MTS 211 A : Éléments de traitement numérique du signal

UV CR A-MTS : Traitement du signal et de l'information

Polycopiés (cours, exercices, TP)

Septembre 2018

Responsable module : Laurent Lecornu (K1 103)

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

Nom	Date	Description	version
Laurent Lecornu (rédacteur-auteur)	Février 2004	Polycopié	0
Dominique Leroux (correcteur)	Février 2004	Polycopié corrigé	0
Dominique Leroux – Laurent Lecornu	Septembre 2004	Corrections	0.5
Dominique Leroux – Laurent Lecornu	Février 2004	Corrections	0.6
Dominique Leroux- Laurent Lecornu	Septembre 2009	Modifications PC/TP	0.7
Dominique Leroux-Laurent Lecornu	Septembre 2011	Modifications	1
Dominique Leroux	Juillet 2013	Mise à jour poly	2
Laurent Lecornu	Juillet 2017	Mise à jour poly	3
Laurent Lecornu	Août 2018	Mise à jour poly	3.1

Fiche programme

Présentation :

Le traitement numérique du signal consiste en un ensemble de théories et de méthodes, relativement indépendantes du signal traité, permettant de créer, d'analyser, de modifier, de classifier, et finalement de reconnaître les signaux.

Le signal numérique n'existe pas dans la nature. C'est un outil mathématique, qui a pour but principal de permettre une manipulation aisée des signaux analogiques à l'aide de calculateurs numériques. Ses applications sont nombreuses et apparaissent dans tous les domaines où des signaux sont observés puis étudiés. Parmi les domaines d'application classiques, on peut citer comme exemples les télécommunications, le traitement de la parole, le radar, le sonar, l'ingénierie biomédicale et l'imagerie.

Objectif :

A l'issue de ce module, l'étudiant sera capable :

- d'utiliser les outils mathématiques nécessaires à l'étude des signaux numériques (série de Fourier, transformées de Fourier et de Laplace, transformée en Z),
- d'analyser un signal (1D, 2D) à partir de ses représentations temporelles et fréquentielles,
- d'analyser le comportement des filtres (stabilité, réponse fréquentielle, réponse à un signal donné),
- d'effectuer la synthèse des filtres numériques.

Prérequis : signaux & filtrage analogiques

Volume horaire : 21 heures

Organisation :

- C1 - Introduction, échantillonnage des signaux, théorème de Shannon
- PC1 - Échantillonnage et convolution
- C2 - Signaux et systèmes discrets, transformation en Z, lien avec les autres transformations (Laplace, Fourier)
- C3 : Stabilité des filtres, structures des filtres
- PC2 – Convolution et étude d'un filtre
- TP1 – étude et analyse des signaux et filtres discrets
- C4 - Transformées de Fourier discrète, série de Fourier
- PC3 – TFD et lien entre les coefficients de la TFD
- C5, C6 - Filtres RIF et RII
- PC4 - Synthèse de filtre
- TP2 – Filtrage numérique

Évaluation :

- Contrôle continu : Prédétermination (4/5) et Compte-rendu du TP (1/5), QCM (possible).
- Contrôle semestriel

Table des matières

Table des matières 1
Table des tableaux 3
Introduction 4
Chapitre 1 : Échantillonnage d'un signal à temps continu 6
1.1 Théorème d'échantillonnage 6
1.2 Limites du théorème d'échantillonnage 11
1.3 La quantification 13
1.4 De l'acquisition à la reconstruction 15
1.5 Petite Classe 1 : Échantillonnage – Convolution 16
Chapitre 2 : Signaux et systèmes discrets 17
2.1 Signaux discrets 17
2.2 Systèmes linéaires stationnaires discrets (filtre) ou systèmes linéaires temporellement invariants (SLTI) 19
2.3 Produit de convolution linéaire discret 21
2.4 Stabilité des filtres discrets 25
2.5 Représentation fréquentielle 25
Chapitre 3 : La transformée en Z 27
3.1 Définition des transformées de Laplace, en Z et de Fourier discrète 27
3.2 Propriétés de la transformation en Z 30
3.3 Transformées en Z rationnelles 33
3.4 Réponse à une entrée quelconque 34
3.5 Transformation inverse 35
3.6 Transformée en *Z* d'un produit 38
3.7 Transformées usuelles 39
3.8 Exemple : filtre récursif du premier ordre 40
Petite Classe 2 : Transformée en Z – Equation de filtrage 42
Chapitre 4 : La transformée de Fourier discrète 43
4.1 Transformée de Fourier d'un signal discret 43
4.2 Transformation de Fourier discrète d'un signal discret périodique 44
4.3 Transformation de Fourier discrète d'un signal discret NON périodique 48
4.4 Transformée de Fourier Rapide (TFR ou FFT) 52
Chapitre 5 : Relations entre signaux continus et échantillonnés 53
5.1 Relations entre transformée en *Z* et transformée de Laplace 53
5.2 Mise en cascade de systèmes échantillonnés 55
5.3 Reconstruction d'un signal continu 56
Chapitre 6 : Filtrage Numérique 59
6.1 Introduction 59
6.2 Représentation d'un filtre numérique 59
6.3 Spécification d'un filtre numérique 61
6.4 Classification des filtres numériques 64
6.5 Résumé des types de filtres numériques causaux 65
6.6 Structure des filtres RII et RIF 65
6.7 Autres structures 68
6.8 Petite classe 3 : Transformée de Fourier Discrète et filtres numériques 69
Chapitre 7 : Synthèse des filtres RII 71
7.1 Rappel Filtrage analogique 71
7.2 Méthode de l'invariance impulsionnelle 72
7.3 Méthode par transformation d'Euler 74
7.4 Méthode par transformation bilinéaire 75
Chapitre 8 : Synthèse des filtres RIF 79
8.1 Introduction 79
8.2 Méthode de la fenêtre 79
8.3 Application de la TFD à la synthèse de filtres non récursifs 82
8.4 Filtres à phase linéaire 82
8.5 Petite Classe 4 : Synthèse de filtre 87
Bibliographie 89

Table des figures

Figure 1 : Exemple d'échantillonnage d'un signal 6
Figure 2 : De gauche à droite : distribution de Dirac, peigne de Dirac et échelon unité 7
Figure 3 : Spectre du signal continu 9
Figure 4 : Spectre du signal échantillonné (à gauche $\nu 0$= 20 kHz et à droite $\nu 0$=10 kHz) 9
Figure 5 : Spectre d'un signal discret (sans repliement) 9
Figure 6 : Reconstruction de $s(t)$ à partir de $s_e(t)$ 10
Figure 7 : Exemple de phénomène de Gibbs 11
Figure 8 : Échantillonneur moyenneur 12
Figure 9 : Spectre du signal échantillonné par un échantillonneur moyenneur 12
Figure 10 : Échantillonneur bloqueur 13
Figure 11 : Spectre du signal échantillonné par un échantillonneur bloqueur 13
Figure 12 : Exemple de quantificateur uniforme 14
Figure 13 : Signal numérisé 14
Figure 14 : Chaîne complète de traitement 15
Figure 15 : Classification des signaux 18
Figure 16 : De gauche à droite : signaux continus, discret et numérique 18
Figure 17 : Exemple de système discret 20
Figure 18 : Réponse du filtre à une distribution de Dirac 21
Figure 19 : Réponse à une impulsion 22
Figure 20 : Réponse à un signal quelconque 22
Figure 21 : Décomposition du produit de convolution 23
Figure 22 : Filtre récursif d'ordre 1 24
Figure 23 : Filtre discret 28
Figure 24 : Domaine de convergence 31
Figure 25 : Exemple de domaine de convergence 35
Figure 26 : Exemple de contour fermé 36
Figure 27 : Division polynomiale 37
Figure 28 : Filtre récursif du premier ordre 40
Figure 29 : Module et phase de la réponse fréquentielle pour $a0 = 1$ et $b1 = 0.4$ 41
Figure 30 : Signal discret périodique 45
Figure 31 : Périodicité de la *TFD* 46
Figure 32 : TFD d'un signal périodique 47
Figure 33 : TFD d'un signal à durée limitée 48
Figure 34 : Fenêtres de pondération 50
Figure 35 : Signal $\{x(n)\}$ 51
Figure 36 : TFD de $\{x(n)\}$ avec zéro-padding 51
Figure 37 : Pôles de $X(p)$ 53
Figure 38 : Pôles de $\frac{1}{1-e^{pT_0}z^{-1}}$ 54
Figure 39 : Système échantillonné 55
Figure 40 : Mise en cascade de systèmes échantillonnés 56
Figure 41 : Cas où seul deux échantillonneurs sont présents 56
Figure 42 : Reconstruction du signal au moyen d'un bloqueur d'ordre 0 56
Figure 43 : Bloqueur commandant un système continu 57
Figure 44 : Schéma équivalent 57
Figure 45 : Introduction d'un échantillonneur 57
Figure 46 : Schéma dans le domaine en Z 57
Figure 47 : Exemple de filtrage 59
Figure 48 : Forme directe 60
Figure 49 : Forme parallèle 60
Figure 50 : Forme cascade ou série 61
Figure 51 : Réponses fréquentielles idéales 62
Figure 52 : Gabarit fréquentiel d'un filtre passe-bas 63
Figure 53 : Gabarit fréquentiel linéaire d'un filtre passe-bande 63
Figure 54 : Structures des filtres RIF 66
Figure 55 : Structures des filtres RIF 67
Figure 56 : Structures canoniques des filtres RII 67

Figure 57 : Structure cascade 68
Figure 58 : Structure parallèle 68
Figure 59 : Méthodologie de synthèse de filtres analogiques et numériques 71
Figure 60 : Equivalence filtres analogique/numérique 72
Figure 61 : Réponse fréquentielle ne respectant pas le théorème d'échantillonnage 73
Figure 62 : Filtres analogique (trait discontinu) et discret (trait continu) 77
Figure 63 : De gauche à droite : réponses fréquentielles du filtre recherché, de la fenêtre de pondération et du filtre synthétisé 80
Figure 64 : Filtres synthétisé et idéal 81
Figure 65 : Filtre passe-bas idéal 81
Figure 66 : Synthèse par FFT avec fenêtrage rectangulaire pour 2 valeurs de *N* 82
Figure 67 : Exemple de RI de filtre à phase linéaire pour *b* = 0 83
Figure 68 : Exemple de RI de filtre à phase linéaire pour $b = \pm \pi/2$ 84
Figure 69 : Filtre à phase linéaire ➔ retard constant 84
Figure 70 : Exemple des 4 types de filtres RIF à phase linéaire 86
Figure 71 : Exemple des 4 types de filtres RIF à phase linéaire 86

Table des tableaux

Tableau 1 : Exemple de table de codage binaire 15
Tableau 2 : Transformées en Z et opérations usuelles 40
Tableau 3 : Tableau des transformées de Fourier discrètes usuelles 44
Tableau 4 : Comparaison des fenêtres 50
Tableau 5 : Paramètres de spécification d'un filtre numérique 64
Tableau 6 : Caractérisation des filtres numériques causaux 65
Tableau 7 : Fonction de dénormalisation $f(p)$ 72
Tableau 8 : Principales relations entre *H(z)* et *H(p)* 74
Tableau 9 : Caractéristiques des fenêtres de pondération 80

Introduction

Avant de parler de traitement de signaux numériques, il est intéressant de rappeler ce qu'est un signal.

Signal

Un signal est une *variation* d'une grandeur physique qui porte de *l'information*.

On classe souvent les signaux en fonction de leur origine. On trouve ainsi :

- Les signaux de télécommunications, qui transportent l'information, le plus souvent aujourd'hui sous forme numérique. Ces signaux sont les plus simples à étudier car ils ont été conçus par des ingénieurs. Et de ce fait, ils présentent des propriétés connues qui facilitent la compréhension et la définition des opérations de modulation, de démodulation, etc.
- Les signaux géophysiques, tels que l'évolution de la température, de la pression, de la vitesse d'écoulement de fluides terrestres, les signaux acoustiques, les ondes de vibration de l'écorce terrestre. Un cas particulier très important est l'image, variation de luminosité et de couleur perçue par l'appareil photographique ou la caméra numériques qui aujourd'hui, sont de plus en plus nombreux.
- Les signaux cosmiques, tels les ondes captées par les radiotélescopes.
- Les signaux biologiques, mesurés à divers endroits du corps humain et renseignant sur son fonctionnement. On peut citer, par exemple, l'électrocardiogramme, l'électro-encéphalogramme. Le traitement et l'analyse de tels signaux sont effectués par ordinateur sur un signal numérique.
- Les signaux de communication interpersonnelle, telle la parole ou l'écriture. A l'extrême opposé des signaux de télécommunications, ces signaux réalisent une modulation très complexe de l'information qu'ils portent. Le modulateur et le démodulateur sont en effet un cerveau humain.

On peut également classer les signaux en fonction de leur dimension. Ainsi, la plupart des signaux ci-dessus sont représentables mathématiquement par des fonctions d'une seule variable réelle. On les appelle donc signaux *monodimensionnels.* L'image, au contraire, est un signal *bidimensionnel*.

Il est également fréquent de classer les signaux en fonction de la connaissance que l'on peut en avoir. Bien que tous les signaux soient par essence déterministes (ils sont tous créés par des causes physiques précises, bien que parfois non mesurables), en général le qualificatif de *déterministe* est réservé pour les signaux dont on peut expliquer l'allure temporelle. Les autres signaux sont qualifiés d'*aléatoires.*

La plupart de ces signaux sont *analogiques* : ils peuvent être décrits par une fonction continue de la variable temporelle *t* et peuvent prendre *a priori* n'importe quelle valeur réelle. A l'origine, les machines permettant de créer ou de modifier ces signaux, ont longtemps été analogiques pour des raisons principalement technologiques. Néanmoins, depuis quelques décennies (tout au plus) avec le développement des puces électroniques, on dispose de circuits électroniques CAN (Convertisseurs Analogique - Numérique) permettant d'*échantillonner* et de *quantifier* les signaux analogiques, les transformant ainsi en *signaux numériques.* Ces derniers sont caractérisés par le fait qu'ils ne sont définis qu'à des instants discrets et qu'ils ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs discrètes.

En pratique, les CAN sont inclus dans des capteurs sensibles aux grandeurs (puissance, énergie, intensité, …) à numériser et constituant l'instrument de mesure du signal. Bon nombre de capteurs sont en général des transducteurs c'est à dire qu'ils transforment la grandeur

physique étudiée (puissance, flux lumineux, son, …) en une autre grandeur physique (courant ou tension) plus aisée à traiter avec les outils modernes.

On dispose également de circuits CNA (Convertisseurs Numérique - Analogique) permettant de reconvertir un signal numérique en signal analogique.

Ce pont entre signal analogique et signal numérique a ouvert la voie vers la mise au point de traitements numériques du signal en utilisant des puces spécialisées numériques. On va s'intéresser particulièrement au passage entre signal analogique et signal numérique ainsi qu'aux traitements numériques que celui-ci peut subir.

Traitement numérique du signal

Le traitement numérique du signal consiste en un ensemble de théories et de méthodes, relativement indépendantes du signal traité, permettant de créer, d'analyser, de modifier, de classifier, et finalement de reconnaître les signaux.

Le signal numérique n'existe pas à l'état naturel. C'est une technologie, qui a pour but principal de permettre une manipulation aisée des signaux analogiques à l'aide de calculateurs numériques. Ses applications sont nombreuses et apparaissent dans tous les domaines.

On peut estimer que le traitement numérique a réellement vu le jour dans les années 60, avec la découverte d'algorithmes rapides de calcul de la transformée de Fourier discrète par Cooley et Tukey. Cependant, ce n'est que récemment que les applications pratiques se sont multipliées avec l'apparition des technologies numériques (RNIS, CD, GSM, DVD, MP3, etc.) et l'utilisation toujours plus importante de processeurs spécialisés en traitement du signal (DSP : digital signal processor).

Systèmes analogiques – Systèmes numériques / Avantages et Inconvénient

Les systèmes numériques possèdent sur leurs homologues analogiques un ensemble d'avantages décisifs :

- *Simplicité.* Les systèmes numériques sont intrinsèquement plus simples à analyser que les systèmes analogiques.
- *Possibilités de traitement accrues*. Non seulement, les opérations numériques de base sont simples mais il est possible de réaliser des opérations beaucoup plus complexes qu'en analogique, notamment des opérations non-linéaires.
- *Robustesse aux bruits.* Les systèmes numériques sont, par essence, insensibles aux bruits parasites.
- *Précision et stabilité.* La précision des calculs dépend uniquement du calculateur utilisé et la stabilité ne varie pas avec l'âge du système.
- *Flexibilité.* Dans un grand nombre de systèmes numériques, le traitement est défini par un logiciel chargé en mémoire. Il peut être remplacé par un autre traitement plus performant ou mieux adapté.

Chapitre 1 : Échantillonnage d'un signal à temps continu

La conversion d'un signal analogique sous sa forme numérique nécessite une double approximation. La première, dans l'espace temporel, remplace la fonction $s(t)$ par ses valeurs $s(nT_0)$ à des instants multiples entiers d'une durée T_0. Il s'agit de l'***opération d'échantillonnage***. La deuxième opération, dans l'espace des amplitudes consiste à remplacer chaque valeur de $s(nT_0)$ par une valeur à précision finie. Il s'agit de l'***opération quantification***.

L'objectif de ce chapitre est de présenter ces deux approximations.

Deux prérequis sont nécessaires : l'analyse de Fourier et la théorie des distributions.

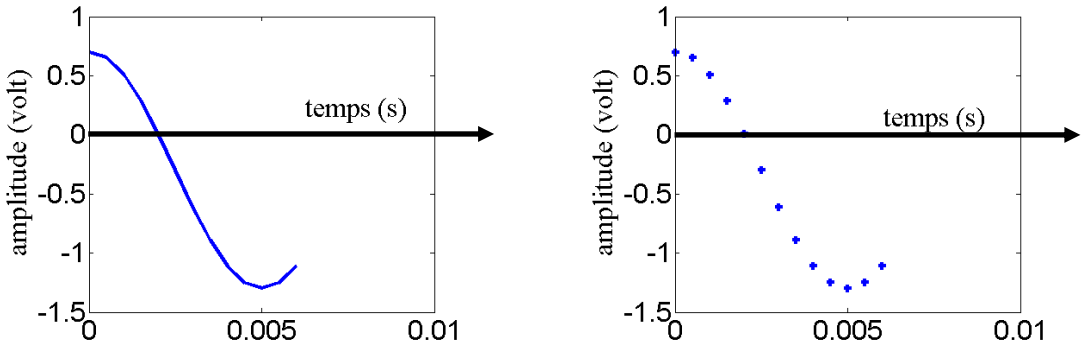
1.1 Théorème d'échantillonnage

1.1.1 Échantillonnage idéal

a) <u>Échantillonnage</u>

L'échantillonnage consiste à représenter un signal fonction du temps $s(t)$ par ses valeurs $s(nT_0)$ à des instants multiples entiers d'une durée T_0, appelée période d'échantillonnage. La fréquence d'échantillonnage ν_0 est alors égale à $\frac{1}{T_0}$ Hz.

Figure 1 : Exemple d'échantillonnage d'un signal



b) <u>Modèle mathématique</u>

Si un signal échantillonné peut être représenté par un tableau de valeurs, il est intéressant de pouvoir manipuler les signaux discrets de manière analytique et pour cela il est nécessaire d'utiliser la théorie des distributions de Laurent Schwartz. Cette théorie permet de modéliser les signaux périodiques et constitue un excellent outil pour l'étude globale des signaux discrets. Dans le cadre de ce cours, il n'est pas nécessaire de reprendre les détails de cette théorie développée dans le cours de mathématiques (TC101C Analyse Harmonique et distributions) mais simplement de rappeler les quelques résultats élémentaires qui nous intéressent.

Trois signaux fondamentaux seront utilisés :

- la distribution de Dirac $\delta(t)$
- le peigne de Dirac

$$\Pi_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$$

- L'échelon unité

$$u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$$

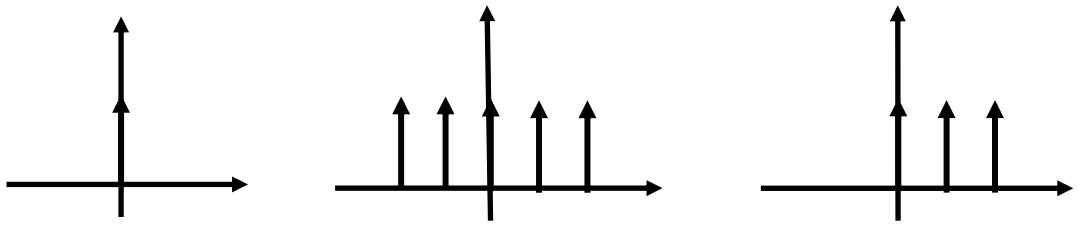


Figure 2 : De gauche à droite : distribution de Dirac, peigne de Dirac et échelon unité

Propriétés fondamentales de la distribution de Dirac :

- Parité : $\delta(t)= \delta(-t)$.
- Facteur d'échelle : $\delta(at) = (1/|a|)\delta(t)$ avec $a \in R$.
- Produit d'une fonction (distribution régulière) par la distribution de Dirac : $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$.
- Produit de convolution d'une fonction (ou d'une distribution) par la distribution de Dirac : $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$.
- Le produit de 2 distributions de Dirac n'existe pas : $\delta(t - t_1).\delta(t - t_2)$ n'a pas de sens. Le produit de convolution de 2 distributions existe en particulier : $x(t) * \delta(t - t_1) * \delta(t - t_0) = \delta(t - t_1 - t_0)$.
- Transformée de Fourier : $TF[\delta(t)] = 1$.
- Translation temporelle ~ déphasage fréquentiel : $TF[\delta(t - t_0)] = e^{-j2\pi\nu t_0}$.
- Déphasage temporelle ~ translation fréquentielle : $TF\left[e^{j2\pi\nu_0 t}\right] = \delta(\nu - \nu_0)$.

Propriété fondamentale du peigne de Dirac :

$$TF\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT_0)\right] = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\nu - \frac{k}{T_0}\right) = \nu_0\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\nu - k\nu_0)$$

Représentation des signaux périodiques :

$$s(t) = s_m(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nt_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_m(t - nt_0)$$

Où $s_m(t)$ est la fonction motif.

« Périodicité ~ convolution par un peigne de Dirac »

Représentation des signaux discrets et échantillonnés :

Par définition la modélisation d'un signal discret est effectuée par un peigne de Dirac pondéré par les échantillons du signal : $s_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_k \delta(t - nT_0)$.

Un signal échantillonné est un signal discret obtenu à partir d'un signal continu dont on prélève les valeurs à intervalles réguliers T_0 :

$$s_e(t) = s(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}s_k\delta(t-nT_0)$$

« Echantillonnage ~ produit simple par un peigne de Dirac »

c) <u>Analyse fréquentielle</u>

- La transformée de Fourier $S_d(\nu)$ du signal discret $s_d(t)$ est telle que :

$$S_d(\nu) = TF\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}s_n\delta(t-nT_0)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}s_n e^{-j2\pi n\nu T_0}$$ fonction périodique de période ν_0

- La transformée de Fourier $S_e(\nu)$ du signal échantillonné $s_e(t)$ est telle que :

$$S_e(\nu) = TF\left[s(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)\right] = S(\nu) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\nu-n\nu_0)$$

fonction périodique de période ν_0

On peut encore écrire : $S_e(\nu) = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}S(\nu-nT_0)$

Il est important de noter que la fonction $S_e(\nu)$ est périodique et que ***cette période est égale à la fréquence d'échantillonnage*** ν_0**.**

« Signal discret/échantillonné~ spectre périodique »

Il faut noter que les transformées de Fourier $S_d(\nu)$ et $S_e(\nu)$ modélisent le même signal et sont par conséquence égales d'où les relations connues sous le nom de ***formules de Poisson*** :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}S(\nu-k\nu_0) = T_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}s_k e^{-j2\pi n\nu T_0}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}s(t-kT_0) = 1/T_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}S_k e^{j2\pi nt/T_0}$$

L'exemple suivant illustre la différence entre la transformée de Fourier d'un signal continu et celles de ce même signal échantillonné suivant deux fréquences d'échantillonnage différentes.

