\hbar} |-\rangle_{I(\chi=0)} . \quad (32)$$

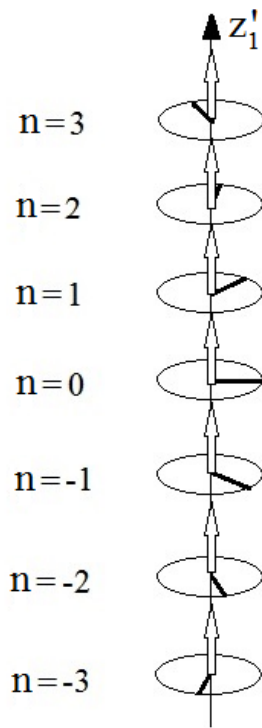


FIGURE 4 – Représentation graphique de l'éq. (21) ou (23). L'indice n donne différente valeur de temps t . Le segment de droite noir est là pour indiquer la rotation subit par le spineur. Il est déterminé par le facteur de phase à droite de l'égalité en (21) ou (23). Ce segment tourne dans un plan complexe normal à l'axe de rotation \mathbf{z}'_1 . Dans le cas présent il s'agit d'une rotation droite (i.e. vis droite). L'angle entre deux valeurs consécutives de n est constant. Cet angle est positif et est proportionnel à $2\varepsilon(\mathbf{p})/\hbar$. Notons que le spineur pointe dans le même sens que le sens positif du temps (i.e. $n > 0$).

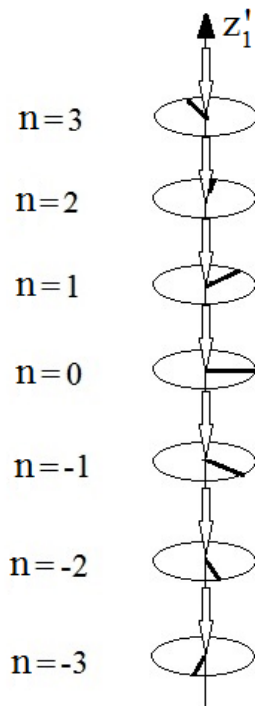


FIGURE 5 – Représentation graphique de l'éq. (27) ou (28). Par rapport à la figure 4 rien n 'a changé sauf l'orientation du spineur. Notons que le spineur pointe dans le sens opposé au sens positif du temps (i.e. $n > 0$).

Ceci veut dire que le temps progresse vers les t (ou n) négatifs. Sur la figure 6 on voit qu'une progression vers le n négatifs implique une rotation droite (i.e. vis droite). Dans (32) énergie et temps sont de signe négatif mais la rotation demeure droite comme en figure 4 où énergie et temps sont positifs. De ce fait on est tenté de dire que l'orientation du spineur dicte le sens de progression du temps. La situation décrite par l'éq. (31) où la progression du temps est opposée à celle du spineur ne décrit pas une situation physique puisqu'elle dépend du point de vue de l'observateur (i.e. de comment il "regarde").

L'éq. (32) ou figure 6 correspond précisément au spineur $|-\rangle_{I(\chi=0,\pi)}$ de la bande E vs P au-dessus de $E=0$ dans le cas où la masse est $-m$ (i.e. bandes à droite sur la figure 2). En effet, les solutions stationnaires qui découlent des équations (42) et (44) de l'article pour le cas d'une masse $-m$ sont :

$$\Theta_{j,S,\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \theta_{j,S,\mathbf{p}} e^{-i(j\varepsilon(\mathbf{p})t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar} . \quad (33)$$

Or on peut vérifier que :

$$\mathbf{R}_{-\mathbf{z}'_1(\chi=0)} \left(+ 2\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar \right) |-\rangle_{I(\chi=0)} = e^{-i\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar} |-\rangle_{I(\chi=0)} , \quad (34)$$

$$\mathbf{R}_{-\mathbf{z}'_1(\chi=\pi)} \left(+ 2\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar \right) |-\rangle_{I(\chi=\pi)} = e^{-i\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar} |-\rangle_{I(\chi=\pi)} , \quad (35)$$

de sorte que les produits vectoriels des opérations de rotation nous redonnent les résultats en (33) :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{-\mathbf{z}'_1(\chi=\pi)} \left(+ 2\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar \right) |-\rangle_{I(\chi=\pi)} \otimes \mathbf{R}_{\mathbf{z}'_2} \left(- 2\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar \right) |+\rangle_{II} \\ = e^{-i(\varepsilon(\mathbf{p})t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar} |-\rangle_{I(\chi=\pi)} |+\rangle_{II} = \Theta_{-,R,\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{-\mathbf{z}'_1(\chi=0)} \left(+ 2\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar \right) |-\rangle_{I(\chi=0)} \otimes \mathbf{R}_{\mathbf{z}'_2} \left(+ 2\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar \right) |-\rangle_{II} \\ = e^{-i(\varepsilon(\mathbf{p})t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar} |-\rangle_{I(\chi=0)} |-\rangle_{II} = \Theta_{-,L,\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) . \end{aligned} \quad (37)$$

La figure 7 résume en image ce que signifie inverser la masse tel que nous l'avons décrite dans l'article à l'aide d'un potentiel magnétique. Le spin et l'impulsion sont conservés dans ce cas de figure. Ce qui change c'est le spineur temporel.