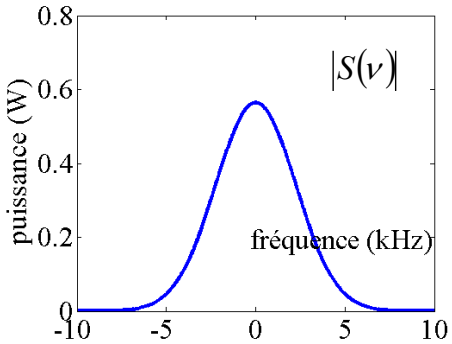


Figure 3 : Spectre du signal continu

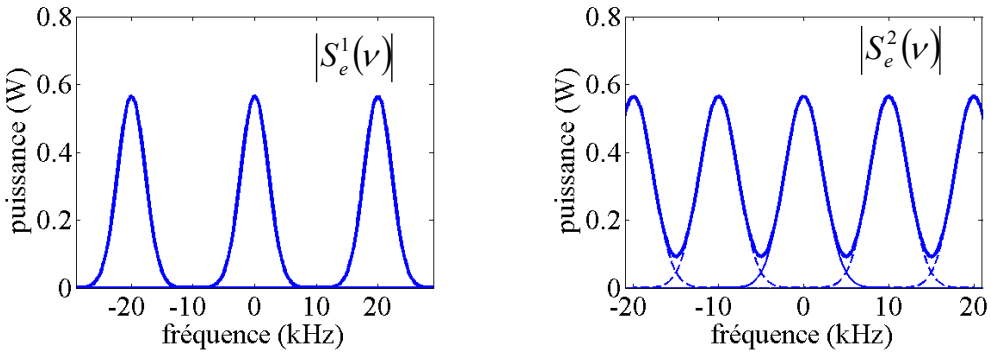


Figure 4 : Spectre du signal échantillonné (à gauche ν_0= 20 kHz et à droite ν_0=10 kHz)

Lorsque la fréquence d'échantillonnage est suffisamment grande, le spectre du signal échantillonné correspond à une périodisation du spectre du signal continu tandis que dans le cas contraire le spectre est différent.

Dans ce dernier cas, l'échantillonnage provoque une déformation du spectre appelée ***repliement*** ou ***aliasing***.

1.1.2 Reconstruction de *s*(*t*) à partir de $s_e(t)$: Théorème de SHANNON

Il existe un cas où il est possible de reconstruire *s(t)* à partir de $s_e(t)$: si $S(\nu)$ a un support limité à $]-\nu_M, +\nu_M[$ avec $\nu_M \leq \nu_0/2$, l'échantillonnage n'entraîne pas de déformation du spectre continu, mais seulement une périodisation.

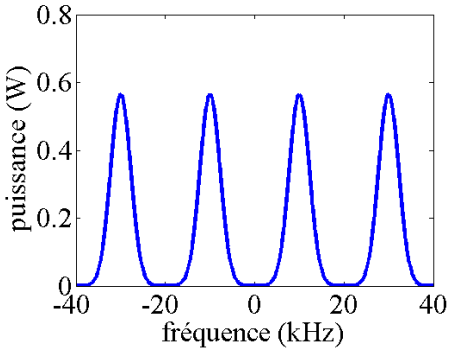


Figure 5 : Spectre d'un signal discret (sans repliement)

On appelle ν_N la fréquence limite d'échantillonnage ou encore ***fréquence de Nyquist***. Avant d'échantillonner un signal, il faut s'assurer que celui-ci possède une bande limitée. Ceci est le plus souvent validé par un filtrage analogique (filtre passe-bas ou filtre anti-repliement). Une fois cette opération effectuée, une fréquence d'échantillonnage adaptée peut être déterminée ce qui permettra d'effectuer une reconstruction parfaite.

- **Reconstruction :**

Pour obtenir *s(t)* à partir de $s_e(t)$, le signal $s_e(t)$ est filtré par un filtre passe-bas idéal $C(\nu)$ qui permet de récupérer le spectre à l'intérieur de la bande $\left[-\frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0}{2}\right[$

$$S(\upsilon)=C(\upsilon)S_e(\upsilon) \text{ avec } C(\nu)=\begin{cases} T_0 & \text{si } |\nu|\le \nu_1 \\ 0 & \text{si } |\nu|>\nu_1 \end{cases} \text{ pour } \nu_1 \le \frac{\nu_0}{2}$$

Or $TF^{-1}[C(\nu)]=c(t)=\left(\frac{T_0}{\pi t}\right)\sin(2\pi\nu_1 t)$

On a alors :

$$TF[C(\nu)\cdot S(\nu)] = s_e(t) * c(t)$$
$$= \frac{T_0}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_0)\frac{\sin 2\pi\nu_1(t-nT_0)}{t-nT_0}$$

Et en prenant $\nu_1 = \frac{\nu_0}{2} = \frac{1}{2T_0}$

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_0)\sin_c\left(\frac{\pi}{T_0}(t-nT_0)\right)$$

Cette expression permet de reconstruire exactement *s(t)* à partir des échantillons : c'est ***une interpolation idéale.***

Cette formule est intéressante à double titre :

Elle se met sous la forme $s(t)=\sum_k C_k\phi_k(t)$

Il s'agit donc de la décomposition du signal continu *s(t)* sur une base (de dimension infinie $\phi_k(t)$, le C_k étant les coordonnées du signal dans l'espace engendré par cette base.

- De plus, les coefficients de cette décomposition sont, dans ce cas, les échantillons du signal *s(t)*.

Il existe d'autres décompositions de signaux (par exemple, pour un signal périodique, le développement en série de Fourier) pour lesquelles les coefficients de la décomposition sont des scalaires qui ne sont pas les échantillons du signal.

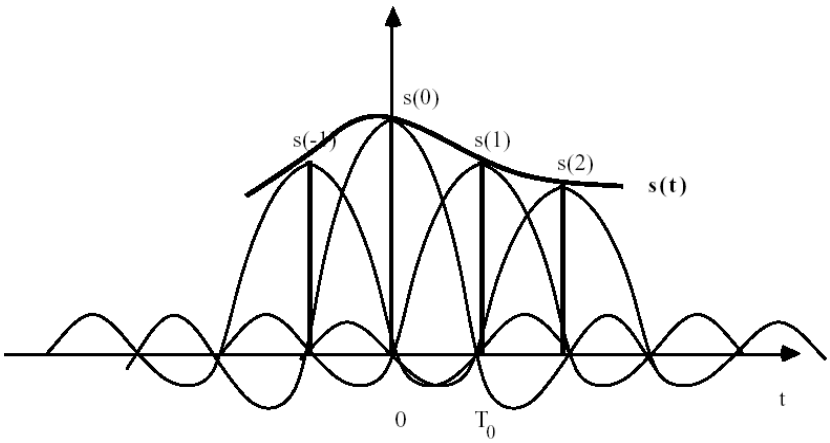


Figure 6 : Reconstruction de *s*(*t*) à partir de $s_e(t)$

Le résultat obtenu est connu sous le nom de théorème de Shannon-Nyquist.

Théorème de Shannon-Nyquist

Un signal continu *s(t)* à spectre borné $]-\nu_M, +\nu_M[$ est entièrement connu par une suite infinie d'échantillons $s(nT_0)$ de *s(t)* si la période d'échantillonnage T_0 est inférieure ou égale $T_M = \dfrac{1}{2\nu_M}$.

Phénomène de Gibbs

La figure suivante illustre le phénomène de Gibbs lié à l'interpolation d'un signal présentant des discontinuités. Le principal défaut apparaît au niveau de la discontinuité. La reconstruction du signal est effectuée en prenant successivement 3, 5, 11, 31 coefficients de la transformée de Fourier

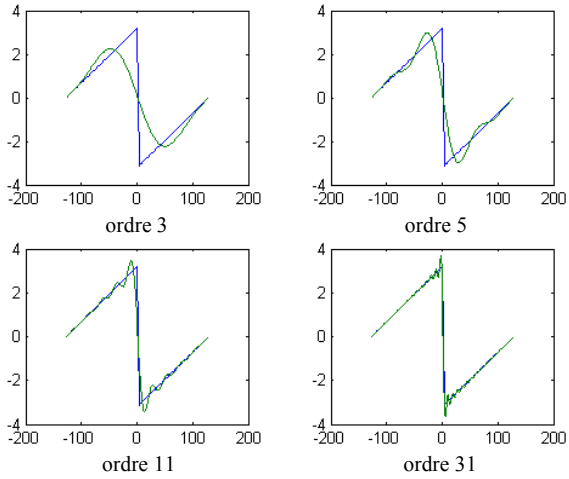


Figure 7 : Exemple de phénomène de Gibbs

1.2 Limites du théorème d'échantillonnage

1.2.1 Filtres anti-repliements

Dans le cas où le spectre du signal à échantillonner n'est pas connu ou lorsque la fréquence d'échantillonnage est imposée, un préfiltrage du signal continu, avant la phase d'échantillonnage est indispensable. Il s'agit du ***filtrage anti-repliement*** ou ***antialiasing*** qui n'est autre qu'un filtrage passe-bas.

1.2.2 Échantillonneur moyenneur

L'échantillonnage par un peigne de Dirac n'est pas réalisable pratiquement, on utilise alors des techniques qui s'en approchent le plus possible et qui permettent de réaliser des circuits de complexité limitée. L'échantillonneur moyenneur est l'une de ces techniques. Il s'agit là d'effectuer un échantillonnage à l'aide d'une fenêtre analogique, s'ouvrant un court instant τ et laissant passer (mémoriser) le signal *s(t)* pendant cette durée.

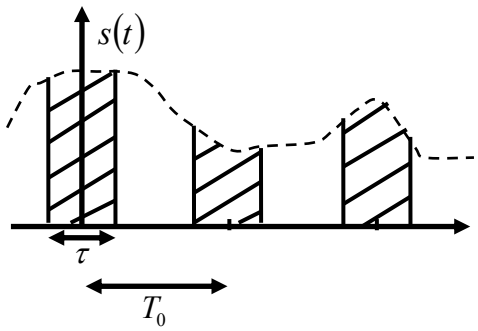


Figure 8 : Échantillonneur moyenneur

La valeur de l'échantillon $s(kT_0)$ est obtenue en prenant la moyenne du signal sur la durée τ : $s(kT_0) = \frac{1}{\tau}\int_{kT_0-\frac{\tau}{2}}^{kT_0+\frac{\tau}{2}} s(t)\,dt$

L'allure du spectre est obtenue à partir de l'expression :

$$s_{em}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_0)\delta(t - kT_0)$$

$$s_{em}(t) = \left(s(t) * p_\tau(t)\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

Avec : $p_\tau(t)$ fenêtre rectangulaire de durée τ.

Soit :

$$S_{em}(\nu) = \left(S(\nu)P_\tau(\nu)\right) * \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - k\nu_0)$$

Avec $S_{em}(\nu) = \frac{1}{T_0}\sum_{-\infty}^{+\infty} P_\tau(\nu - k\nu_0)S(\nu - k\nu_0)$

Une interprétation de ce résultat est donnée par :

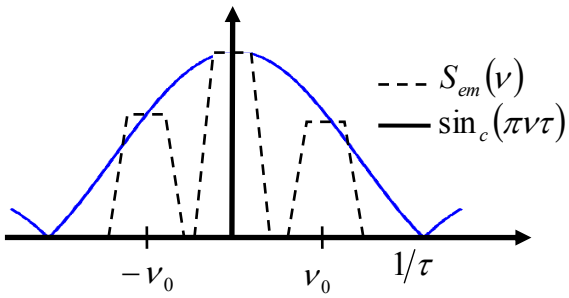


Figure 9 : Spectre du signal échantillonné par un échantillonneur moyenneur

1.2.3 Échantillonneur bloqueur

Une seconde technique consiste à utiliser un échantillonneur bloqueur. Il s'agit là d'effectuer un échantillonnage en bloquant le signal s(t) pendant une durée τ.

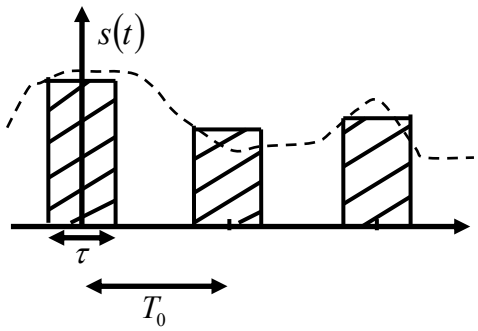


Figure 10 : Échantillonneur bloqueur

Bloqueur d'ordre 0 (interpolateur)

Il correspond au cas utilisé en pratique pour les CAN du commerce $\tau = T_0$, et $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_0} = \nu_0$ l'expression du spectre du signal échantillonné est alors donné par :

$$S_{em}(\nu) = \frac{1}{T_0} P_{T_0}(\nu) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(\nu - k\nu_0)$$

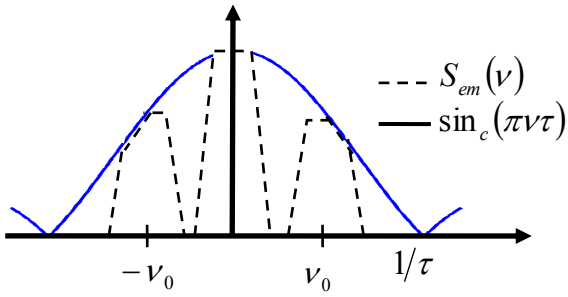


Figure 11 : Spectre du signal échantillonné par un échantillonneur bloqueur

1.3 La quantification

La quantification est l'approximation de chaque valeur $s(t)$ par un multiple entier d'une quantité élémentaire q**, appelée** échelon ou pas de quantification. Lorsque q **est constant quelle que soit l'amplitude du signal, la quantification est appelée** quantification uniforme.

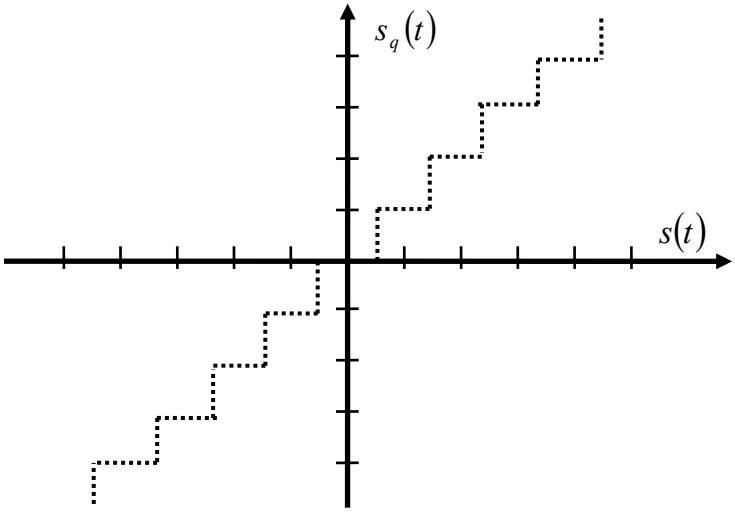


Figure 12 : Exemple de quantificateur uniforme

Le calcul de la valeur de $s_q(t)$ s'effectue en prenant la valeur entière la plus proche de $s(t)$. De manière, plus générale, $s_q(t)$ est égale à nq pour toute valeur de $s(t)$ comprise entre $(n-1/2)q$ et $(n+1/2)q$. En pratique, le pas de quantification est directement fonction de la taille du mot binaire utilisé pour la numérisation. Par exemple si on utilise des mots de 3 bits pour quantifier une dynamique de 2 volts, la valeur du pas ion.3 $2/2^3 = 0{,}25$ volts.

Qui dit quantification, dit erreur de quantification $e(t) = s(t) - s_q(t)$. Celle-ci dépend de la valeur du pas de quantification et donc du nombre de bits de quantification. La figure suivante présente un exemple de quantification.

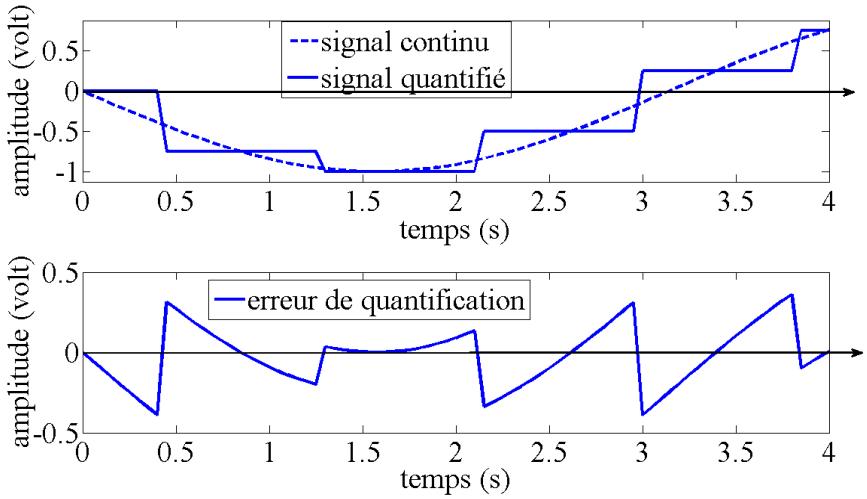


Figure 13 : Signal numérisé

L'amplitude de l'erreur de quantification est comprise entre $-q/2$ et $q/2$.Dans le cas où la quantification est faite avec une bonne précision, on peut considérer que l'erreur de quantification $e(t)$ suit un modèle de bruit blanc additif dont la répartition spectrale est uniformtion.3 $[-\nu_0/2, +\nu_0/2[$ et dont la puissance est égale à $B = q^2/12$.

La dernière étape de la numérisation consiste à coder les valeurs quantifiées en un mot binaire. Le tableau suivant propose un exemple de codeur analogique-numérique sur 3 bits. Pour l'exemple précédent, les mots binaires obtenus seraient : 110 001 000 ….

-5

plage de quantification	-1,125 à -0,875	-0,875 à 0,625	-0,625 à -0,375	-0,375 à -0,125	-0,125 à +0,125	+0,125 à +0,375	+0,375 à +0,625	+0,625 à + 0,875
valeur numérisée	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0	+0,25	+0,5	+0,75
mot binaire	000	001	011	010	110	111	101	100

Tableau 1 : Exemple de table de codage binaire

Il existe d'autres méthodes de quantification qui font varier le pas de quantification *q*.

En sortie du circuit de conversion, on définit le ***débit binaire*** qui est fonction de la période d'échantillonnage T_0 et de la taille *N* des mots binaires

$$D_{CAN} = \frac{N}{T_0} = N\nu_0 \text{ en bit/s ou bps}$$

Par exemple la numérisation d'un signal de parole de qualité téléphonique se fait sur des mots de 8 bits avec une fréquence d'échantillonnage de 8kHz (son spectre est défini sur $[300\text{Hz} \quad 3400\text{Hz}]$), le débit binaire est égal à $D_{CAN} = 64\text{kbps}$.

1.4 De l'acquisition à la reconstruction

Le synoptique suivant illustre une chaîne de traitement à partir d'un signal analogique jusqu'à sa restitution après traitement numérique.

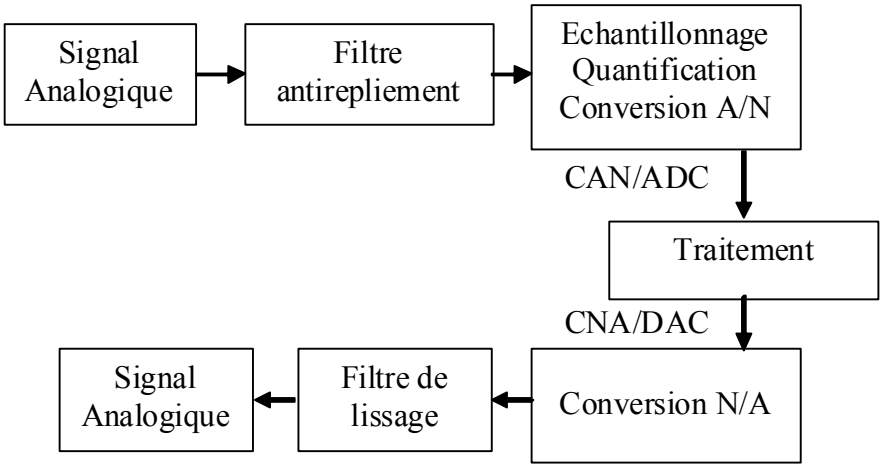


Figure 14 : Chaîne complète de traitement

Le spectre du signal en sortie du circuit de conversion N/A est toujours périodique d'où l'utilisation du ***filtre de lissage*** (passe-bas) pour effectuer l'interpolation décrite précédemment.

1.5 Petite Classe 1 : Échantillonnage – Convolution

Exercice 1 :

On considère un signal dont l'expression est définie comme suit :

$$x(t) = A[1+\sin(2\pi\nu_0 t)]\sin(2\pi\nu_1 t) \text{ avec } \nu_0 < \nu_1$$

a) Tracer le module du spectre associé à ce signal.

b) Que doit respecter la fréquence d'échantillonnage ?

c) Déterminer le nombre d'échantillons par seconde minimum.

d) Tracer le module du spectre du signal échantillonné $x_e(t)$ associé à $x(t)$.

Exercice 2 :

On considère un signal réel $x(t)$ dont le spectre est défini comme suit :

$$\begin{cases} X(\nu) \neq 0 \text{ pour } |\nu| \in [\nu_0 - B, \nu_0 + B[\\ X(\nu) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On supposera que $|X(\nu)|$ est symétrique par rapport à ν_0

a) Quelle est la fréquence minimum ν_e, d'échantillonnage ?

b) Si on échantillonne à la fréquence limite de Shannon et si on quantifie chaque échantillon sur 32 bits, quel est le débit nécessaire pour la transmission de ce signal ? exprimer le résultat en fonction de ν_0 et B

c) On échantillonne à la fréquence $\nu_e' = \nu_0/2$:

c1) Donner l'expression du signal échantillonné $x_e(t)$.
c2) Donner l'expression de $X_e(\nu)$.
c3) Donner une condition sur B pour qu'il n'y ait pas recouvrement.
c4) Représenter le module de $X_e(\nu)$ qui respecte cette condition.
c5) Calculer le débit nécessaire de ce signal.

d) On applique au signal échantillonné précédent un filtre de reconstruction parfaite du signal en bande de base :

d1) Comment effectue-t-on une reconstruction parfaite ?
d2) Quel est le spectre du signal reconstruit ?
d3) Déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ du reconstructeur idéal.

e) Montrer qu'il est possible de retrouver le signal $x(t)$, à un coefficient près peut-être, en multipliant le signal déterminé à la question d) par $2\cos(2\pi\nu_0 t)$. Représenter le module de la transformée de Fourier du signal obtenu.

Chapitre 2 : Signaux et systèmes discrets

Au cours de ce chapitre, on s'intéressera au traitement du signal. Après avoir fait un rapide rappel sur les signaux discrets, le système de traitement des signaux discrets est présenté.

Les systèmes linéaires et le concept de convolution seront introduits.

Le signal a d'abord été considéré sous sa forme analogique. Avec l'apparition des systèmes numériques, il fut amené à évoluer dans cet espace qui offre de nombreux avantages. Cependant, la majorité des signaux prennent leurs origines dans un monde analogique. Il faut donc les convertir sous forme numérique (conversion analogique/numérique A/N) puis, après traitement, les ramener dans le monde analogique (conversion numérique/analogique N/A).

2.1 Signaux discrets

2.1.1 Classification des signaux

Un signal peut être classé selon différents critères. On s'intéressera, ici, aux caractéristiques temporelles ainsi qu'aux valeurs prises par le signal.

Classification temporelle :

On classe habituellement les signaux $s(t)$ en deux catégories :

- Les *signaux à temps continu* : le signal est présent de manière continue par rapport au temps. La valeur de $t \in \mathbb{R}$.
- Les *signaux à temps discret* : le signal n'est défini que pour des valeurs discrètes de $t = t_i$, $i \in \mathbb{Z}$).

Remarque 1 :

Dire que le signal est défini aux instants t_n ne signifie pas qu'il n'existe pas entre deux instants. Cela signifie simplement que sa valeur n'est pas connue entre ces deux instants.

Remarque 2 :

Dans la suite de ce cours, les instants t_n sont considérés comme étant répartis uniformément. D'où $t_n = nT_0$ et T_0 est l'intervalle de temps qui sépare deux instants.

Classification suivant les valeurs prises par le signal :

Les valeurs prisent par les signaux, à temps continu ou discret, peuvent appartenir à un ensemble continu, on parlera alors de signaux à valeurs continues. Dans le cas contraire, on parlera de signaux à valeurs discrètes.

Dans la suite du cours, nous distinguerons deux types de signaux :

- Le *signal discret*, un signal à temps discret et à valeurs continues,
- Les *signaux numériques*, signaux à temps discret et à valeurs discrètes.

La figure suivante résume la classification présentée des différents signaux.

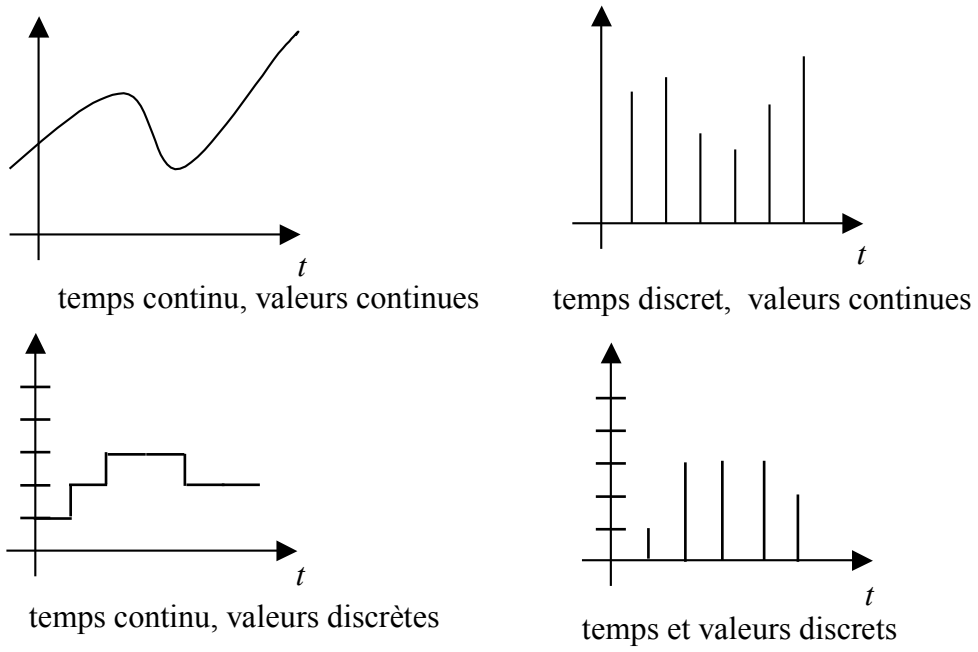


Figure 15 : Classification des signaux

Il faut remarquer que dans les cas pratiques, on associe toujours au signal discret un signal numérique afin de pouvoir l'analyser et le traiter sur un calculateur numérique. Cette opération s'effectue à l'aide des convertisseurs analogiques/numériques définis dans le chapitre précédent.

De fait, on réalise cette opération systématiquement lorsque l'on mesure un phénomène physique : on associe une suite de valeurs numériques à un phénomène *a priori* continu.

Exemple des différents types de signaux :

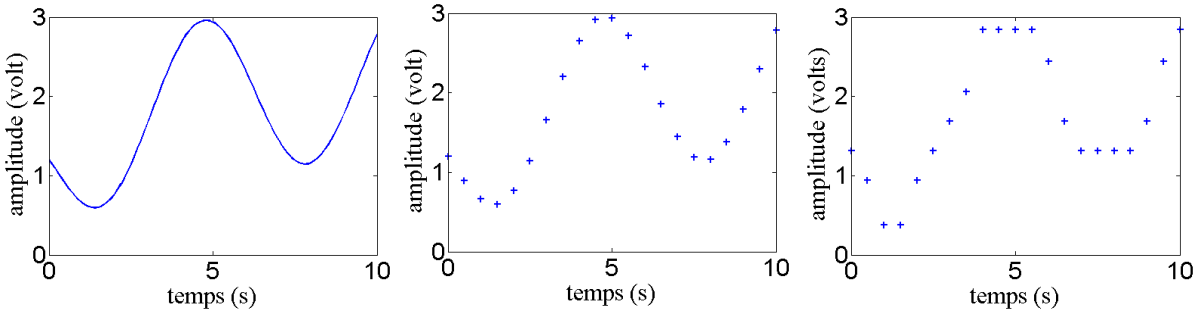


Figure 16 : De gauche à droite : signaux continus, discret et numérique

2.1.2 Représentation des signaux discrets

Nous n'étudierons que des signaux discrets existants à des "instants" tels que $t_k = kT_0$; $k \in \mathbb{Z}$, $T_0 \in \mathbb{R}^{+\cdot}$ Le signal discret est donc une suite de valeurs prises aux instants t_k.

Un signal discret est défini par :

$$s(t) = \begin{cases} s(k) & \text{si } t = kT_0 \\ 0 & \text{si } t \neq kT_0 \end{cases}$$

Dans le cas où la variable temps est normalisée par rapport à T_0, la notion temporelle disparaît : $t_k = k$, ce qui nous amène à considérer des suites de valeurs, qui peuvent être notées, par exemple $s(n), n \in \mathbb{Z}$ et $s(n) \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Le signal discret peut alors être représenté sous deux formes :

Représentation par une suite :

$$\{s(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

Représentation par une expression mathématique associée aux distributions :

$$s = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)\delta_k$$

- **Énergie E d'un signal discret**

L'énergie *E* d'un signal discret est définie par : $\sum_{N=-\infty}^{+\infty} |s(n)|^2$

- **Puissance moyenne *P* d'un signal discret**

La puissance moyenne d'un signal est définie par $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |s(n)|^2$

Si l'énergie *E* est constante alors *s(n)* est un signal d'énergie fini et $P = 0$. Si *E* est infinie, on peut avoir *P* finie et non nulle et dans ce cas *s(n)* est un signal de puissance finie.

- **Produit de corrélation**

Intercorrélation entre 2 signaux *x* et *y* :

$$\Gamma_{xy}(k) = \Re_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n+k)$$

Autocorrélation d'un signal *x* :

$$\Gamma_x(k) = \Re_{xx}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x^*(n+k)$$

NB : * pour le conjugué

2.2 Systèmes linéaires stationnaires discrets (filtre) ou systèmes linéaires temporellement invariants (SLTI)

2.2.1 Définition

- ***Système avec ou sans mémoire :***

Les systèmes discrets sont des systèmes qui transforment un signal (ou des signaux) d'entrée en un signal de sortie (ou des signaux), l'ensemble à temps discret. La figure suivante donne un exemple de système discret.

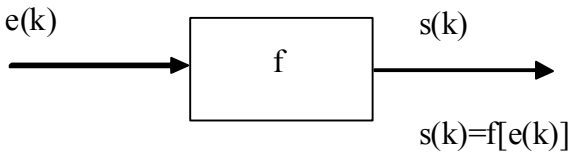


Figure 17 : Exemple de système discret

On peut distinguer les systèmes *sans effet de mémoire* et les systèmes *dynamiques*.

- *Système sans effet de mémoire* : système pour lequel un échantillon de sortie d'instant *n* ne dépend que de l'échantillon d'entrée à l'instant considéré comme par exemple un simple coefficient d'amplification.
- *Système dynamique* : tous les autres cas comme par exemple la fonction de filtrage. Dans ce cas le système est avec mémoire, le signal de sortie d'indice *k* est fonction des signaux d'indice précédent, *k-n*, et/ou suivant, *k+n*.

Linéarité (propriété de superposition) :

Soient $f\left[e_1(k)\right]=s_1(k)$ et $f\left[e_2(k)\right]=s_2(k)$

$\Rightarrow f\left[\lambda_1 e_1(k)+\lambda_2 e_2(k)\right]=\lambda_1 s_1(k)+\lambda_2 s_2(k)$; $\forall \lambda_1, \lambda_2$.

Temporellement invariant :

Si $s_1(k)=f\left[e_1(k)\right]$ alors $s_1(k-n)=f\left[e_1(k-n)\right]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Continuité :

Soit $e(k)=\lim_{n\to+\infty} e_n(k) \quad \forall k$

Le système est continu si : $s(k)=\lim_{n\to+\infty} s_n(k) \quad \forall k$

Avec : $s(k)=f\left[e(k)\right]$; $s_n(k)=f\left[e_n(k)\right]$

$$\lim_{n\to+\infty} f\left[e_n(k)\right]=f\left[\lim_{n\to+\infty} e_n(k)\right]$$

Un système discret linéaire, temporellement invariant et continu est appelé un ***filtre discret*** ou ***SLTI***.

Les systèmes linéaires à temps discrets invariants dans le temps constituent une part très importante du traitement numérique du signal. Leurs fonctionnements sont régis par la convolution et l'analyse de leurs propriétés s'effectuent à l'aide de la transformée en *Z* qui sera définie par la suite.

- ***Causalité*** :

Le signal de sortie d'indice *k* ne dépend que des valeurs d'entrée aux indices présent et passés.

2.2.2 Réponse impulsionnelle

Soit un système linéaire *G* qui transforme un signal d'entré *e(n)* en un signal de sortie *s(n)*.

$$s(n) = G\left[e(n)\right]$$

$$s(n) = G\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(n)\delta(n-k)\right]$$

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G\left[e(n)\delta(n-k)\right]$$

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(n)G\left[\delta(n-k)\right]$$

On pose :

$$h(n) = G(\delta(n))$$

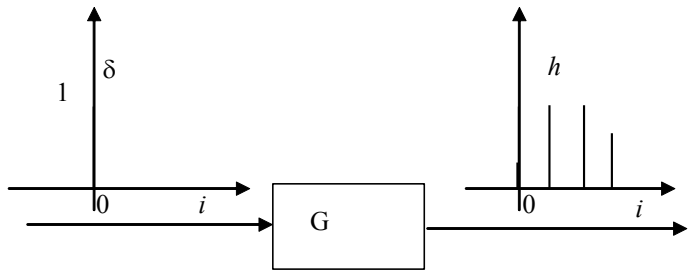
Dans le cas d'un système linéaire et invariant en temps, on a :

$$h(n-k) = G\left[\delta(n-k)\right]$$

La relation qui relie le signal d'entrée et le signal de sortie est :

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(n)h(n-k)$$

La réponse impulsionnelle du filtre discret est définie par les coefficients *h(n)*. La réponse impulsionnelle est la réponse du filtre à une distribution de Dirac.



8

Figure 18 : Réponse du filtre à une distribution de Dirac

2.3 Produit de convolution linéaire discret

2.3.1 Réponse à une entrée quelconque

Démonstration directe :

La valeur du signal d'entrée est définie à l'instant k par : $e(k) = \sum_n e(n)\delta(k-n)$

On applique : $G\left[\sum_{n=-N}^{+N} e(n)\delta(k-n)\right] = \sum_{n=-N}^{+N} e(n)G\left[\delta(k-n)\right]$

Puis, par passage à la limite, la valeur du signal d'entrée est définie à l'instant *k* par :

$$e(k) = \sum_n e(n)\delta(k-n)$$

On applique *G* :

$$G\left[\sum_{n=-N}^{+N} e(n)\delta(k-n)\right] = \sum_{n=-N}^{+N} e(n)G\left[\delta(k-n)\right]$$

Puis, par passage à la limite (continuité),

$$G\left[e(k)\right] = s(k) = G\left[\sum_{n} e(n)\delta(k-n)\right] = \sum_{n} e(n)G\left[\delta(k-n)\right] = \sum_{n} e(n)h(k-n)$$

$$s(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e(n)h(k-n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)e(k-m) = (h*x)(k) = (x*h)(k)$$

Il s'agit du ***produit de convolution linéaire discret***.

Illustration

Soit la réponse du système *G* à une distribution ou impulsion de Dirac.

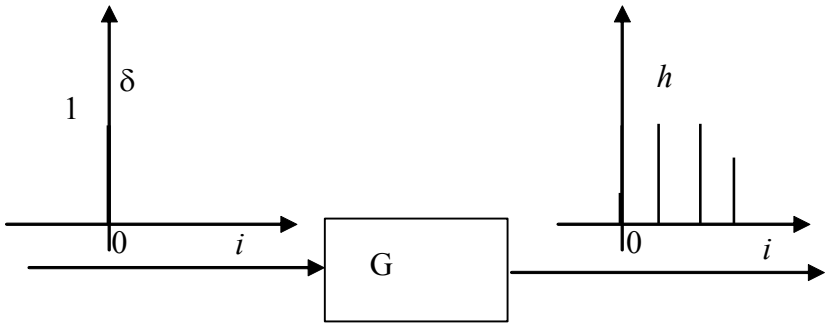


Figure 19 : Réponse à une impulsion

Quelle est la réponse au signal *e* ?

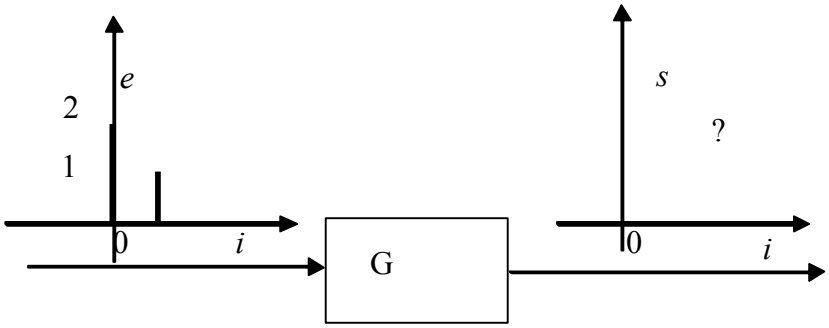


Figure 20 : Réponse à un signal quelconque

- ***Calcul direct de s(n) :***

Le calcul direct s'effectue en appliquant la formule de convolution.

$$\begin{aligned}
s(0) &= e(0)h(0) &&= 2\\
s(1) &= e(0)h(1) + e(1)h(0) &&= 3\\
s(2) &= e(0)h(2) + e(1)h(1) + e(2)h(0) &&= 3\\
s(3) &= e(0)h(3) + e(1)h(2) + e(2)h(1) + e(2)h(0) &&= 1
\end{aligned}$$

- ***Décomposition***

Le signal est la somme des réponses des impulsions de Dirac aux instants 0 et 1

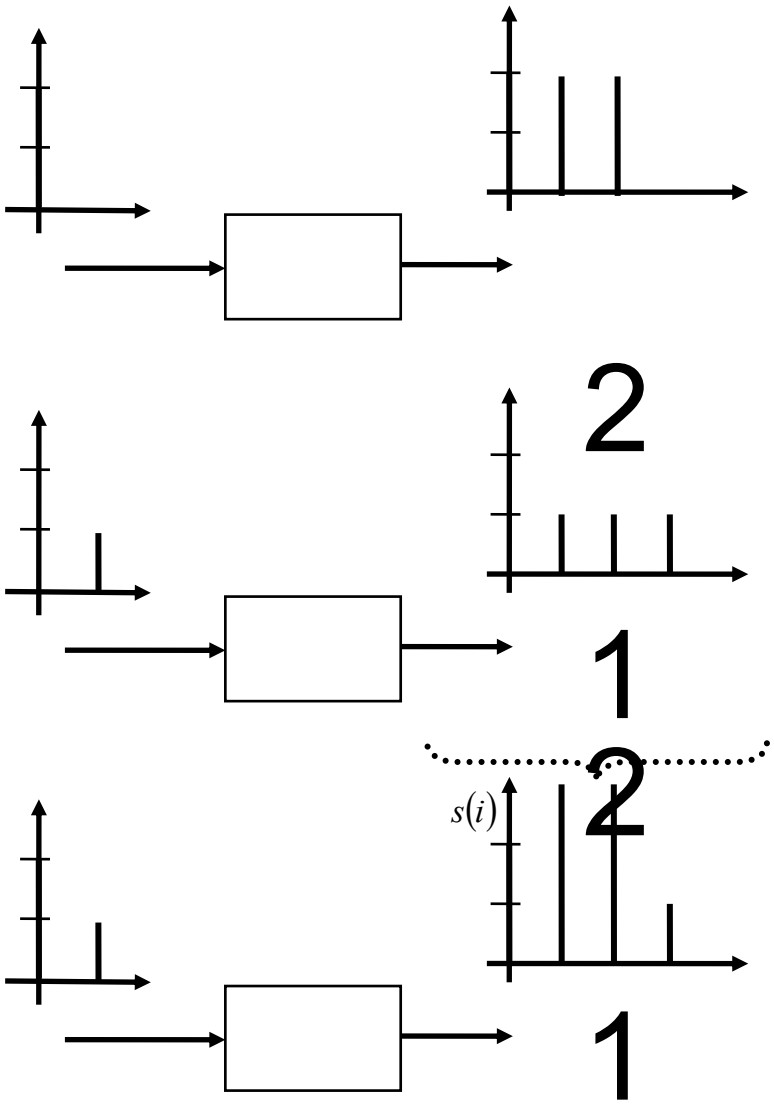


Figure 21 : Décomposition du produit de convolution

On retrouve, bien évidemment, le même résultat que précédemment.

2.3.2 Causalité

Un système est causal si et seulement si $h(k) = 0 \ \forall k < 0$.

La sortie ne dépend que des signaux d'entrée passés, c'est-à-dire qu'une entrée à un instant situé dans le futur ne peut pas affectée la sortie. De plus pour des raisons de stabilité, *h(k)* devient petit lorsque *n* est grand.
La sortie s'écrit sous la forme :

$$s(k) = \sum_{m=0}^{+\infty} x(k-m)h(m)$$

2.3.3 Équation aux différences finies

Les équations de convolutions développées précédemment font intervenir des sommes infinies de termes. Il est possible, pour certaines familles de réponses impulsionnelles infinies,

de développer la convolution sous une forme récursive. Il existe, alors, une relation entre l'entrée et la sortie sous la forme d'une combinaison linéaire.

De la même manière qu'un système à temps continu est représenté par une équation différentielle $\left(\sum_i \alpha_i s^{[i]}(t) = \sum_j \beta_j s^{[j]}(t)\right)$, un filtre discret peut être représenté par ***une équation aux différences ou équation récurr*ente**

$$\boxed{s(k) = \sum_{i=0}^{N} a_i e(k-i) - \sum_{j=1}^{N} b_i s(k-j)}$$

Le système précédemment décrit est linéaire, invariant en temps et causal ($i \geq 0$ et $j \geq 1$). Le filtre est d'ordre *N* et en général, $M \leq N$.

Si $M \geq 1$ **:**

- Le signal de sortie à l'instant *n* dépend des signaux d'entrée des instants précédents et des signaux de sortie des instants précédents,
- Un tel système est ***récursif***,
- ***La réponse impulsionnelle est infinie (RII ou IIR en anglais)***.

Si $M = 0$

- La sortie ne dépend que de l'entrée courante et des entrées des *N* instants précédents,
- Le système est ***non-récursif ou transversal***,
- La réponse ***impulsionnelle est finie (RIF ou FIR en anglais).***

Exemple : filtre du 1er ordre

$$s(k) = e(k) + 2e(k-1) - 3s(k-1)$$

Dans le cas d'un circuit électronique, les retards peuvent être réalisés à l'aide de bascules ou de circuits à décalage, les multiplications et les additions à l'aide de circuits logiques.

L'utilisation d'un ordinateur permet de réaliser ce filtre.

Synoptique :

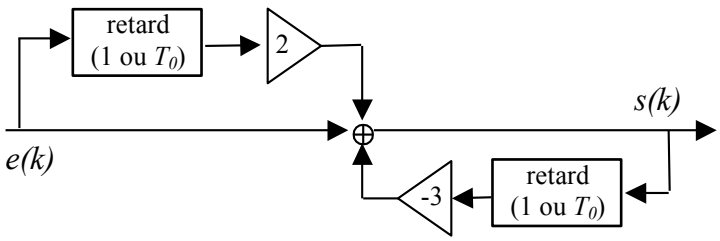


Figure 22 : Filtre récursif d'ordre 1

On reviendra ultérieurement sur les représentations d'un filtre numérique.

2.4 Stabilité des filtres discrets

La sortie $s(k)$ d'un filtre s'écrit sous la forme $s(k)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(k-m)$. Cette définition permet de définir la stabilité du filtre.

Définition :
Un système discret est stable si et seulement si la réponse du système à une entrée bornée est bornée.

Théorème :
La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système discret soit stable est :

$$\sum_n |h(n)| < \infty$$

La démonstration est la suivante :

- Condition suffisante :

Si la suite d'entrée $e(n)$ est bornée : $|e(n)| < M \quad \forall n$

Alors

$$|s(n)| \le \sum_m |h(m)||e(n-m)| \le M\sum_m |h(m)|$$

Si $\sum_m |h(m)| < \infty$ alors $|s(n)|$ est borné.

- Condition nécessaire :

Si on prend en entrée :

$$\left.\begin{array}{l} e(n)=1 \quad \text{si } h(n)\ge 0 \\ e(n)=-1 \text{ si } h(n)<0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow e(n)=sign(h(n))$$

Avec : $h(n)$ paire

$$s(0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e(e)h(-n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} sign(h(n))h(-n)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(-n)|=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)|$$

Si la condition $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$ n'est pas vérifiée, alors, $s(0)$ n'est pas borné et le système n'est pas stable.

Les caractéristiques d'un filtre discret seront étudiées ultérieurement à l'aide de la transformation en Z.

2.5 Représentation fréquentielle

Les systèmes linéaires invariants ont la propriété de superposition. Cela signifie que si on applique en entrée un signal sinusoïdal, la sortie est également sinusoïdale de même pulsation mais avec une amplitude et une phase qui dépendent du système utilisé.

Soit l'entrée $e(n)=e^{j2\pi\nu nT}$ pour $-\infty < n < +\infty$ d'un système linéaire invariant en temps de réponse impulsionnelle $h(k)$. La sortie peut s'écrire :

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{j2\pi v(n-k)} = e^{j2\pi vn} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j2\pi vk}$$

Posons :

$$H\left(e^{j2\pi v}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j2\pi vk}$$

$H\left(e^{j2\pi v}\right)$ est appelée réponse fréquentielle du système caractérisé par sa réponse impulsionnelle $\{h(k)\}$.

L'expression de la réponse fréquentielle d'un système linéaire stationnaire indique qu'il s'agit d'une fonction périodique de période unitaire.

Puisque la fonction est périodique, elle peut être représentée à l'aide d'une série de Fourier où les coefficients sont $h(k)$.

Remarque :

La réponse fréquentielle peut être notée comme suit : $H\left(e^{j2\pi v}\right)$, $H\left(e^{j\omega}\right)$, $H(\upsilon)$, $H(\omega)$.,

Chapitre 3 : La transformée en Z

La transformée en Z est un outil utilisé dans l'étude des systèmes de traitement numérique du signal. Elle permet de décrire aisément les signaux discrets ainsi que la réponse d'un système SLIT soumis à des entrées diverses. Typiquement, la transformée en Z décrit un système SLTI défini par son équation aux différences finies.