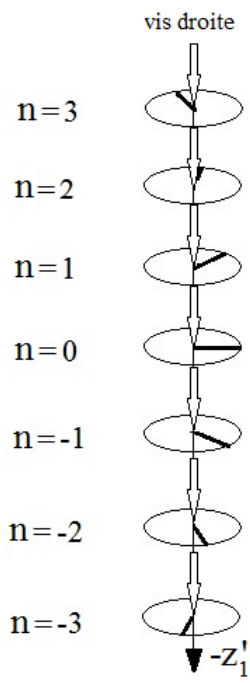


FIGURE 6 – Représentation graphique de l'éq. (32) en progressant vers les n négatifs. Par rapport à la figure 5 rien n'a changé. On a simplement indiqué le sens de $-z_1'$.

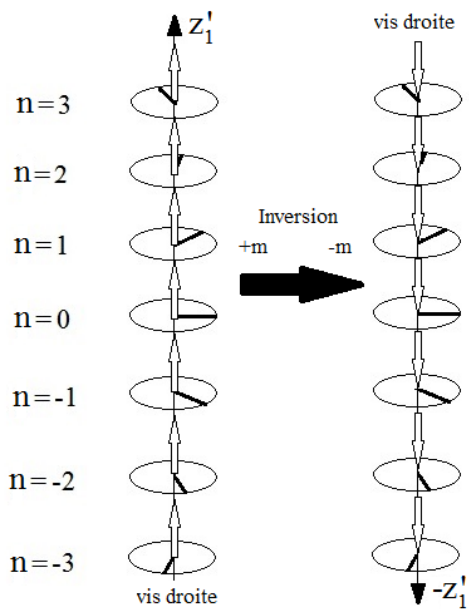


FIGURE 7 – Inverser la masse implique une inversion unitaire du temps (voir annexe 2) ce qui s’accompagne de l’inversion de l’énergie et du spineur temporel. Nous avons ici rassemblé les figures 4 et 6. Pour $+m$ le temps progresse vers les $n > 0$ alors que pour $-m$ il progresse vers les $n < 0$.

Dans ce qui précède nous nous sommes limité aux vis droites. Mais pourquoi n'y aurait-il pas des vis gauches (voir figures 7 et 8) et à quoi peuvent-elles correspondre ? À des anti-particules au sens habituel du terme c'est-à-dire des particules de même masse mais de charges électriques opposées ? La question demeure. Si toutefois c'est le cas alors l'inversion de masse (figure 7) n'inverse pas la charge.

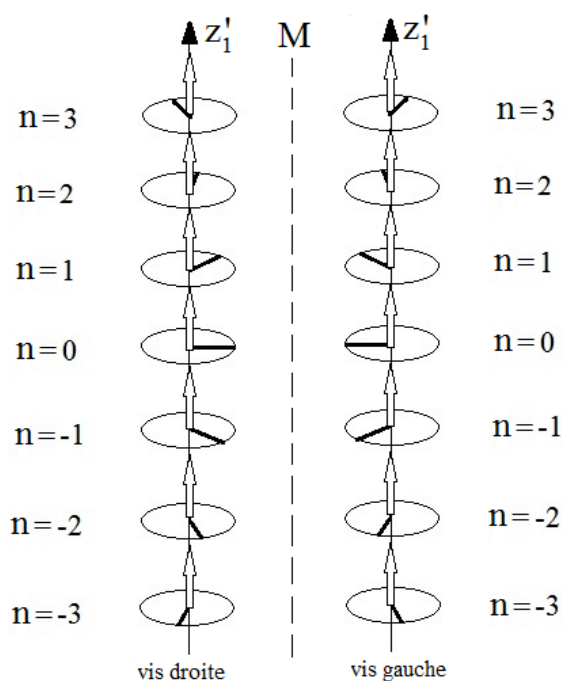


FIGURE 8 – Les spineurs de la figure 4 (à gauche) avec leur image (à droite) dans le miroir M. Dans le miroir la vis devient gauche. Dans les deux cas la progression est vers les $n > 0$, temps positif.

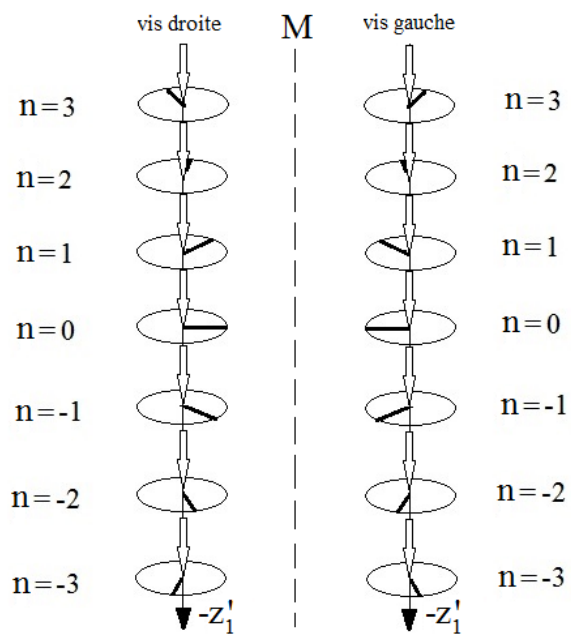


FIGURE 9 – Les spineurs de la figure 6 (à gauche) avec leur image (à droite) dans le miroir M. Dans le miroir la vis devient gauche. Dans les deux cas la progression est vers les $n < 0$, temps négatif.

Références

- [1] Servant, B., “Les Ibozoo uu... des bi-spineurs?”, 19 janv. 2018 , bservant05.blogspot.com.