De plus, de même que dans la transformée de Fourier, l'opérateur de convolution dans le domaine temporel correspond à l'opérateur multiplicatif dans le domaine en Z.

3.1 Définition des transformées de Laplace, en Z et de Fourier discrète

3.1.1 Transformée de Laplace d'une suite discrète

Considérons le signal défini par la suite discrète $\{s(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. La transformée de Laplace de celle-ci est donnée par :

$$X(e^p) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-kp}$$

Remarque : afin d'éviter toute confusion avec la Transformée de Laplace du signal à temps continu celle-ci est notée $X(e^p)$ considérons le signal défini par la suite $\{s(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

3.1.2 Transformée en Z

Le passage de la transformé de Laplace à la transformée en Z s'effectue en posant $e^p = z$

Nous obtenons :

$$X(z) = X(e^p)\Big|_{z=e^p} = \sum_k x(k) z^{-k}$$

Cette expression modifiée de la transformée de Laplace par changement de variable est appelée Transformée en Z du signal *x*.

Notation :

$$\boxed{X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k}}$$

Exemple :

Soit le signal à temps discret :

$$\{x(n) = a^n\}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

La transformée en Z est :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n}$$

3.1.3 Transformée de Fourier d'une suite

La transformée de Fourier de *x* est définie par :

$$\boxed{X\left(e^{j2\pi\nu}\right)=X(z)\big|_{z=e^{j2\pi}}}$$

Soit :

$$\boxed{X\left(e^{j2\pi\nu}\right)=\sum_{k}x(k)e^{-jk2\pi\nu}}$$

Remarque : afin d'éviter toute confusion avec la transformée de Fourier du signal à temps continu celle-ci est notée $X\left(e^{j2\pi\nu}\right)$.

Propriétés de la Transformée de Fourier d'un signal discret

- *Périodicité*

$$X\left(e^{j2\pi\nu}\right)=\sum_{k}x(k)e^{jk2\pi\nu}$$

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ X\left[e^{j(2\pi\nu+2n\pi)}\right]=X\left(e^{j2\pi\nu}\right)$$

$X\left(e^{j2\pi\nu}\right)$ est donc périodique, de période 1 par conséquent $X\left(e^{j2\pi\nu}\right)$ peut se mettre sous la forme d'une série de Fourier.

$$X\left(e^{j2\pi\nu}\right)=\sum_{n}C_n e^{jn2\pi\nu}$$

Avec

$$C_n=\int_{-1/2}^{1/2}X\left(e^{j2\pi\nu}\right)e^{-jn2\pi\nu}d\nu$$

D'où :

$$x(n)=C_{-n}=\int_{-1/2}^{1/2}X\left(e^{j2\pi\nu}\right)e^{jn2\pi\nu}d\nu$$

- <u>Remarque 1</u> :

Nous nous sommes placés dans le cas de signaux de type $\{s(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. En considérant un signal échantillonné $x(nT_0)$, nous pouvons poser $\alpha=2\pi\nu T_0$.

D'où :

$$x(nT_0)=\frac{1}{\nu_0}\int_{-\nu_0/2}^{+\nu_0/2}X\left(e^{j2\pi\nu T_0}\right)e^{jn2\pi\nu T_0}d\nu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}X\left(e^{j\alpha}\right)e^{jn\alpha}d\alpha$$

- <u>Remarque 2</u> :

Comme pour les signaux à temps continu, la transformée de Fourier d'un signal discret est une représentation en fréquence de ce signal.

3.1.4 Réponse fréquentielle d'un filtre discret

Considérons le filtre discret de réponse impulsion *h(n).*

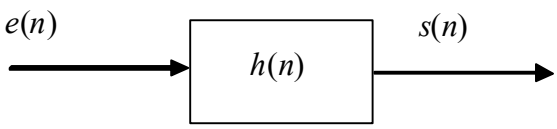


Figure 23 : Filtre discret

Soit le signal de sortie

$$s(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(n-k)e(k)$$

On obtient :

$$S\left(e^{j2\pi\nu}\right)=\sum_{n}\left[\sum_{k}h(n-k)e(k)\right]e^{-jn2\pi\nu}$$

Soit

$$S\left(e^{j2\pi\nu}\right)=\sum_{n}\left[\sum_{k}h(n-k)e(k)\right]e^{jn2\pi\nu}=\sum_{n}\left[\sum_{k}h(n-k)e^{-j(n-k)2\pi\nu}e(k)e^{-jk2\pi\nu}\right]$$

Soit

$$S\left(e^{j2\pi\nu}\right)=\sum_{k}\left[\sum_{n}h(n-k)e^{-j(n-k)2\pi\nu}e(k)e^{-jk2\pi\nu}\right]=\sum_{k}\left[\sum_{m}h(m)e^{-jm2\pi\nu}\right]e(k)e^{-jk2\pi\nu}$$

$$S\left(e^{j2\pi\nu}\right)=\sum_{k}H\left(e^{j2\pi\nu}\right)e(k)e^{-jk2\pi\nu}=H\left(e^{j2\pi\nu}\right)\sum_{k}e(k)e^{-jk2\pi\nu}$$

Soit

$$S\left(e^{j2\pi\nu}\right)=H\left(e^{j2\pi\nu}\right)E\left(e^{j2\pi\nu}\right)$$

$H\left(e^{j2\pi\nu}\right)$: transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du filtre discret.

Avec : $H\left(e^{j2\pi\nu}\right)=\sum_{k}h(k)e^{-jk2\pi\nu}$

Vérification : filtre à réponse impulsionnelle réelle

Propriété :

La réponse fréquentielle d'un filtre à réponse impulsionnelle réelle possède un module pair et une phase impaire. On retrouve le même résultat que pour un filtre réel à temps continu.

Démonstration :

$$e(k)=\sum_{n}\cos(2\pi\nu k)\delta(n-k)=\sum_{n}\frac{1}{2}\left[e^{jk2\pi\nu}+e^{-jk2\pi\nu}\right]\delta(n-k)$$

D'où $$s(k)=\sum_{n}h(k)\frac{1}{2}\left[e^{j(n-k)2\pi\nu}+e^{-j(n-k)2\pi\nu}\right]$$

Soit : $$s(k)=\frac{1}{2}\left[H\left(e^{j2\pi\nu}\right)e^{jk2\pi\nu}+H\left(e^{-j2\pi\nu}\right)e^{-jk2\pi\nu}\right]$$

Avec $$H\left(e^{j2\pi\nu}\right)=\sum_{k}h(k)e^{-jk2\pi\nu}$$

Posons $H\left(e^{j2\pi\nu}\right)=C(\nu)e^{j\phi(\nu)}$

$$H\left(e^{-j2\pi\nu}\right)=C(-\nu)e^{j\phi(-\nu)}=\sum_{k}h(k)e^{jk2\pi\nu}=H^{*}\left(e^{j2\pi\nu}\right)$$

Or $H^{*}\left(e^{-j2\pi\nu}\right)=C(\nu)e^{-j\phi(\nu)}$

D'où

$$\left.\begin{aligned}C(\nu)&=C(-\nu)\\ \phi(-\nu)&=-\phi(\nu)\end{aligned}\right\}$$

Nous en déduisons :

$$s(k)=\frac{1}{2}\left[C(\nu)e^{j\phi(\nu)}e^{jk2\pi\nu}+C(-\nu)e^{j\phi(-\nu)}e^{-jk2\pi\nu}\right]=\frac{1}{2}\left[C(\nu)e^{j(\phi(\nu)+k2\pi\nu)}+C(-\nu)e^{-j(\phi(\nu)+k2\pi\nu)}\right]$$

$$s(k)=C(\nu)\left(\cos\left(\phi(\nu)+k2\pi\nu\right)\right)$$

Conclusion :

Lorsque le signal d'entrée d'un filtre linéaire est une sinusoïde discrète, la sortie de ce filtre est également une sinusoïde discrète, de même fréquence, amplifiée par le gain $C(\nu)$ du filtre et déphasée du déphasage du filtre à la fréquence ν. $H\left(e^{j2\pi\nu}\right)$ est donc bien la réponse en fréquence du filtre.

3.2 Propriétés de la transformation en Z

3.2.1 Transformée monolatérale

La transformée en *Z* d'un signal causal est définie par :

$$S(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}s(n)z^{-n}$$

Il est intéressant de connaître les deux valeurs des extrémités de cette suite, $s(0)$ et $s(+\infty)$.

Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{z\to\infty}S(z)=\lim_{z\to\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}s(n)z^{-n}=s(0)$$

Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{n\to+\infty}s(n)=\lim_{z\to1}\left(1-z^{-1}\right)S(z)$$

3.2.2 Convergence de la transformée en Z

La transformée en Z, *S*(*z*), de la suite {*s*(*n*)} est définie par :

$$S(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}s(n)z^{-n}$$

z est une variable complexe et la fonction *S*(*z*) possède un domaine de convergence qui est en général un anneau centré à l'origine, de rayon R_1 et R_2.C'est-à-dire que *S*(*z*) est défini pour $R_1<|z|<R_2$.

Remarque : Une consultation des propriétés sur les séries entières et les fonctions holomorphes permet de mieux comprendre cette propriété et de définir les rayons de convergences.

Application aux systèmes SLIT :

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)z^{-n}=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}h(n)z^{-n}}_{H^-(z)}+\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}h(n)z^{-n}}_{H^+(z)}$$

$H^-(z)$: converge pour $\lvert z\rvert<R_2$	➔ partie anti-causale
$H^+(z)$: converge pour $\lvert z^{-1}\rvert<\frac{1}{R_1}$	➔ partie causale

- Si $R_2 > R_1$, la transformée en *Z* existe dans une couronne de convergence donnée par $R_1 < |z| < R_2$ et vaut *H*(*z*).
- Si $R_2 < R_1$, la transformée en *Z* n'existe pas.

Cas de la transformée monolatérale

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} s(n) z^{-n}$$

La série converge pour $|z| > r$ et est égale à une fonction *H*(*z*), holomorphe dans ce domaine.

Exemple : soit le filtre causal défini par $h(n) = a^n$, *n* entier ≥ 0 et *a* réel, la transformée en Z est alors donnée par $H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$ pour un domaine de convergence : $|z| > |a|$

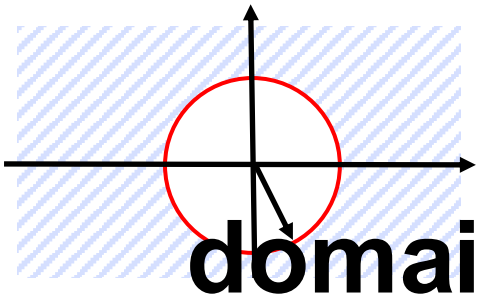


Figure 24 : Domaine de convergence

domaine de convergenc

3.2.3 Stabilité d'un filtre causal

- *Réponse impulsionnelle* :

Un filtre discret causal de réponse impulsionnelle {*h*(*n*)} est stable si et seulement si :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| < M}$$

- *Transformée en Z*

Théorème :
Un filtre discret causal est stable si et seulement si les pôles de sa transformée en *Z* sont à l'intérieur du cercle unité.

Dans l'exemple précédent, la stabilité du filtre est obtenue pour $|a| < 1$.

- Condition suffisante :

Hypothèse : les pôles de *H*(*z*) sont à l'intérieur du cercle unité.

H(*z*) est donc holomorphe pour $|z| \geq 1$ et développable en série convergente et absolument convergente, ce qui est vrai en particulier pour $|z| = 1$. Donc, $\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|$ est bornée et le système est stable.

- Condition nécessaire :

Hypothèse : *H(z)* a un pôle en dehors du cercle unité (au sens large, c.-à-d. y compris un pôle sur le cercle unité). Donc $z_0 = 1$ est en dehors du domaine de convergence de la série, et $\sum_{n=0}^{+\infty} h(n)$ n'est pas borné.

$$\forall A, \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) > A$$

Puisque $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} h(n)\right| < \sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)|$, donc $\forall A, \sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| > A$, et le filtre n'est pas stable.

Remarque :

Une série peut converger dans un domaine vers *H*(*z*) sans pour autant que le filtre *H*(*z*) soit stable.

3.2.4 Linéarité

Soient deux signaux discrets $x_1(n)$ et $x_2(n)$ ayant pour transformée en Z, respectivement, $X_1(z)$ et $X_2(z)$. Soit le signal $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$.

La définition de la transformée en Z conduit à la relation suivante :

$$X(z) = aX_1(z) + bX_2(z)$$

3.2.5 Théorème du retard

Soit un signal $x(n)$ de transformée en Z, $X(z)$. Soit *k*, un indice temporel quelconque et $x'(n) = x(n-k)$

$$X'(z) = z^{-k} \cdot X(z)$$

Démonstration

$$Z\left[h(n-k)\right] = \sum_n h(n-k) z^{-n} = \sum_n h(n-k) z^{-(n-k)} \cdot z^{-k}$$

D'où

$$Z\left[h(n-k)\right] = z^{-k} \cdot Z\left[h(n)\right]$$

La région de convergence reste inchangée. Cette propriété est importante et a permis l'utilisation d'une cellule de retard (z^{-1}) qui permet un décalage d'une unité.

3.2.6 Facteur d'échelle

Soit un signal $x(n)$ de transformée en Z, $X(z)$ avec $R_1 < |z| < R_2$ pour région de convergence. Soit $x'(n) = a^n x(n)$, on a :

$$X'(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Avec $|a|R_1 < |z| < |a|R_2$ pour région de convergence.

3.2.7 Inversion de l'axe temporelle

Soit un signal $x(n)$ de transformée en Z, $X(z)$ avec $R_1 < |z| < R_2$ pour région de convergence. Soit $x'(n) = x(-n)$, on a :

$$X'(z) = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

Avec $\frac{1}{R_2} < |z| < \frac{1}{R_2}$ pour région de convergence.

3.2.8 Dérivation

Soit un signal $x(n)$ de transformée en Z. Soit $x'(n) = nx(n)$, on a :

$$X'(z) = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

La région de convergence reste inchangée.

3.2.9 Convolution

Soient deux signaux discrets $x_1(n)$ et $x_2(n)$ ayant pour transformée en Z, respectivement, $X_1(z)$ et $X_2(z)$. Soit le signal $x(n) = (x_1 * x_2)(n)$.

La définition de la transformée en z conduit à la relation suivante :

$$\boxed{X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)}$$

3.3 Transformées en Z rationnelles

Une transformée en *Z* rationnelle est une fonction en *Z* qui s'écrit comme le rapport de polynômes en z^{-1}.

- **Définition des pôles et des zéros**

Les zéros d'une transformée en Z ($X(z)$) sont les valeurs (z_k) qui annulent $X(z)$.

Les pôles d'une transformée en Z sont les valeurs (p_k) pour lesquelles $\frac{1}{X(z)} = 0$

$$\text{Soit } X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^{-M} \prod_{k=1}^{M}(z - z_k)}{a_0 z^{-N} \prod_{k=1}^{N}(z - p_k)}$$

$X(z)$ est complètement déterminé par la position de ses pôles et de ses zéros ainsi que par le rapport (b_0/a_0). Les pôles et zéros reflètent le comportement du système.

3.4 Réponse à une entrée quelconque

3.4.1 Intérêt de la transformation en Z

Soit $S(z)$ la transformée en Z de $s(k)$ définie par :

$$S(z)=Z\left[s(k)\right]=\sum_k s(k)z^{-k}=\sum_k\left(\sum_n e(n)h(k-n)\right)z^{-k}$$
$$=\sum_k\sum_n e(n)h(k-n)z^{-k+n}z^{-n}$$
$$=\left(\sum_n e(n)z^{-n}\right)\cdot\left(\sum_k h(k)z^{-k}\right)$$

D'où la relation qui existe entre $S(z)$ et $E(z)$:

$$S(z)=H(z)\cdot E(z)$$

Avec : $H(z)=\sum_k h(k)z^{-k}$

Comme la transformation de Laplace en continu, la transformation en Z permet, en discret, de passer d'un produit de convolution à un produit simple. $H(z)$, transformée en Z de la réponse impulsionnelle du filtre discret, est appelée **fonction de transfert du filtre**.

> *Rappel* : un filtre discret est défini par :
> - $h(n)$: réponse impulsionnelle
> - $H(z)$: fonction de transfert
> - $H\left(e^{j\alpha}\right)$: réponse fréquentielle

3.4.2 Transformée en Z de l'équation récurrente de filtrage

La sortie $s(k)$ s'écrit à l'aide de l'équation suivante :

$$s(k)=\sum_{i=0}^{N}a_i e(k-i)-\sum_{j=1}^{M}b_j s(k-j)$$

Afin de calculer la transformée, il est nécessaire d'utiliser la propriété de linéarité.

La transformation en Z de l'équation récurrente devient :

$$Z\left[s(k)\right]=\sum_{i=0}^{N}a_i\cdot Z\left[e(k-i)\right]-\sum_{j=1}^{M}b_j\cdot Z\left[s(k-j)\right]$$

Soient $S(z)=Z[s(k)]$ et $E(z)=Z[e(k)]$

$$S(Z)=\sum_{i=0}^{N}a_i\cdot z^{-i}E(z)-\sum_{j=1}^{M}b_j\cdot z^{-j}S(z)$$

La fonction de transfert du filtre est donc :

$$H(z)=\frac{S(z)}{E(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{N}a_i z^{-i}}{1+\sum_{j=1}^{M}b_j z^{-j}}$$

C'est l'étude de cette fonction de transfert qui permet d'analyser le filtre.

3.5 Transformation inverse

A partir d'une transformée en Z de signaux élémentaires, il peut être intéressant de retrouver les signaux temporels à partir de transformées connues. Cependant lorsque cela n'est pas aisément réalisable, il est toujours possible d'utiliser les techniques générales de transformation inverse :

- L'intégration sur un contour fermé,
- Le développement en puissance de *z* et de z^{-1},
- Le développement en fractions élémentaires.

3.5.1 Transformée inverse par intégration

- **Rappel sur les fonctions holomorphes :**

Soit *f*(*z*) une fonction holomorphe dans un domaine *D*, et un point *a* appartenant ou non à *D*. Soit (*C*)un contour fermé entourant *a* et appartenant à *D*. *f*(*z*) est développable en série de Laurent au voisinage de *a* et ce développement est unique.

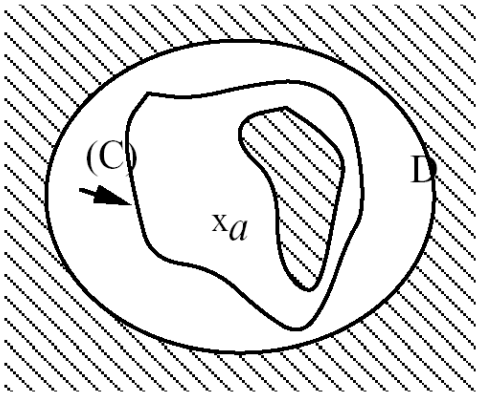


Figure 25 : Exemple de domaine de convergence

➔ $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n(z-a)^n$ Avec $A_n=\frac{1}{2\pi}\oint_{(C)}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}du$

- **Application**

Considérons la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}$ convergente vers la fonction *X(z)* dans le domaine $r<|z|<R$. *X*(*z*) est holomorphe dans ce domaine. Soit (C) un contour fermé dans cet anneau englobant le point $a=0$.

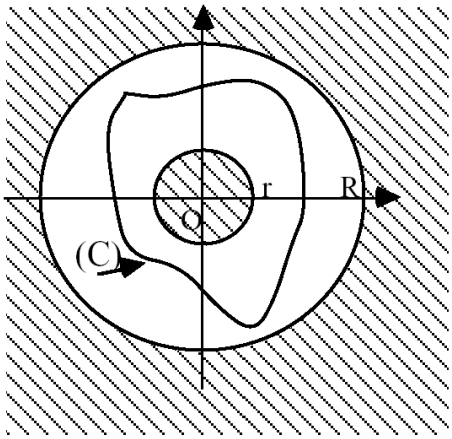


Figure 26 : Exemple de contour fermé

Il existe un développement en série de *X*(*z*) au voisinage de 0, :

$$X(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a(m) z^m$$

avec $a(m) = \frac{1}{2\pi} \oint_{(C)} \frac{X(z)}{z^{m+1}} dz$

Ce développement est unique.

En changeant *m* en *-n* et en posant *a(-m)* = *x(n)*, on obtient $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$

Avec $x(n) = \frac{1}{2\pi} \oint_{(c)} X(z) z^{n-1} dz$ Transformée en Z inverse

Connaissant *X*(*z*), il est possible de retrouver les *x*(*n*). Le calcul des *x*(*n*) peut s'effectuer par le calcul direct de l'intégrale curviligne. Cependant, il est souvent plus facile de calculer des résidus.

- **Autre formulation à partir des résidus**

Dans certains cas, le calcul des résidus permet de calculer de manière plus simple cette série. Soit une fonction *f*(*z*) holomorphe dans un domaine *D*, sauf en un nombre fini de points a_p.

Soit $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (z - a_p)^n$, on appelle résidu de *f* au point a_p, le coefficient A_{-1} du développement de Laurent de *f* au voisinage de a_p. Ce nombre est noté $A_{-1} = \mathrm{Res}[f(z)]_{z=a_p}$.

Soit (C') un contour dans *D* englobant tout ou partie des points a_p. On a alors :

$$\oint_{(C')} f(z) dz = 2\pi j \sum_{p=1}^{N} \mathrm{Res}[f(z)]_{z=a_p}$$

a_p : pôles inclus dans (C')

En remplaçant dans l'expression de la transformée en Z inverse, il vient :

$$x(n) = \sum_{\substack{\text{pôles de } z^{n-1} X(z) \\ \text{inclus dans } (C')}} \mathrm{Res}\left[z^{n-1} X(z)\right]$$

Formules :

- Si *a* est un pôle simple de *f(z)* :

$$\sum_{p=1}^{N} \mathrm{Res}[f(z)]_{z=a} = \lim_{z\to a}[(z-a)f(a)]$$

- Si *a* est un pôle d'ordre *N* :

$$\sum_{p=1}^{N} \mathrm{Res}[f(z)]_{z=a} = \frac{1}{(N-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{d^{N-1}}{dz}(z-a)^N f(z)\right]$$

Exemple :

$f(z) = \dfrac{1}{z^2\cos(z-1)}$; 0 est un pôle d'ordre 2 ; on :

$$\mathrm{Res}[f(z)]_{z=0} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left[\frac{d}{dz}(z-0)^2\frac{1}{z^2\cos(z-1)}\right] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin(z-1)}{\cos^2(z-1)}\right) = -\frac{\sin 1}{\cos^2 1} = -2{,}88$$

3.5.2 Transformée inverse par développement fractionnaire

Dans le cas où *X*(*z*) est une fraction rationnelle, on peut effectuer la division polynômiale du numérateur par le dénominateur. Cette méthode permet de trouver facilement les valeurs de $x(n)$ proches de $n=0$, plus difficilement (sauf cas particuliers) la forme générale des $x(n)$.

Exemple : $X(z) = \dfrac{z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}$

$$\begin{array}{l|l}
z^{-1} & 1-\sqrt{2}z^{-2}+z^{-3} \\ \cline{2-2}
z^{-1}-\sqrt{2}z^{-2}+z^{-3} & z^{-1}+\sqrt{2}z^{-2}+z^{-3}-z^{-5}+\ldots\ldots \\ \cline{1-1}
\sqrt{2}z^{-2}-z^{-3} & \\
\sqrt{2}z^{-2}-2z^{-3}+\sqrt{2}z^{-4} & \\ \cline{1-1}
z^{-3}-\sqrt{2}z^{-4} & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

Figure 27 : Division polynomiale

Par identification, on obtient les coefficients :

$$x(0)=0; x(1)=1; x(2)=\sqrt{2}; x(3)=1;\cdots$$

3.5.3 Transformée inverse par développement en série

Conséquence : Lorsque, dans la transformée en Z, interviennent des fonctions dont le développement en série de Laurent au voisinage de zéro est connu, on peut obtenir les *x*(*n*) par identification.

Exemple :

$$X(z)=\left(1+z^{-1}\right)e^{z^{-1}}$$

Le développement en série de $e^{z^{-1}}$ en série permet d'écrire :

$$X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{-n}(n+1)}{n!}$$

D'où :

$$x(n)=\frac{n+1}{n}u(n)$$

Avec

$$u(k)=1 \quad \forall k\geq 0$$
$$=0 \quad \text{sinon}$$

3.6 Transformée en *Z* d'un produit

3.6.1 Détermination

Considérons le produit temporel de deux signaux discrets :

A un instant *n*, on a :

$$x_3(n)=x_1(n)x_2(n)$$

Supposons que $X_1(z)$ (resp. $X_2(z)$), la transformée en Z de $x_1(n)$ (resp. $x_2(n)$), soit holomorphe pour $r_1<|z|<R_1$ (resp. $r_2<|z|<R_2$).

Dans le domaine de convergence, $X_3(z)$ la transformée en Z de $x_3(n)$ s'écrit :

$$\boxed{X_3(z)=\sum_n x_1(n)x_2(n)z^{-n}}$$

Soit

$$X_3(z)=\sum_n\frac{1}{2\pi j}\left[\oint_{(C)}X_1(u)u^{n-1}du\right]x_2(n)z^{-n}$$
$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_{(C)}X_1(u)\left[\sum_n x_2(n)\left(\frac{z}{u}\right)^{-n}\right]\frac{du}{u}$$

- $X_1(u)$ convergence pour : $r_1<u<R_1$
- $X_1\left(\frac{z}{u}\right)$ convergence pour : $r_2<\frac{z}{u}<R_2$

Donc $X_3(z)$converge pour $r_1r_2<z<R_1R_2$

3.6.2 Puissance d'un signal discret - Théorème de Parseval

La puissance du signal discret *x*(*n*) est par définition :

$$P=\sum_n|x(n)|^2$$

Posons $x_1(n)=x(n)$; $x_2(n)=x^*(n)$ et calculons $X_3(z)$ pour $z=1$:

$$X_3(1)=\sum_n |x(n)|^2=\frac{1}{2\pi j}\oint_{(C)} X_1(u)X_2\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{u}$$

En intégrant sur le cercle unité $u=e^{j2\pi\nu}, \nu\in[0,1]$

$$X_1\left(e^{j2\pi\nu}\right)=\sum_n x(n)e^{-j2\pi\nu}=X\left(e^{j2\pi\nu}\right)$$

$$X_2\left(e^{-j2\pi\nu}\right)=\sum_n x^*(n)e^{j2\pi\nu}=X^*\left(e^{j2\pi\nu}\right)$$

Il vient donc :

$$\boxed{\sum_n |x(n)|^2=\int_0^1 \left|X\left(e^{j2\pi\nu}\right)\right|^2 d\nu}$$

Relation de Parseval pour des signaux discrets

3.7 Transformées usuelles

- *Impulsion unité*

$$\delta=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta_k \quad \text{avec } a_0=1\,;\, a_k=0,\ \forall k\neq 0$$

$$Z[\delta]=1$$

- *Échelon unité*

$$u=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta_k \quad\Rightarrow\quad U(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k}$$

$$U(z)=\frac{1}{1-z^{-1}} \text{ converge pour } |z|>1$$

- *Rampe unité*

$$r=\sum_{k=0}^{+\infty} k\cdot\delta_k \quad\Rightarrow\quad R(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} k\cdot z^{-k}$$

$$\frac{dU(z)}{dz}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{d\left(z^{-k}\right)}{dz}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-k)z^{-k-1}=-z^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}kz^{-k}=-z^{-1}R(z)$$

$$R(z)=\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2} \text{ converge pour } |z|>1$$

- $e(k)=a^k u(k)$

$$E(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a^k z^{-k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(az^{-1}\right)^k$$

$$E(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \text{ converge pour } |z|>a$$

En particulier pour $a=e^{j\alpha}$, donc $\dfrac{1}{1-e^{j\alpha}z^{-1}}$ converge pour $|z|>1$

Conséquences :

converge pour $|z|>1$

$$Z\left[\sin(\alpha k)\right]=\frac{z^{-1}\sin\alpha}{1-2z^{-1}\cos\alpha+z^{-2}}\ ;\ Z\left[\cos(\alpha k)\right]=\frac{1-z^{-1}\cos\alpha}{1-2z^{-1}\cos\alpha+z^{-2}}$$

Le tableau suivant résume les trois transformées en Z usuelles et les deux opérations de base sur celles-ci :

Signal discret ou opération	Transformée en Z	Domaine de convergence
Impulsion unité $\delta(n)$	$\Delta(z)=1$	
Échelon unité $u(n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta(n-k)$	$U(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}z^{-k}=\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
Rampe unité $r(n)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\delta(n-k)$	$R(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}kz^{-k}=\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert>1$
Théorème du retard ($k\geq 0$) ou de l'avance ($k<0$) $x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	Domaine de $X(z)$
Facteur d'échelle $a^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$	$\lvert a\rvert$ domaine de $X(z)$

Tableau 2 : Transformées en Z et opérations usuelles

3.8 Exemple : filtre récursif du premier ordre

Soit un filtre discret causal d'équation récurrente :

$$s(k)=a_0e(k)-b_1s(k-1)$$

Réalisation :

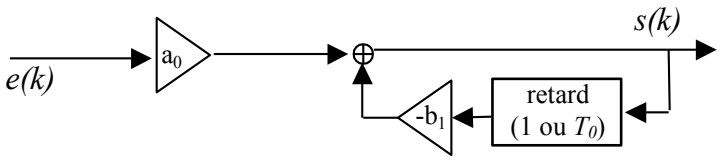


Figure 28 : Filtre récursif du premier ordre

La fonction de transfert en Z : $H(z)=\frac{a_0}{1+b_1z^{-1}}$

- Le système est causal : $|z|>|b_1|$
- Le système est stable pour : $|b_1|<1$

Réponse impulsionnelle : $h(n)=\mathrm{Res}\left[z^{n-1}H(z)\right]_{z=-b_1}=\mathrm{Res}\left[\frac{a_0z^n}{z+b_1}\right]_{z=-b_1}$

$$h(n) = a_0(-b_1)^n \; ; n \geq 0 \qquad h(n) = 0 \; ; n < 0$$

Réponse fréquentielle : $H\left(e^{j2\pi\nu}\right) = H(z)\Big|_{z=e^{j2\pi\nu}} = \dfrac{a_0}{1 + b_1\cos(2\pi\nu) - jb_1\sin(2\pi\nu)}$

Soit : $\begin{cases} \left|H\left(e^{j2\pi\nu}\right)\right| = \dfrac{a_0}{\sqrt{1 + b_1^2 + 2b_1\cos(2\pi\nu)}} \\ Arg\, H\left(e^{j2\pi\nu}\right) = Arctg\dfrac{b_1\sin(2\pi\nu)}{1 + b_1\cos(2\pi\nu)} \end{cases}$

La figure suivante donne l'évolution du module et de l'argument de la réponse fréquentielle suivant deux cas distincts : $b_1 \in]0,1[$ (trait continu) et $b_1 \in]-1,0[$ (trait pointillé).

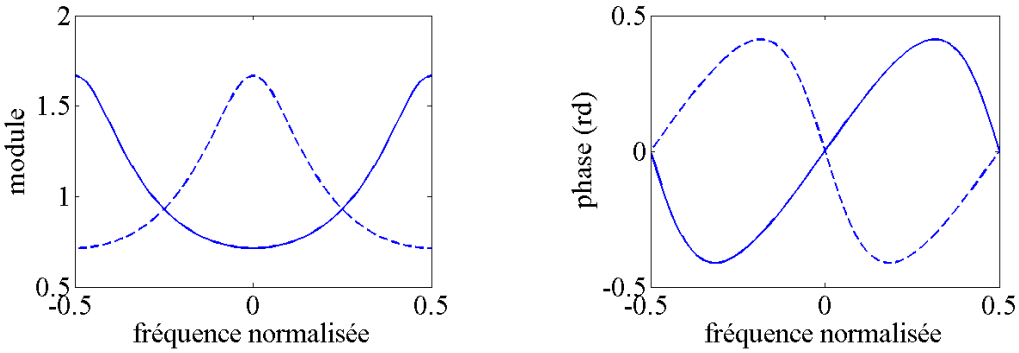


Figure 29 : Module et phase de la réponse fréquentielle pour $a_0 = 1$ et $|b_1| = 0.4$

Petite Classe 2 : Transformée en Z – Équation de filtrage

Exercice 1 :

Soit le système discret défini par l'équation suivante : $y(n) = 100\sum_{k=0}^{9} 0.4^k x(n-k)$.

1. Vérifiez que le système est linéaire et invariant.
2. Déterminez la réponse impulsionnelle du système.
3. Le système est-il stable et causal ?
4. Donnez une équation aux différences d'ordre un qui implémente le même système discret (une équation aux différences d'ordre un contient les termes $y(n)$ et $y(n-1)$).

Exercice 2 :

1. Soit un filtre causal défini par : $h(n) = a^n$, *n* entier ≥ 0 et *a* réel.
   a. Écrire l'équation de filtrage.
   b. Déterminer la fonction de transfert à partir de la réponse impulsionnelle et donner la condition sur la valeur de *a* pour que le filtre soit stable.
   c. Représenter la réponse impulsionnelle dans le cas d'un filtre stable.
   d. Réécrire l'équation de filtrage à partir de la fonction de transfert.
2. Soit un filtre anti-causal défini par : $h(n) = b^n$, *n* entier < 0 et *b* réel
   a. Écrire l'équation de filtrage.
   b. Déterminer la fonction de transfert à partir de la réponse impulsionnelle et donner la condition sur la valeur de *b* pour que le filtre soit stable.
   c. Représenter la réponse impulsionnelle dans le cas d'un filtre stable.
   d. Réécrire l'équation de filtrage à partir de la fonction de transfert.

3. Soit $H(z) = \dfrac{-(8/3)z^{-1}}{1-(10/3)z^{-1}+z^{-2}}$ la fonction de transfert d'un filtre **stable.**
   a. Peut-on écrire directement l'équation de récurrence ? Justifier
   b. Indiquer si ce filtre est causal, anti-causal ou non causal (justifier).
   c. Calculer et représenter la réponse impulsionnelle de ce filtre en utilisant les résultats précédents.
   d. Si le filtre n'est pas causal,

      d.1 Proposer une modification possible sur la réponse impulsionnelle du filtre afin de pouvoir implémenter une forme causale de celui-ci.
      d.2 Discuter brièvement de l'erreur générée par votre solution (noter *A* la dynamique maximale du signal)

Chapitre 4 : La transformée de Fourier discrète

Pour une ***transformée de Fourier d'un signal à temps discret*** (ou transformée de Fourier à temps discret ou ***TFTD*** ou ***DTFT***), deux variables sont présentes : la variable *temps* (qui est discrète) et la variable *fréquence* (qui est **continue**). Afin de pouvoir la calculer à l'aide d'un ordinateur, il faut la discrétiser.

La ***transformée de Fourier discrète*** (***TFD*** ou ***DTF***) est une transformée de Fourier à *temps* discrets et à *fréquences* **discrètes**.

Si un signal est défini sur *N* échantillons, la transformée de Fourier sera définie sur *N* points fréquentiels espacés de $\Delta\nu = \nu_0 / N$.

Les calculs intervenant dans la TFD peuvent être accélérés en utilisant des algorithmes rapides, appelés algorithmes de transformée de Fourier rapide (TFR ou FFT).

TFD et TFR sont donc deux outils différents :

- la TFD est une véritable transformation,
- les TFRs sont des algorithmes de calcul.

4.1 Transformée de Fourier d'un signal discret

- **Rappel :**

La transformée de Fourier d'un signal discret (TFTD) est définie par :

$$TF[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-jn2\pi\nu} = X\left(e^{j2\pi\nu}\right)$$

$X\left(e^{j2\pi\nu}\right)$ étant périodique de période 1, la TF inverse est donnée par :

$$x(n) = \int_{-1/2}^{+1/2} X\left(e^{j2\pi\nu}\right) e^{jn2\pi\nu} d\nu$$

Le tableau suivant donne une liste des différentes transformées de Fourier usuelles.

- **Transformée de Fourier des fonctions les plus utilisées**

$x(n)$	$X\left(e^{j2\pi\nu}\right)$
$\delta(n)$	1
$\delta(n-n_0)$	$e^{-j\frac{2\pi n_0}{T}}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(2\pi\nu-2\pi k)$
$u(n)$	$\frac{1}{1-e^{-\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\pi\delta(2\pi\nu-2\pi k)$
$a^n u(n)\ (\lvert a\rvert<1)$	$\frac{1}{1-ae^{-2\pi\nu}}$
$(n+1)a^n u(n)\ (\lvert a\rvert<1)$	$\frac{1}{\left(1-ae^{-2\pi\nu}\right)^2}$
$x(n)=\begin{cases}1 \text{ si } 0\le n\le N\\ 0 \text{ ailleurs}\end{cases}$	$\frac{\sin\left(2\pi\nu(N+1)/2\right)}{\sin(2\pi\nu/2)}e^{-2\pi\nu N/2}$
$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X\left(e^{j2\pi\nu}\right)=\begin{cases}1 \text{ si } \lvert 2\pi\nu\rvert<2\pi\nu_c\\ 0 \text{ si } 2\pi\nu_c<\lvert 2\pi\nu\rvert\le 2\pi\end{cases}$
$e^{j\frac{2\pi n}{T_0}}$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(2\pi\nu-2\pi\nu_0+2\pi k)$
$\cos\left(j\frac{2\pi n}{T_0}+\phi\right)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\pi e^{-j\phi}\delta(2\pi\nu+2\pi\nu_0+2\pi k)+\pi e^{j\phi}\delta(2\pi\nu+2\pi\nu_0+2\pi k)\right]$
$\sin\left(j\frac{2\pi n}{T_0}+\phi\right)$	$j\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\pi e^{-j\phi}\delta(2\pi\nu+2\pi\nu_0+2\pi k)-\pi e^{j\phi}\delta(2\pi\nu+2\pi\nu_0+2\pi k)\right]$

Tableau 3 : Tableau des transformées de Fourier discrètes usuelles

4.2 Transformation de Fourier discrète d'un signal discret périodique

C'est en fait une série de Fourier discrète, analogue à la série de Fourier des signaux continus périodiques.

4.2.1 Définition

Soit le signal $\tilde{x}(n)$ périodique sur *N* échantillons. Du fait de la périodicité du signal, la transformée de Fourier est discrète.

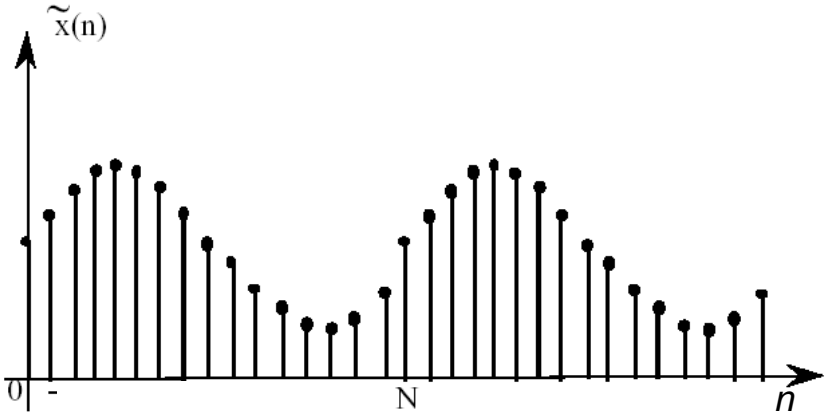


Figure 30 : Signal discret périodique

On définit la transformée de Fourier de ce signal périodique par :

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}, k = 0, \cdots, N-1 \tag{4.1}$$

En posant : $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, on obtient $\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn}$

- **Inversion de la transformation de Fourier (calcul de $\tilde{x}(n)$)**

$$\tilde{x}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}(n) e^{j2\pi\frac{kn}{N}}, n = 0, \cdots, N-1 \tag{4.2}$$

Remarque : On fera attention au facteur $1/N$.

Les deux relations (4.1) et (4.2) définissent respectivement la transformation de Fourier discrète et la transformée de Fourier discrète inverse pour des signaux discrets ***périodiques*** de période *N*.

La transformée de Fourier discrète de ce signal est alors :

$$\tilde{X}\left(e^{j2\pi\nu}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{X}(k) \delta\left(\nu - k\frac{\nu_0}{N}\right)$$

- **Echantillonnage du domaine fréquentielle**

La transformation de Fourier, restreinte à une période d'un signal discret périodique, s'écrit :

$$\tilde{X}\left(e^{j2\pi\nu}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-jn2\pi\nu}$$

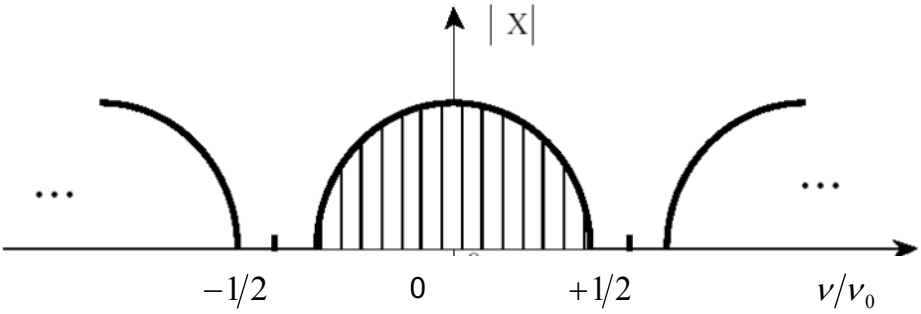


Figure 31 : Périodicité de la *TFD*

Divisons l'intervalle $[-1/2,+1/2[$ (intervalle fondamentale normalisé par rapport à ν_0) en *N* intervalles égaux (*N* impaire) : on échantillonne le spectre de $\tilde{x}(n)$ entre -$1/2$et $1/2$ à la cadence $1/N$.

Aux instants d'échantillonnage en fréquences normalisées, nous avons :

$$\nu_k = k/N \quad \text{avec} \quad -\frac{N-1}{2} < k < \frac{N-1}{2}$$

$$\tilde{X}(k) = \tilde{X}\left(e^{j2\pi\frac{k}{N}}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{n2\pi k}{N}} \tag{4.3}$$

4.2.2 Transformée de Fourier à partir de la transformée en Z

Soit le signal $x'(n)$ défini sur une période *N* par :

$$x'(n) = \tilde{x}(n) \text{ si } 0 \le n \le N-1$$
$$x'(n) = 0 \qquad \text{sinon}$$

Alors sa transformée en Z s'écrit :

$$\tilde{X}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) z^{-n}$$

D'où par comparaison avec (4.3):

$$\tilde{X}(k) = \tilde{X}(z)\Big|_{z=W_N^k}$$

Remarque : cette formule n'est vrai que si le cercle unité appartient au domaine de définition de $\tilde{X}(z)$.

4.2.3 Propriétés

- La TFD d'un signal périodique est elle-même périodique. En effet :

$$W_N^{k+mN} = e^{j2\pi\frac{k}{N}} e^{j2\pi m} = W_N^k$$

Donc :

$$\tilde{X}(k+N) = \tilde{X}(k)$$

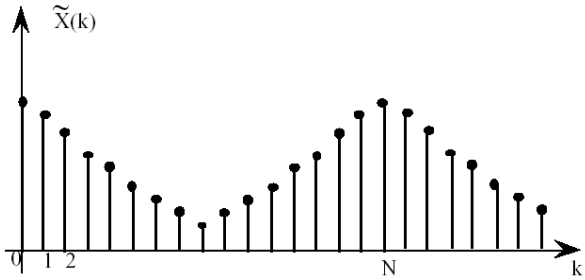


Figure 32 : TFD d'un signal périodique

- Linéairité $TFD[a\tilde{x}_1(n)+b\tilde{x}_2(n)] = a.TFD[\tilde{x}_1(n)]+b.TFD[\tilde{x}_2(n)]$
- Décalage en temps fréquence $\tilde{x}(n-n_0) \rightleftharpoons e^{-2j\pi\frac{kn_0}{N}}\tilde{X}(k)\tilde{x}(n-n_0)$
- Théorème de Parseval $\sum_{k=0}^{N-1}\left|\tilde{x}(k)^2\right| = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|\tilde{X}(k)^2\right|$

- <u>Exercice</u> : Démonstration du théorème de Parseval

Soit $x(k) = a_k e^{j\varphi(k)}$ un signal discret et *X(l)* sa transformée de Fourier discrète (TFD).

$$X(l) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi\frac{lk}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\varphi(k)} e^{-j2\pi\frac{lk}{N}}$$

$$x(k) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X(l) e^{j2\pi\frac{lk}{N}}$$

Soit $X'(q)$ la TFD de $x^*(k)$: $X'(q) = \sum_{p=0}^{N-1} a_p e^{-j\varphi(p)} e^{-j2\pi\frac{pq}{N}}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1}\left|x(k)\right|^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k)x^*(k) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X(l) e^{j2\pi\frac{lk}{N}}\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} X(q) e^{j2\pi\frac{qk}{N}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1} X(l)X(q)\left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{k}{N}(q+l)}\right] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } q+l \neq 0 \\ N & \text{si } q = -l \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc : $\sum_{k=0}^{N-1}\left|x(k)\right|^2 = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X(l)X(-l)$

Mais $X'(-l) = X^*(l) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{N-1}\left|x(k)\right|^2 = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\left|X(l)\right|^2$

- Propriété de symétrie

$$\boxed{\tilde{x}(n) \in \mathbb{R} \rightleftharpoons \tilde{X}(k) = \tilde{X}^*(N-k)}$$

- Produit de convolution circulaire

$$\boxed{\tilde{y}(n) = (\tilde{x}_1 * \tilde{x}_2)(n) = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n-i) \rightleftharpoons \tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)}$$

$\tilde{x}_1(k)$ **et** $\tilde{x}_2(k)$ **sont des signaux périodiques de période *N*.**

Démonstration :

$$\tilde{Y}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi j\frac{kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\tilde{x}_1(i)\tilde{x}_2(n-i)\right]e^{-2\pi j\frac{kn}{N}}$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\tilde{x}_1(i)\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_2(n-i)e^{-2\pi j\frac{kn}{N}}$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\tilde{x}_1(i)\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_2(n-i)e^{-2\pi j\frac{k(n-i)}{N}}e^{-2\pi j\frac{ki}{N}}$$

En posant $l = n - i$

$$\tilde{Y}(k) = \sum_{i=0}^{N-1}\tilde{x}_1(i)e^{-2\pi j\frac{ki}{N}}\sum_{l=-i}^{N-1-i}\tilde{x}_2(l)e^{-2\pi j\frac{kl}{N}}$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\tilde{x}_1(i)e^{-2\pi j\frac{ki}{N}}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{x}_2(l)e^{-2\pi j\frac{kl}{N}}$$

$$= \tilde{X}_1(k)\cdot\tilde{X}_2(k)$$

Interprétation géométrique :

On fait tourner sur le cylindre $\tilde{x}_2$ de *m*. On effectue les produits terme à terme et on somme. C'est alors la valeur de la convolution circulaire en *m*.

4.3 Transformation de Fourier discrète d'un signal discret NON périodique

4.3.1 Cas d'un signal de durée finie

La transformée de Fourier discrète d'un signal *x(n)* de durée *N* est définie par la relation :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

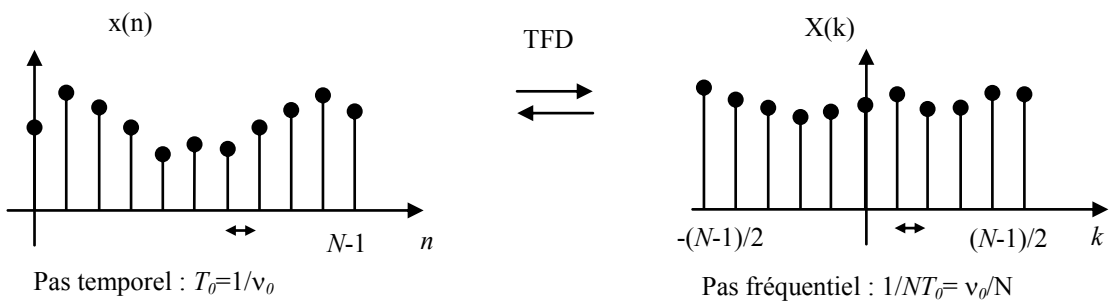


Figure 33 : TFD d'un signal à durée limitée

La transformée de Fourier inverse s'écrit sous la forme :

$$N \text{ impaire : } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)/2}^{N-1/2} X(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}} ; n = 0,\ldots,N-1$$

$$N \text{ paire : } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} X(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}} ; n = 0,\ldots,N-1$$

4.3.2 Signal de durée infinie

On ne peut pas définir exactement la TFD d'un signal à durée infinie. La TFD n'est alors définie qu'approximativement en limitant la durée du signal par un moyen *ad hoc*. La troncature la plus évidente consiste à ne conserver que *N* points de *x*(*n*). Autrement dit, cela revient à multiplier ce signal par une fenêtre rectangulaire. Cette solution présente le désavantage de créer des oscillations importantes dans le domaine fréquentiel. La solution idéale serait donc de multiplier le signal par une fenêtre dont la transformée de Fourier approche une impulsion de Dirac. Plusieurs fenêtres ont été élaborées, dont les oscillations s'atténuent généralement au détriment de la largeur du lobe principal.

4.3.2.1 Les fenêtres de pondération classiques

1. Bartlett $\quad w(n) = \begin{cases} \dfrac{2n}{N-1} & 0 \le n \le \dfrac{N-1}{2} \\ 2 - \dfrac{2n}{N-1} & \dfrac{N-1}{2} \le n \le N-1 \end{cases}$

2. Hanning $\quad w(n) = \dfrac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\dfrac{2\pi n}{N-1}\right)\right] \qquad 0 \le n \le N-1$

3. Hamming $\quad w(n) = 0,54 - 0,46\cos\left(\dfrac{2\pi n}{N-1}\right) \qquad 0 \le n \le N-1$

4. Blackman $\quad w(n) = 0,42 - 0,5\cos\left(\dfrac{2\pi n}{N-1}\right) + 0,08\cos\left(\dfrac{4\pi n}{N-1}\right) \qquad 0 \le n \le N-1$

5. Kaiser $\quad w(n) = \dfrac{I_0\left[\omega_a \sqrt{\left(\dfrac{N-1}{2}\right)^2 - \left(n - \dfrac{N-1}{2}\right)^2}\right]}{I_0 \cdot \left(\omega_a \cdot \dfrac{N-1}{2}\right)} \qquad 4 < \omega_a\left(\dfrac{N-1}{2}\right) < 9$

I_0 est la fonction de Bessel d'ordre zéro de première espèce: $I_0 = 1 + \sum_{m=1}^{M}\left(\dfrac{\left(x/2\right)^m}{m}\right)^2$

- *Remarque 1* : *w(n)* est maximale pour $\dfrac{N-1}{2}$
- *Remarque 2* : Pour avoir une fenêtre symétrique par rapport à 0, il faut effectuer le changement de variable *n* en $m = n - \dfrac{N-1}{2}$

4.3.2.2 Compromis Largeur du lobe principal-Atténuation des lobes secondaires

La figure suivante donne les caractéristiques des fenêtres de pondération les plus utilisées.

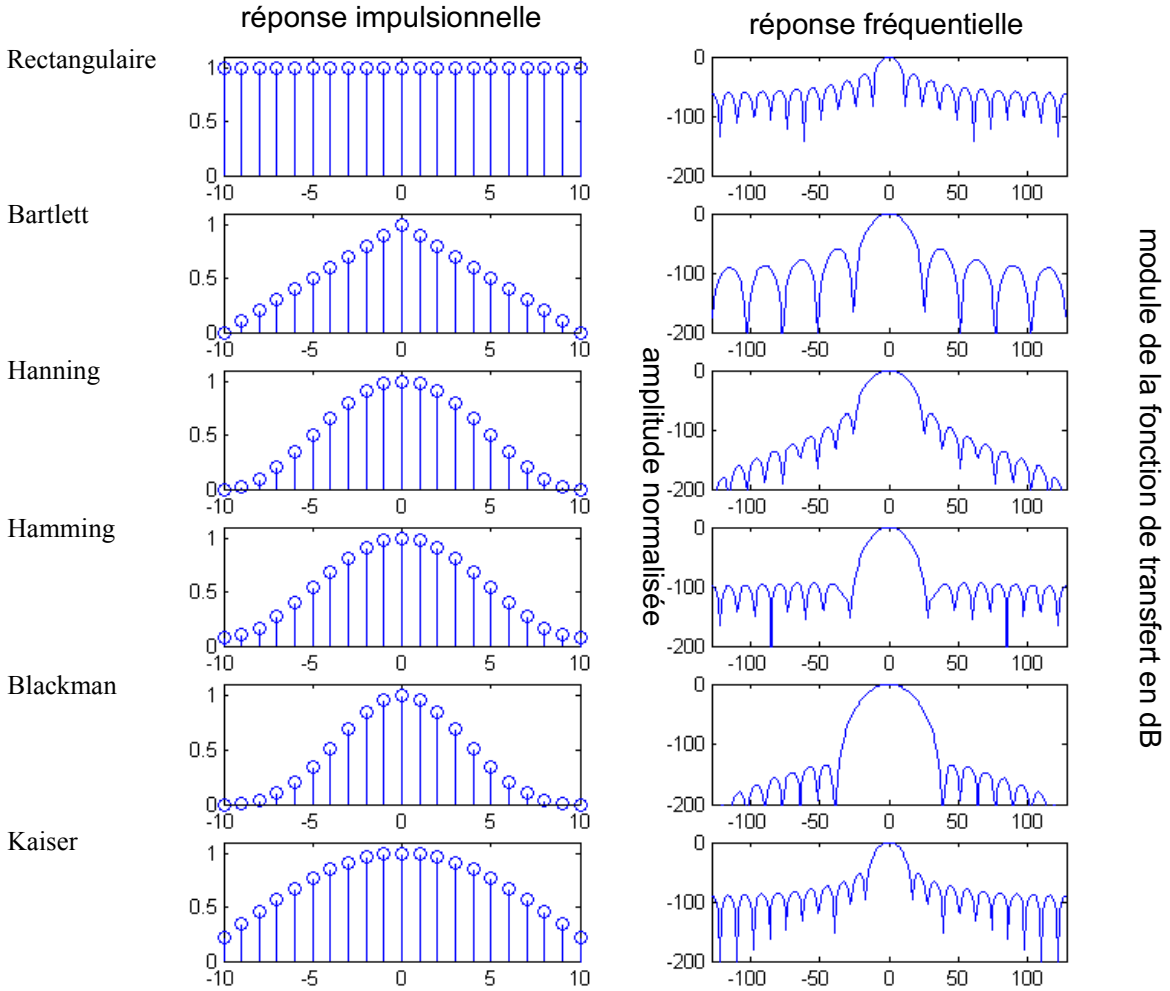


Figure 34 : Fenêtres de pondération

Le tableau suivant donne un aperçu des comparaisons intéressantes entre différentes fenêtres de pondération.

Fenêtres	Largeur du lobe principal	Atténuation des oscillations
Rectangulaire	relativement étroit	2ème lobe à -13 dB
Bartlett	plus large / fenêtre rectangulaire	2ème lobe à -27 dB
Hanning	Double / fenêtre rectangulaire	2ème lobe à -32 dB
Hamming	Double / fenêtre rectangulaire	2ème lobe à -43 dB
Blackman	plus large / fenêtre Hamming	2ème lobe à -58 dB

Tableau 4 : Comparaison des fenêtres

La fenêtre de Kaiser permet de prendre en compte le compromis largeur du lobe principal-atténuation des lobes secondaires en fixant le paramètre normalisé ω_a. En prenant ω_a de l'ordre de 4-5, on a une atténuation proche de celle de Hamming mais un lobe principal moins large. Avec ω_a de l'ordre de 9, le lobe central est plus large mais l'atténuation des lobes secondaires est de l'ordre de 90 dB.

4.3.3 Zéro padding

La TFD $X(k)$ se calcule sur un nombre N d'échantillons $x(n)$ du signal, et contient également N échantillons fréquentiels. Avec l'utilisation des algorithmes rapides de calcul, il peut être intéressant/nécessaire d'augmenter artificiellement le nombre d'échantillons sur lequel on les applique. Pour cela, on ajoute à la fin des N échantillons disponibles un certain nombre de zéros afin d'obtenir un nombre $M>N$ de valeurs traitées.

Plus on ajoute de zéros au signal d'entrée, plus on augmente la périodicité temporelle MT_0 du signal traité (pour une même période d'échantillonnage) et par conséquence, plus on **diminue le pas fréquentiel** $1/MT_0$ de la TFD. La **résolution** de la TFD s'en trouve ainsi grandement améliorée. Cependant, l'ajout de zéro n'apporte pas d'information supplémentaire sur le signal.

Soit $\{x(n)\}$, un signal échantillonné composé de 6 éléments, {1 1 1 1 0 0}, et représenté sur la figure suivante.

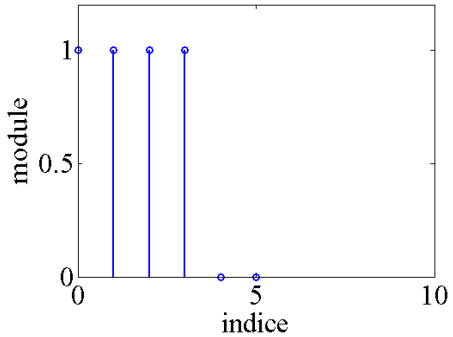


Figure 35 : Signal $\{x(n)\}$

Avant de calculer la TFD, nous avons ajouté successivement 2, 10, 26, 58, 122, 250, 506 zéros. La figure suivante montre les TFDs obtenues pour les différentes valeurs de M ainsi obtenues.

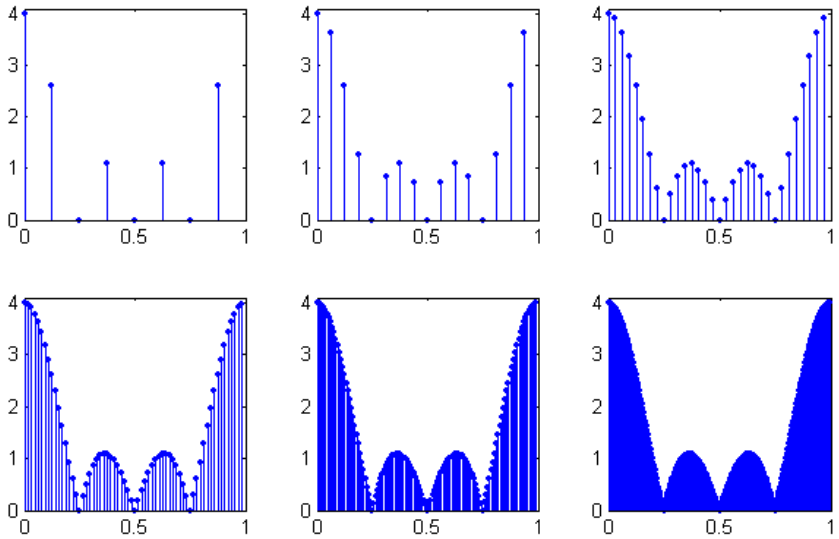


Figure 36 : TFD de $\{x(n)\}$ avec zéro-padding

Cet exemple montre qu'en ajoutant des zéros à la suite des échantillons de $\{x(n)\}$, sa TFD admet une meilleure résolution (mais aucune nouvelle information n'apparaît).

Cette opération appelée "zéro-padding" est souvent utilisée pour atteindre une durée N puissance de deux, car, comme nous le verrons plus loin, les algorithmes rapides de calcul de TFD utilisent des puissances de deux comme durée discrète des signaux.

4.3.4 Propriétés

Les propriétés de la TFD pour les signaux périodiques sont conservées ***exceptée la convolution circulaire.***

- **Convolution linéaire**

- Cas des signaux à durée finie

Soient $x_1(n)$ est un signal de durée N_1, et $x_2(n)$ de durée N_2 ; leur produit de convolution "linéaire" est de durée N_1+N_2-1 et est donnée par :

$$x_3(n)=\sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2(n-k),\ 0\le n\le N_1+N_2-2$$

alors N_1+N_2-1 est la longueur de la séquence $x_3(n)$. Par conséquent la longueur de $X_3(k)$ est également de longueur N_1+N_2-1.

- ***Calcul utilisant la TFD***

1- Calcul des TFDs sur N_1+N_2-1 points de $x_1(n)$ et $x_2(n)$.

2- Calcul du produit $X_3(k)=X_1(k)\cdot X_2(k)$ pour $0\le k\le N_1+N_2-2$ (en utilisant de préférence un algorithme rapide)

3- Calcul de la séquence de $x_3(n)$ par TFD inverse de $X_3(k)$

4.4 Transformée de Fourier Rapide (TFR ou FFT)

La transformée de Fourier discrète nous permet d'envisager des calculs numériques dans le domaine des fréquences, ce qui permettrait de nombreuses applications d'analyse spectrale. Malheureusement, le calcul direct par la TFD demande un temps prohibitif même pour nos calculateurs. Mais un jour, des algorithmes permettant le calcul de la TFD de manière rapide sont apparus. Ils ont permis de diminuer le temps de calcul. Le nombre d'opérations devient de l'ordre de $N\log_2 N$, et non $O(N^2)$ ce qui offre un gain de temps considérable pour des valeurs de *N* élevés

Chapitre 5 : Relations entre signaux continus et échantillonnés

5.1 Relations entre transformée en *Z* et transformée de Laplace

5.1.1 Première relation : transformée de Laplace d'un signal échantillonné

Soit *x*(*t*) un signal continu admettant une transformée de Laplace *X*(*p*).

Soit $x_e(t)$ le signal échantillonné obtenu à partir de *x*(*t*), admettant une transformée en *Z*, $X_e(z)$. La relation liant ces deux transformées dans le cas d'un signal échantillonné est donnée par :

$$\boxed{X_e(p) = X_e(z)\big|_{z=e^{pT_0}}}$$

5.1.2 Deuxième relation : transformées en Z et de Laplace

Nous allons établir une relation entre la transformée de Laplace d'un signal à temps continu et la transformée en Z de ce signal échantillonné à la cadence T_0.

Cas des signaux et systèmes causaux : $X(p) = L[x(t)]$

<u>*Rappel*</u> :

- *X*(*p*) est holomorphe dans un domaine *D* des complexes, défini par $\Re(p) \geq \tau_0$. Donc les pôles de *X*(*p*), s'ils existent, sont à gauche de la droite d'équation $\Re(p) = \tau_0$

Figure 37 : Pôles de *X*(*p*)

- La transformée de Laplace inverse est donnée par :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\tau_1 - j\infty}^{\tau_1 + j\infty} X(p)e^{pt}dp \quad \text{avec } \tau_1 > \tau_0$$

<u>*Application au calcul de la transformée en Z d'un signal ou d'un système causal*</u>

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT_0)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi j}\int_{\tau_1 - j\infty}^{\tau_1 + j\infty} X(p)e^{pnT_0}dp\right)z^{-n}$$

$$X(z)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\tau_1-j\infty}^{\tau_1+j\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{pnT_0}z^{-1}\right)^n\right)X(p)\,dp$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{pnT_0}z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-e^{pT_0}z^{-1}} \text{ pour } |z|>\left|e^{pT_0}\right|$$

Soit en intégrant sur L : $|z|>e^{\tau_1 T_0}$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\tau_1-j\infty}^{\tau_1+j\infty}\frac{X(p)}{1-e^{T_0}z^{-1}}\,dp$$

- Recherche des pôles en *p* de $\dfrac{1}{1-e^{pT_0}z^{-1}}$

Posons $z=e^{uT_0}, u\in\mathbb{C}$, alors $e^{(p-u)T_0}=1=e^{j2k\pi}$

$$\Rightarrow p=u+j\frac{k2\pi}{T_0}$$

Or $|z|>\left|e^{pT_0}\right|\Leftrightarrow\left|e^{uT_0}\right|>\left|e^{pT_0}\right|$

Soit : $e^{\Re(u)T_0}>e^{\Re(p)T_0}$ et :

$$\Re(u)>\Re(p)=\tau_1 \text{ sur L}$$

Figure 38 : Pôles de $\dfrac{1}{1-e^{pT_0}z^{-1}}$

Les pôles cherchés sont répartis sur la droite d'équation $\Re(u)=\Re(p)$ qui se trouve à droite de *L*. En fermant le contour *L* par un "demi-cercle infini à gauche", il vient :

$$\boxed{X(z)=\sum_{\text{pôles de } X(p)}\operatorname{Res}\left[\frac{X(p)}{1-e^{pT_0}z^{-1}}\right]} \qquad (5.1)$$

5.2 Mise en cascade de systèmes échantillonnés

5.2.1 Fonction de transfert en Z d'un système échantillonné

Définition :

Un système échantillonné est un système continu, défini par sa fonction de transfert *H(p)* dont l'entrée et la sortie sont échantillonnées à la même cadence T_0 de manière synchrone.

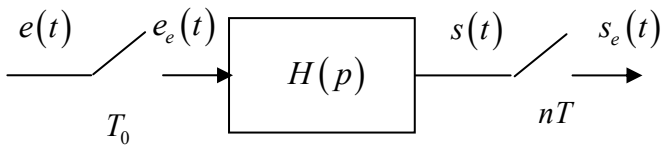


Figure 39 : Système échantillonné

$$s = h \otimes e_e = h \otimes \sum_n e(nT_0)\delta_{nT_0} = \sum_n e(nT_0)\left[\delta_{nT_0} \otimes h\right]$$

Donc :

$$s(t) = \sum_n e(nT_0)h(t - nT_0)$$

$$s(kT_0) = \sum_n e(nT_0)h\left[(k-n)T_0\right]$$

Il vient donc :

$$s_e = \sum_n s(kT_0)\delta_{kT_0} = \sum_k \left(\sum_n e(nT_0)h\left[(k-n)T_0\right]\right)\delta_{kT_0}$$

$$= \sum_n \left(\sum_k h\left[(k-n)T_0\right]\delta_{kT_0}\right)e(nT_0)$$

La convolution est distributive par rapport à l'addition et de plus

$$\delta_{nT_0} = \delta_{(k-n)T_0} \otimes \delta_{nT_0}$$

Donc :

$$s_e = \sum_n \left(\sum_k h[(k-n)T_0]\delta_{(k-n)T_0} \otimes \delta_{nT_0}\right)e(nT_0)$$

En posant $m = k - n$:

$$s_e = \left[\sum_n e(nT_0)\delta_{nT_0}\right] \otimes \left[\sum_m h(mT_0)\delta_{mT_0}\right]$$

Soit :

$$s_e = \left[\sum_n e(nT_0)\delta_{nT_0}\right] \otimes \left[\sum_m h(mT_0)\delta_{mT_0}\right]$$

Le filtre échantillonné est équivalent au filtre discret dont la réponse impulsionnelle est la réponse impulsionnelle échantillonnée du filtre continu.

$$S(z)=E(z)\cdot H(z) \text{ avec (5.1) } H(z)=\sum_{\text{pôles de } H(p)} \operatorname{Res}\left[\frac{H(p)}{1-e^{pT_0}z^{-1}}\right]$$

5.2.2 Application : mise en cascade

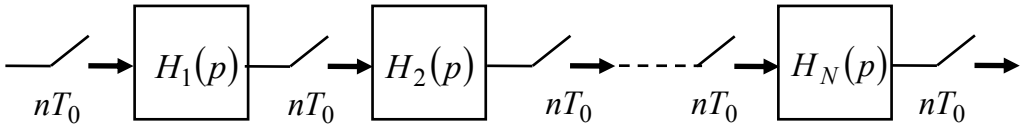


Figure 40 : Mise en cascade de systèmes échantillonnés

L'ensemble est équivalent au filtre discret de fonction de transfert :

$$\boxed{H(z)=H_1(z)\cdot H_2(z)\cdots H_N(z)}$$

Remarque

Dans le cas où il n'y pas d'échantillonnage entre $H_1(p)$ et $H_2(p)$.

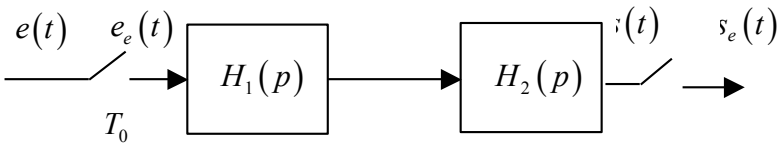


Figure 41 : Cas où seul deux échantillonneurs sont présents

La fonction de transfert équivalente est $\boxed{H'(z)=Z\left[H_1(p)\cdot H_2(p)\right]}$

En général, $H'(z)\neq H(z)$

5.3 Reconstruction d'un signal continu

5.3.1 Bloqueur d'ordre 0

Figure 42 : Reconstruction du signal au moyen d'un bloqueur d'ordre 0

s(*t*) est approché par le signal :

$$g(t) = s(kT_0) \qquad kT_0 < t \le (k+1)T_0$$

La réponse impulsionnelle du bloqueur d'ordre 0 est :

$$\begin{cases} g_0(t) = 1 & \text{si } 0 < t \le T_0 \\ \quad\;\; = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sa fonction de transfert est donc :

$$G_0(p) = \int_0^{T_0} e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-pT_0}}{p}$$

5.3.2 Application

Le bloqueur d'ordre 0 est utilisé pour commander un système continu par un signal discret.

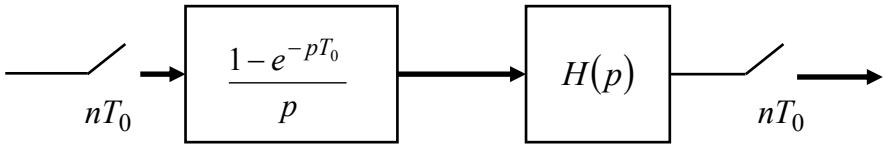


Figure 43 : Bloqueur commandant un système continu

schéma équivalent :

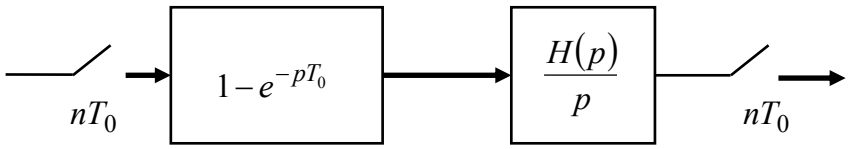


Figure 44 : Schéma équivalent

Or

1 = Identité et e^{pT_0} = retard pur de T_0, on peut donc introduire un échantillonneur entre les deux fonctions de transfert.

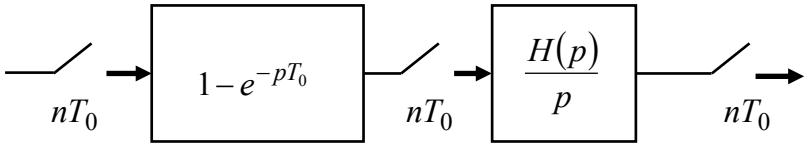


Figure 45 : Introduction d'un échantillonneur

Et finalement, puisque $Z\left[1-e^{-pT_0}\right] = 1 - z^{-1}$, on obtient un modèle équivalent dans le domaine discret du système continu commandé par un signal discret. Cette modélisation est souvent plus facile pour analyser le fonctionnement du système continu

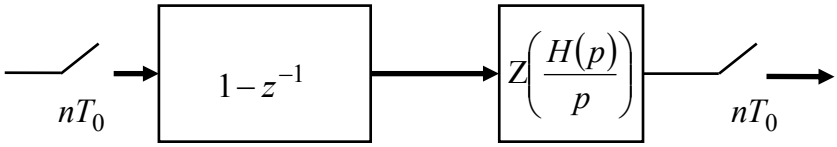


Figure 46 : Schéma dans le domaine en Z

Chapitre 6 : Filtrage Numérique

6.1 Introduction

A une séquence d'échantillons d'un signal d'entrée à temps discrets $x(n)$, un filtre numérique, défini par sa réponse impulsionnelle $h(n)$ ou sa fonction de transfert $H(z)$, répond par une séquence d'échantillons d'un signal de sortie $y(n)$.

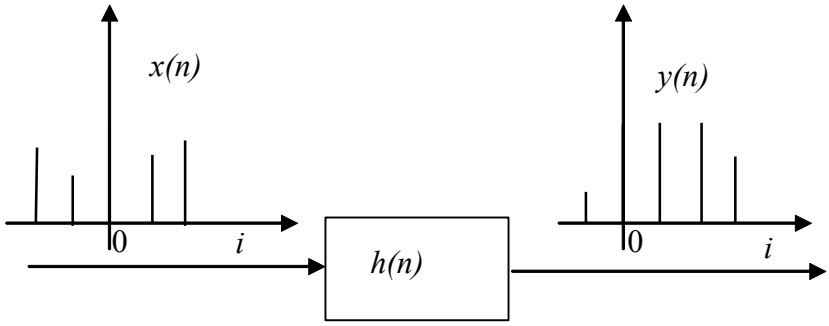


Figure 47 : Exemple de filtrage

Il existe de nombreuses applications du filtrage numérique. On peut citer par exemple la réduction de bruits dans des signaux recueillis à la sortie d'un capteur, la mise en forme d'une porteuse modulée ou encore la synthèse de la parole.

6.2 Représentation d'un filtre numérique

Un filtre numérique peut être représenté sous 3 formes :

- sa fonction de transfert,
- sa réponse impulsionnelle,
- son équation aux différences.

6.2.1 Fonction de transfert

Ce mode de représentation est le plus utilisé. Le signal d'entrée et de sortie sont exprimés dans le domaine de la transformée en Z. D'où la relation $Y(z)=H(z)\cdot X(z)$ pour définir la fonction de filtrage. On s'intéresse à la fonction $H(z)$ qui caractérise le filtre (chapitre 3) :

$$H(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{N} b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{M} a_i z^{-i}} \qquad (6.1)$$

où $N(z)$ est le numérateur et $D(z)$ le dénominateur.

Si $H(z)$ possède des pôles et des zéros, il s'agira d'un filtre ***RII (Réponse Impulsionnelle Infinie)***. La notation anglo-saxonne est ***IIR (Infinite Impulse Response)***

Si $N(z)=1$, il s'agira d'un filtre tous pôles.

Si $H(z)$ ne possède que des zéros, il s'agira d'un filtre ***RIF (Réponse Impulsionnelle Finie)***. La notation anglo-saxonne est ***FIR (Finite Impulse Response)***

En définissant les pôles (p_i) et les zéros (z_i), on peut écrire la fonction $H(z)$ sous la forme appelée ***forme directe***:

$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{i=1}^{N}(z - z_i)}{\prod_{i=1}^{M}(z - p_i)}$$

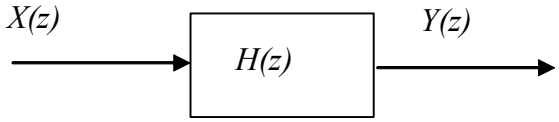


Figure 48 : Forme directe

On rappelle que la stabilité du filtre est déterminée par l'appartenance des pôles au cercle unité (c.-à-d. $|p_i| < 1$) et que des zéros appartenant au cercle unité caractériseront un filtre à minimum de phase.

La forme directe peut être décomposée en produit ou en somme d'ordre inférieur (en général 2 nommé biquad).

La représentation à l'aide d'une somme est appelée ***forme parallèle*** et est définie à l'aide de l'équation suivante :

$$H(z) = \sum_{i=1}^{M} H_i(z) = \sum_{i=1}^{M} \frac{b_0^i + b_1^i \cdot z^{-1} + b_2^i \cdot z^{-2}}{a_0^i + a_1^i \cdot z^{-1} + a_2^i \cdot z^{-2}}$$

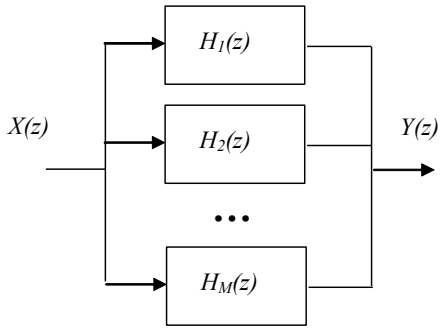


Figure 49 : Forme parallèle

La représentation à l'aide d'un produit est appelée ***forme cascade*** et est définie à l'aide de l'équation suivante :

$$H(z) = \prod_{i=1}^{M} H_i(z) = \prod_{i=1}^{M} \frac{b_0^i + b_1^i \cdot z^{-1} + b_2^i \cdot z^{-2}}{a_0^i + a_1^i \cdot z^{-1} + a_2^i \cdot z^{-2}}$$

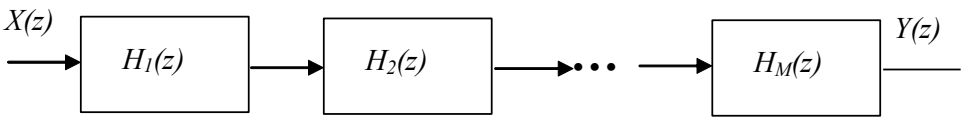


Figure 50 : Forme cascade ou série

6.2.2 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle, $h(n)$, est la transformée inverse de $H(z)$. Elle se calcule à l'aide de l'une des techniques présentées au paragraphe 3.5.

La sortie du filtre, $y(n)$, est la convolution du signal d'entrée, $x(n)$, par la réponse impulsionnelle du filtre, $h(n)$, soit :

$$y(n) = (x * h)(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

Dans le cas où $h(n)$ est à support infini, le filtre est de type RII.

Dans le cas où $h(n)$ est à support fini, le filtre est de type RIF.

6.2.3 Equation aux différences

Une transformée en Z inverse de (6.1) permet d'aboutir à l'équation suivante dite « équation aux différences » :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} b_i \cdot x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot y(n-i)$$

On distingue dans cette équation deux sommes, la première qui dépend de l'entrée courante et des entrées précédentes et la deuxième qui dépend des valeurs précédentes de la sortie.

Si les a_i sont non nuls, on parle de ***filtres récursifs***.

Si les a_i sont nuls, on parle de ***filtres non récursifs*** ou ***transverses***.

6.3 Spécification d'un filtre numérique

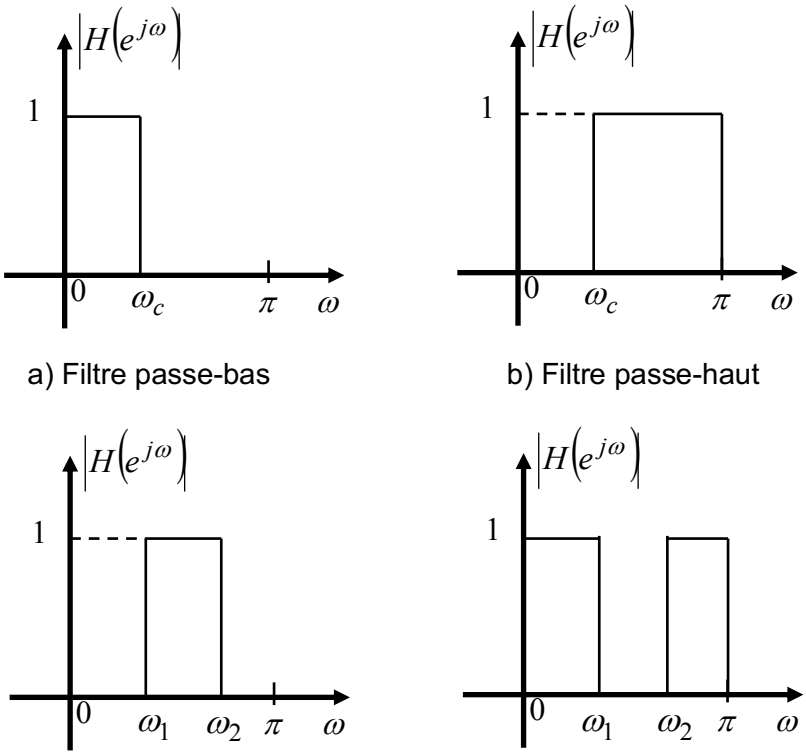
6.3.1 Généralité

On distingue 4 filtres de bases :

- Les ***filtres passe-bas*** : qui laissent passer les fréquences inférieures à une fréquence de coupure ν_c et bloquent celles qui lui sont supérieures.
- Les filtres ***passe-haut*** : qui bloquent les fréquences inférieures à une fréquence de coupure ν_c et laissent passer celles qui lui sont supérieures.
- Les filtres ***passe-bande*** : qui laissent passer les fréquences dans une certaine bande de fréquences $[\nu_1, \nu_2]$ autour de ν_{ce} et bloquent les autres fréquences.

- Les filtres ***réjecteur de bande*** : qui bloquent les fréquences dans une certaine bande de fréquences $[\nu_1, \nu_2]$ autour de ν_{ce} et laissent passer les autres fréquences.

Souvent la réponse fréquentielle, souvent nommée ***gabarit***, est représentée en considérant la pulsation ($\omega = 2\pi\nu$) et non la fréquence (ν).



a) Filtre passe-bas

b) Filtre passe-haut

c) Filtre passe-bande

d) Filtre réjecteur de bande

Figure 51 : Réponses fréquentielles idéales

Les filtres représentés ci-dessus sont idéaux. Dans un cas réel, cette configuration n'est pas possible. Le passage entre la zone passante et la zone atténuée est appelé "***zone de transition***" dont la largeur définie la ***sélectivité du filtre***. Les ***bandes passantes et atténuées*** ne sont pas idéales. Elles contiennent des ***ondulations*** qui sont conditionnées par les paramètres d'ondulation en bande passante et d'atténuation.

Comme pour les filtres analogiques, la spécification d'un filtre est réalisée à partir d'un gabarit fréquentiel normalisé. Celui-ci est défini entre 0 et 0,5 en fréquence normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage ν_0, 0 et 1 en fréquence normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage $\nu_0/2$ ou 0 et π en pulsation normalisée par rapport à la pulsation d'échantillonnage ω_0.

6.3.2 Spécification des filtres passe-bas et passe-haut

En pratique, un filtre passe-bas possède trois zones :

- la bande passante ($0 \le \omega \le \omega_p$)
- la bande de transition ($\omega_p \le \omega \le \omega_a$)
- la bande atténuée ou coupée ($\omega_a \le \omega \le \pi$)

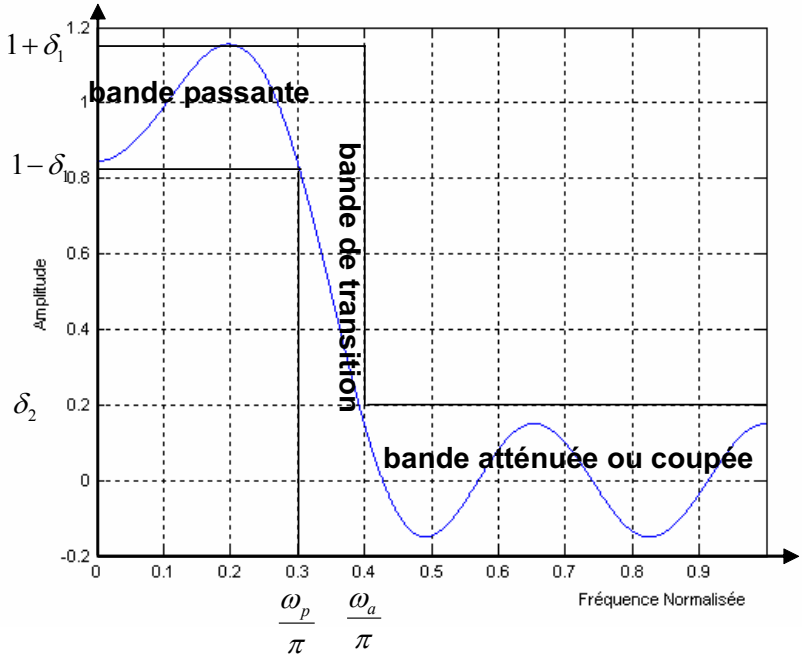


Figure 52 : Gabarit fréquentiel d'un filtre passe-bas

6.3.3 Spécification des filtres passe-bande et réjecteur de bande

Un filtre passe-bande possède :

- une bande passante ($\omega_{p^-} \leq \omega \leq \omega_{p^+}$)
- deux bandes de transition
- deux bandes atténués ($0 \leq \omega \leq \omega_{a^-}$ et $\omega_{a^+} \leq \omega \leq \pi$)

Un filtre réjecteur de bande verrait ses bandes atténuées et passantes inversées.

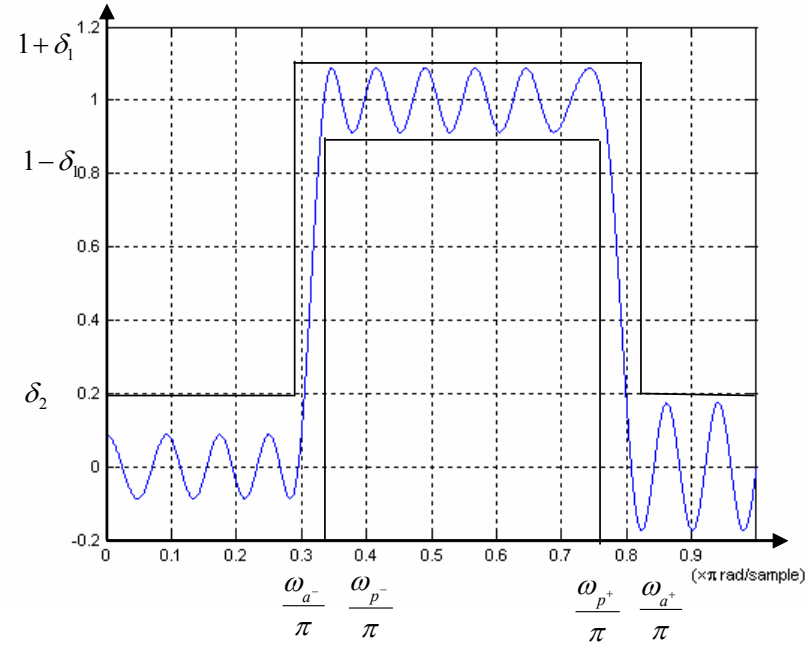


Figure 53 : Gabarit fréquentiel linéaire d'un filtre passe-bande

6.3.4 Résumé des paramètres utilisés

Caractéristique	Passe-bas	Passe-haut	Passe-bande	Réjecteur de bande
Sélectivité *s*	$\frac{\omega_p}{\omega_a}$	$\frac{\omega_a}{\omega_p}$	$\frac{\omega_{p^+}-\omega_{p^-}}{\omega_{a^+}-\omega_{a^-}}$	$\frac{\omega_{a^+}-\omega_{a^-}}{\omega_{p^+}-\omega_{p^-}}$
Ondulation	δ_1	δ_1	δ_1	δ_1
Atténuation	δ_2	δ_2	δ_2	δ_2
Fréquence centrale ω_{ce}			$\sqrt{\omega_{p^+}\cdot\omega_{p^-}}$	$\sqrt{\omega_{p^+}\cdot\omega_{p^-}}$
Largeur de bande *B*			$\frac{\omega_{p^+}-\omega_{p^-}}{\omega_{ce}}$	$\frac{\omega_{p^+}-\omega_{p^-}}{\omega_{ce}}$

Tableau 5 : Paramètres de spécification d'un filtre numérique

6.4 Classification des filtres numériques

6.4.1 Généralité

Les filtres numériques sont classés, en général suivant deux critères :

- La longueur de la réponse impulsionnelle : infinie (filtres RII) ou finie (filtres RIF).
- Le type de représentation ou de structure qui peut être récursif ou non récursif.

En règle générale, le filtre récursif (resp. filtre non récursif) est équivalent à un filtre RII (resp. RIF).

6.4.2 Filtres non récursifs RIF

Les filtres RIF ne peuvent pas être dérivés des filtres analogiques. Cependant, grâce à leurs propriétés (***phase linéaire***, stabilité, flexibilité), ce sont les plus utilisés.

La fonction de transfert d'un filtre RIF et son équation aux différences sont définies par :

$$H(z)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} \qquad y(n)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i \cdot x(n-i)$$

où N est la longueur de la réponse impulsionnelle.

Les principales propriétés des filtres RIF sont :

- un nombre de coefficients supérieur à celui d'un filtre RII pour un même gabarit. Ceci entraîne un volume de calcul et donc un temps de traitement temps réel qui peuvent être nettement plus importants que pour le filtre RII.
- une grande stabilité.
- une phase qui peut être choisie linéaire.

6.4.3 Filtres récursifs

La fonction de transfert d'un filtre RII et son équation aux différences sont définies par :

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{M-1} a_i z^{-i}} \qquad y(n)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i)-\sum_{i=1}^{M-1} a_i y(n-i)$$

- Si $N(z)$ n'est pas divisible par $D(z)$, alors $H(z)$ est un filtre RII et peut être redéfini sous la forme : $H(z)=\sum_{i=0}^{+\infty} h_n z^{-i}$
- Si $N(z)$ est divisible par $D(z)$, alors $H(z)$ est un filtre RIF et peut être redéfinie par : $H(z)=\sum_{i=0}^{N} h_n z^{-i}$.

Les principales propriétés des filtres récursifs sont :

- une bande de transition qui peut être étroite,
- des méthodes de synthèse issue des méthodes utilisées pour les filtres analogiques,
- une instabilité possible générée par la quantification des coefficients du filtre lors de l'implémentation sur processeur lorsque les pôles sont proches du cercle unité.

6.5 Résumé des types de filtres numériques causaux

Appellation	Fonction de transfert	Réponse impulsion nelle (RI)	Equation aux différences
Filtre RIF/non récursif/transverse	$H(z)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}$	$h(n)\neq 0 \quad n=0:N-1$	$y(n)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i \cdot x(n-i)$
Filtre RII/récursif	$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{M-1} a_i z^{-i}}$	$h(n)\neq 0 \quad \forall n\geq 0$	$y(n)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i)-\sum_{i=1}^{M-1} a_i y(n-i)$

Tableau 6 : Caractérisation des filtres numériques causaux

6.6 Structure des filtres RII et RIF

6.6.1 Généralité

La structure d'un filtre est un graphe flots de données (GFD) dont :

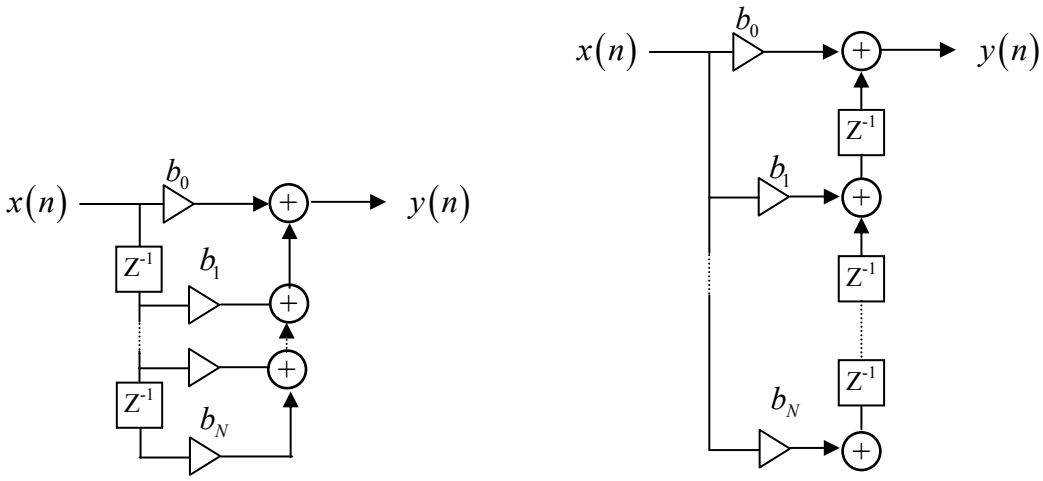
- les nœuds représentent les opérations (un cercle contenant un + pour l'addition, un triangle associés aux coefficients multiplicandes pour la multiplication)
- les arcs représentent les dépendances. Certains arcs sont pondérés par un coefficient z^{-1} qui permet de représenter un retard d'une période d'échantillonnage. Ce coefficient est vu comme un registre à décalage.

6.6.2 Structure des filtres RIF

L'équation d'un filtre RIF peut s'écrire :

$$y(n)=\sum_{i=0}^{N} b_i \cdot x(n-i)=b_0 \cdot x(n)+b_1 \cdot x(n-1)+\ldots+b_N \cdot x(n-N)$$

On en déduit les ***structures directe*** et ***transposée*** du filtre RIF suivantes :



a) structure directe b) structure transposée

Figure 54 : Structures des filtres RIF

Un filtre RIF à *N*+1 coefficients nécessite *N*+1 multiplications et *N* additions pour chaque échantillon à filtrer. La complexité peut s'exprimer en nombre de multiplication-accumulation (MAC), qui dans le cas de ce filtre RIF vaut *N*+1. Le coût mémoire est de 2(*N*+1) (*N*+1 points du vecteur d'entrée et *N*+1 coefficients b_i).

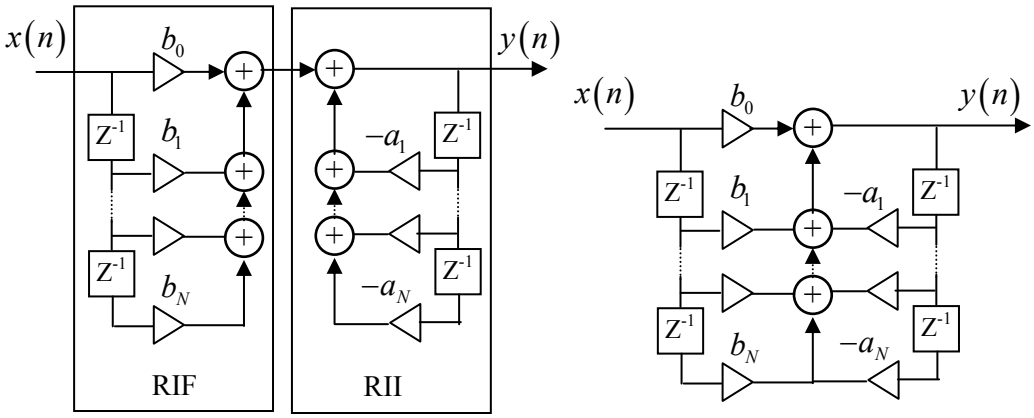
Dans le cas d'un filtrage temps réel, il faut que le temps de calcul de la réponse, *N*+1 temps de cycle du processeur, soit inférieur à la période d'échantillonnage.

6.6.3 Structure des filtres RII

L'équation de la fonction de transfert montre que l'on peut représenter un filtre RII comme le produit de deux structures (un filtre RIF $N(z)$ suivi d'un filtre RII tout pôle $1/D(z)$)

$$H(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\left[N(z)\right]\cdot\left[\frac{1}{D(z)}\right]=\left[\sum_{i=0}^{N} b_i z^{-i}\right]\cdot\left[\frac{1}{1+\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}\right]$$

La structure directe d'un filtre RII est obtenue en mettant en cascade un filtre RIF et un filtre RII (tout pôle). On retrouve alors la forme directe habituelle.



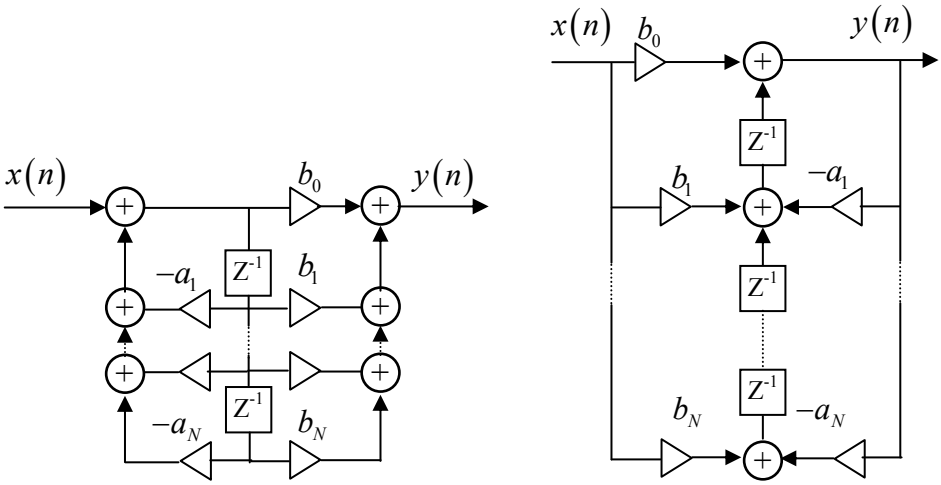
a) cascade b) structure directe

Figure 55 : Structures des filtres RIF

Il est possible de représenter différemment un filtre RII en utilisant la propriété de commutativité de la multiplication.

$$H(z)=\left[\frac{1}{1+\sum_{i=0}^{N}a_i z^{-i}}\right]\cdot\left[\sum_{i=0}^{N}b_i z^{-i}\right]$$

On peut échanger les 2 blocs RIF et RII de la figure précédente. Les deux lignes à retard peuvent être réunies et formées un vecteur de registre.



a) Structure canonique directe b) structure canonique transposées

Figure 56 : Structures canoniques des filtres RII

Un filtre RII nécessite 2*N*+1 multiplications, 2*N* additions par chaque nouvel échantillon à filtrer (soit 2*N*+1 MAC). Le coût mémoire d'un filtre RII en structure directe est de 4*N*+3 (2*N*+1 coefficients, 2(*N*+1) mémoires).

La structure canonique permet de diminuer le coût mémoire à *N*+1 points.

Dans le cas d'un filtrage temps réel, il faut que le temps de calcul de la réponse, 2*N*+1 temps de cycle du processeur, soit inférieur à la période d'échantillonnage.

6.7 Autres structures

6.7.1 Structure cascade

H(z) est factorisé sous la forme :

$$H(z)=\prod_{i=1}^{N} H_i(z) \text{ avec } H_i(z)=\frac{1+a_1^i z^{-1}+a_2^i z^{-2}}{1+b_1^i z^{-1}+b_2^i z^{-2}}$$

Les filtres $H_i(z)$ du deuxième ordre ou ***biquad*** sont réalisés en structure canonique et mis en cascade :

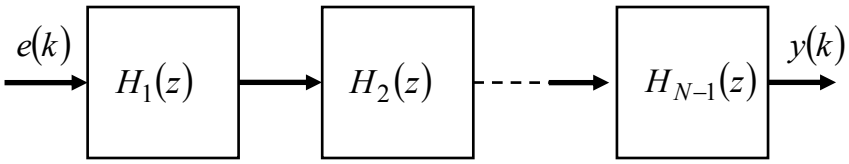


Figure 57 : Structure cascade

6.7.2 Structure parallèle

Ici, *H*(*z*) est décomposé en éléments simples du deuxième ordre :

$$H(z)=\sum_{j=1}^{N} H_j(z)$$

Les filtres $H_i(z)$ réalisés en structure canonique sont mis en parallèle :

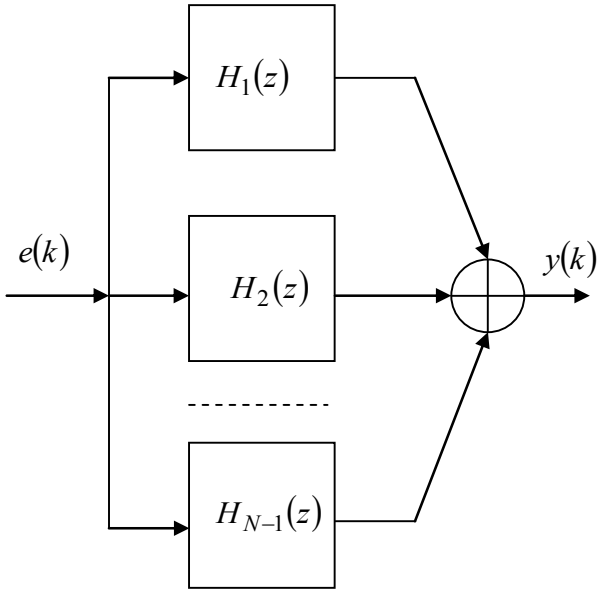


Figure 58 : Structure parallèle

La structure parallèle présente, par rapport à la structure cascade, l'avantage d'être moins sensible à une détérioration des performances d'un des filtres du deuxième ordre.

6.8 Petite classe 3 : Transformée de Fourier Discrète et filtres numériques

Exercice 1 : TFTD et TFD

On rappelle l'équation de la Transformée de Fourrier des signaux à Temps Discret (TFTD ou DTFT) :

$$X(\nu)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j2\pi n\frac{\nu}{\nu_0}}$$ (**ν_0 : fréquence d'échantillonnage**)

Soit d'autre part le signal discret définit par : $e(n)=\delta(n-1)+2\delta(n)+\delta(n+1)$.

1. Représenter graphiquement *e*(*n*).

2. Calculer $E(\nu)$, TFTD de *e*(*n*). Tracer $|E(\nu)|$ dans l'intervalle $\pm\nu_0/2$.

On rappelle l'équation de la Transformée de Fourrier Discrète (TFD ou DFT) à N points (N impaire) :

$$X(k\Delta\nu)=\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{+\frac{N-1}{2}}\tilde{x}(n)e^{-j2\pi\frac{kn\Delta\nu}{\nu_0}}=\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{+\frac{N-1}{2}}\tilde{x}(n)e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$$ ($\Delta\nu=\nu_0/N$: pas fréquentiel)

3. Donner les conditions d'application de la TFD (signification du ~ dans la formule).

4. Calculer $E(k\Delta\nu)$, TFD à **3 points** de *e*(*n*). Tracer $|E(k\Delta\nu)|$ dans l'intervalle $\pm\nu_0/2$.

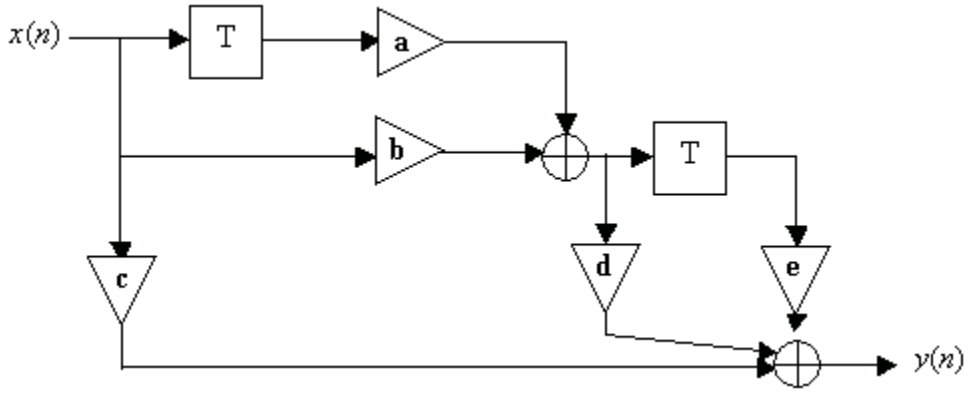
5. Calculer $E(k\Delta\nu)$, TFD à **5 points** de *e*(*n*). Tracer $|E(k\Delta\nu)|$ dans l'intervalle $\pm\nu_0/2$ **.** Commentaires.

   Quel nom donne-t-on à cette technique ?

6. On fait maintenant passer le signal *e*(*n*) dans un élévateur de fréquence d'échantillonnage de rapport R=2. Soit *y*(*m*) le signal ainsi obtenu. Tracer *y*(*m*). Calculer $Y(\nu)$, TFTD de *y*(*m*) en fonction de ν et de ν_0 . Conclusion ?

<u>Exercice 2 :</u> Filtrage

Soit le système :



1. Déterminer l'équation aux différences et en déduire sa nature (ordre, causalité, linéarité, invariance, récursivité). Discuter quant à sa stabilité.
2. Donner les expressions de l'équation de filtrage, de la fonction de transfert et de la réponse impulsionnelle.
3. Donner une structure directe du filtre ci-dessus.

<u>Exercice 3 :</u> Convolution de deux signaux de durée finie

Soit le signal $\begin{cases} x_1(n) = 1 & \text{si } 0 \le n \le N-1 \\ x_1(n) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Donner l'expressions de sa Transformée de Fourier Discrète, $X_1(k)$, pour *N*=8 points.
2. Donner l'expression de $X_3(k) = X_1(k).X_1(k)$, puis de $x_3(n) = TFD^{-1}[X_3(k)]$.
3. Peut-on dire que $TFD^{-1}[X_1(k).X_1(k)] = TFD^{-1}[X_1(k)] * TFD^{-1}[X_1(k)]$? Argumenter votre réponse (penser aux hypothèses faites pour définir la TFD).

Chapitre 7 : Synthèse des filtres RII

7.1 Rappel Filtrage analogique

7.1.1 Rappel

La synthèse d'un filtre numérique consiste à définir une fonction de transfert $H(z)$ correspondant à une spécification qui est définie sous la forme d'un gabarit.
Il existe plusieurs méthodes pour déterminer cette fonction :

- Utilisation des méthodes de synthèse des filtres analogiques aboutissant à une fonction $H(p)$. Cette fonction permet de passer du plan *p* au plan *z*.
- Une synthèse directe en *z* qui suit le principe de synthèse des filtres analogiques.
- Des méthodes d'optimisation issue de l'analyse numérique. On recherche une fonction $H(z)$ qui s'approche au mieux d'une fonction prototype.

Avant de présenter différentes méthodes de synthèse de filtre, on effectue un rappel sur les filtres analogiques.

7.1.2 Parallèle entre la synthèse d'un filtre analogique et numérique

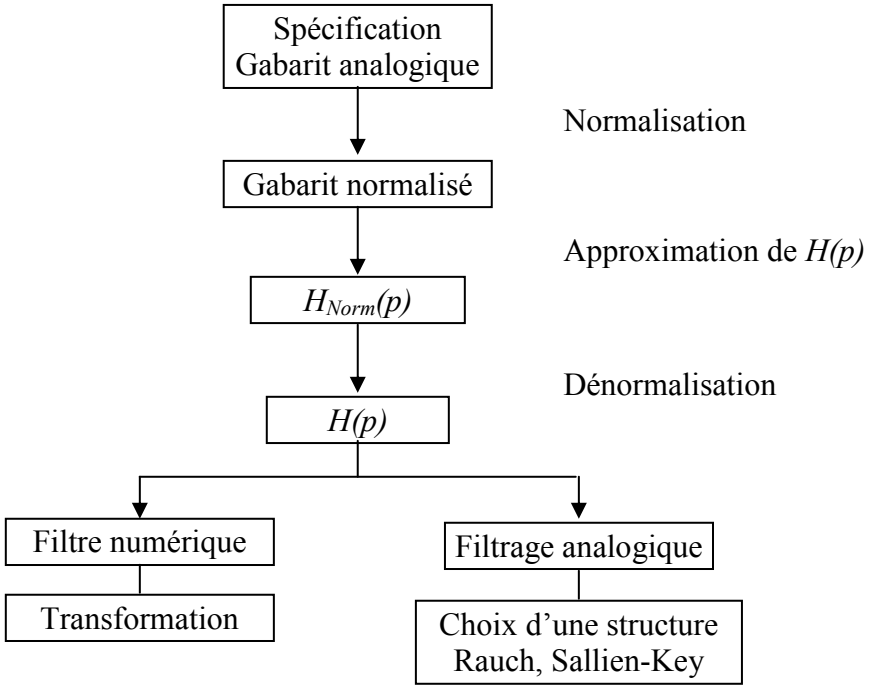


Figure 59 : Méthodologie de synthèse de filtres analogiques et numériques

- **<u>Dénormalisation</u>**

Cette étape permet de passer de la fonction de transfert normalisée d'un passe-bas, $H_{Norm}(p_N)$, à une fonction de transfert du type de filtre recherché $H(p)$. Cette dénormalisation s'effectue en remplaçant p_N par $f(p)$ défini dans le tableau suivant :

passe-bas	passe-haut	passe-bande	réjecteur de bande
$p_N = \frac{p}{\omega_c}$	$p_N = \frac{\omega_c}{p}$	$p_N = \frac{1}{B}\left(\frac{p}{\omega_{ce}} + \frac{\omega_{ce}}{p}\right)$	$p_N = \left[\frac{1}{B}\left(\frac{p}{\omega_{ce}} + \frac{\omega_{ce}}{p}\right)\right]^{-1}$

Tableau 7 : Fonction de dénormalisation $f(p)$

7.2 Méthode de l'invariance impulsionnelle

La méthode de l'invariance impulsionnelle consiste à effectuer la synthèse d'un filtre numérique dont la réponse impulsionnelle $h(nT_0)$ correspond à l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle du filtre analogique $h_a(t)$.

On a : $h(nT_0) \triangleq h_a(t)\big|_{t=nT_0}$

Figure 60 : Équivalence filtres analogique/numérique

La fonction de transfert du filtre analogique $H_a(p)$ possédant *N* pôles simples p_i s'écrit sous la forme :

$$H_a(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{p + p_i}$$

$$h_a(t) = \sum_{i=1}^{N} k_i e^{-p_i t}$$

En échantillonnant la réponse impulsionnelle du filtre analogique, on obtient la réponse impulsionnelle du filtre numérique qui est égale à :

$$h(nT_0) = \sum_{i=1}^{N} k_i e^{-p_i n T_0}$$

On obtient la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = \sum_{i=1}^{N} k_i \frac{z}{z - e^{-p_i T_0}} = \sum_{i=1}^{N} k_i \frac{1}{1 - e^{-p_i T_0} z^{-1}}$$

Si on étend cette formulation de *H*(*z*) à tout type de fonction $H_a(p)$, on peut, en utilisant la formule des résidus, obtenir la formule suivante :

$$\boxed{H(z) = \sum_{\text{pôles de } H_a(p)} \operatorname{Res}\left[\frac{H_a(p)}{1-e^{pT_0}z^{-1}}\right]}$$

Cette méthode de synthèse est simple. Elle conserve la réponse temporelle du filtre analogique équivalent et également la stabilité du filtre. Par contre, la réponse fréquentielle du filtre n'est pas conservée. En effet, cette transformation suit logiquement le théorème d'échantillonnage et le phénomène de recouvrement de spectre. Son utilisation doit respecter les contraintes dues à l'échantillonnage, en particulier une bande passante inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage. La réponse fréquentielle est donnée par :

$$H\left(e^{j2\pi\nu T_0}\right) = H(z)\Big|_{z=e^{j2\pi\nu T_0}} = \frac{1}{T_0}\sum_k H_a\left(j2\pi(\nu - k\nu_0)\right)$$

Par conséquent, la méthode de l'invariance impulsionnelle ne s'applique qu'aux filtres à bandes limitées.

La méthode n'est valable que si $\nu_0 \geq 2\nu_M$

Dans le cas contraire, si $\left|H\left(e^{j2\pi\frac{\nu_0}{2}T_0}\right)\right|$ n'est pas négligeable, il y a repliement de spectre :

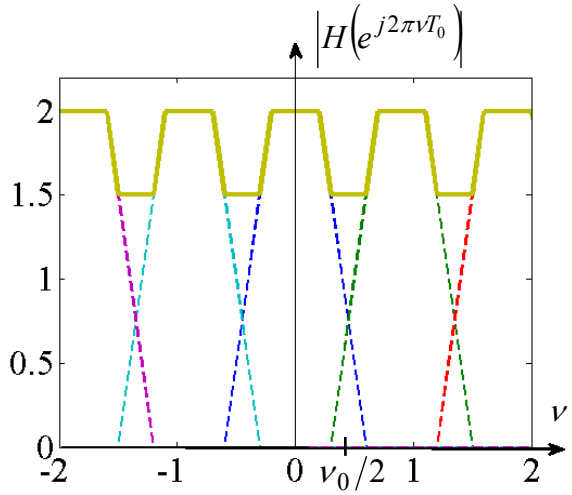


Figure 61 : Réponse fréquentielle ne respectant pas le théorème d'échantillonnage

On peut calculer *H*(*z*) plus simplement en utilisant les relations entre transformées de Laplace et en Z pour les systèmes du premier et du second ordre.

H(*p*) est alors décomposé en éléments simples du premier et second ordre :

$$H(p) = \sum_i \frac{A_i}{p+p_i} + \sum_j \frac{B_j p + C_j}{p^2 + b_j p + c_j}$$

H(p)	*H(z)*
$\dfrac{1}{p+a}$	$\dfrac{1}{1-e^{-aT_0}z^{-1}}$
$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{1-e^{-aT_0}z^{-1}\cos\omega T_0}{1-2e^{-aT_0}z^{-1}\cos\omega T_0 + e^{-2aT_0}z^{-2}}$

$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{e^{-aT_0}z^{-1}\sin\omega T_0}{1-2e^{-aT_0}z^{-1}\cos\omega T_0+e^{-2aT_0}z^{-2}}$

Tableau 8 : Principales relations entre *H(z)* et *H(p)*

Rappel

Les fonctions de transfert des filtres analogiques polynômiaux - Butterworth, Tchebychev, Bessel, Cauer, etc...- sont données pour des fréquences de coupure normalisées et pour des filtres passe-bas.

H(*p*) est tel que : $\left|\dfrac{H(j.1)}{H(j.0)}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Pour passer au filtre passe-bas de pulsation de coupure ω_c, il faut remplacer *p* par $\dfrac{p}{\omega_c}$.

Pour passer du passe-bas au passe-bande, *p* est remplacé par $\dfrac{1}{B}\left(p+\dfrac{\omega_r^2}{2}\right)$ avec :

ω_1 : pulsation de coupure basse

ω_2 : pulsation de coupure haute

$\omega_r^2 = \omega_1\omega_2$

$B = \omega_2 - \omega_1$

Le filtre passe bande est symétrique si $B << \omega_r$.

Le filtre discret n'a pas la réponse en fréquence désirée, bien qu'il ait la même réponse impulsionnelle que le filtre analogique.

7.3 Méthode par transformation d'Euler

L'effet de recouvrement de la méthode de l'invariance impulsionnelle est du à l'utilisation d'une fonction non algébrique et non bijective entre le plan *p* et le plan *z*.

Le problème est de trouver une telle transformation.

La transformation d'Euler consiste à utiliser l'approximation simple d'une dérivée :

$$\left.\frac{de(t)}{dt}\right|_{t=nT_0} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta e(nT_0)}{\Delta t} \cong \frac{e(nT_0)-e[(n-1)T_0]}{T_0}$$

Si on considère un système linéaire discret *H(z)* réalisant cette approximation, il aura la forme :

$$s(nT_0) = \frac{e(nT_0)-e[(n-1)T_0]}{T_0}$$

On obtient dans le plan de *z* :

$$S(z) = \frac{1-z^{-1}}{T_0}E(z)$$

$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{T_0}$$

Dans le plan de *p*, la dérivation est obtenue par la fonction de transfert $H_a(p) = p$.

Par conséquent, la transformation d'Euler réalisant l'approximation d'une dérivée est définie par :

$$H(z) \triangleq H(p)\Big|_{p=\frac{1-z^{-1}}{T_0}}$$

La transformation inverse est donnée par :

$$z = \frac{1}{1 - j\omega_{an} T_0}$$

Elle permet d'obtenir une relation liant les pulsations analogiques, ω_{an}, et numérique, ω_n.
On obtient :

$$z = \frac{1}{1 - j\omega_{an} T_0} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1 + j\omega_{an} T_0}{1 - j\omega_{an} T_0}\right] = \frac{1}{2}\left[1 + e^{j2\arctan(\omega_{an} T_0)}\right]$$

mais $z = e^{j\omega_n T_0}$ donc $e^{j\omega_n T_0} = \frac{1}{2}\left[1 + e^{j2\arctan(\omega_{an} T_0)}\right]$.

La variable *z* parcourt donc un cercle de centre $z = 1/2$ et de rayon $1/2$ alors que dans la transformation en Z, *z* parcourt le cercle unité. Cela implique une modification importante de la réponse fréquentielle du filtre. Cependant, il n'y a pas de recouvrement de spectre.

7.4 Méthode par transformation bilinéaire

7.4.1 Introduction

Le filtre passe-bas analogique du premier ordre peut être défini par son équation différentielle :

$$s'(t) + bs(t) = ae(t) \quad \text{où } s'(t) \text{ note la dérivée de } s(t) \tag{7.1}$$

ou sa fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{a}{p + b} \tag{7.2}$$

On peut écrire :

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} s'(u)du + s(t_0)$$

ce qui reste valable pour $t_0 = (k-1)T_0$ et $t = kT_0$:

$$s(kT_0) = \int_{(k-1)T_0}^{kT_0} s'(u)du + s[(k-1)T_0]$$

L'approximation de l'intégrale par la méthode des trapèzes donne :

$$\int_{(k-1)T_0}^{kT_0} s'(u)du \approx T_0 \frac{s'[(k-1)T_0] + s'[kT_0]}{2}$$

En changeant de notation $kT_0 \to k$, il vient :

$$s(k) = \frac{T_0}{2}[s'(k-1) + s'(k)] + s(k-1)$$

Et, en utilisant l'équation différentielle (7.1) :

$$s(k) - s(k-1) = \frac{T_0}{2}[-bs(k-1) + ae(k-1) - bs(k) + ae(k)]$$

Par transformation en Z, on a :

$$S(z) - z^{-1}S(z) = \frac{T_0}{2}\left[-bS(z) + aE(z) - bz^{-1}S(z) + az^{-1}E(z)\right]$$

D'où

$$H(z)=\frac{S(z)}{E(z)}=\frac{a}{\frac{2}{T_0}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+b} \tag{7.3}$$

En comparant *H*(*z*) équ.(7.3) et *H*(*p*) équ. (7.2), il vient :

$$H(z)=H(p)\Big|_{p=\frac{2}{T_0}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Conclusion :

La transformation bilinéaire réalisant l'approximation d'une intégrale est définie par

$$H(z)\triangleq H(p)\Big|_{p=\frac{2}{T_0}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

7.4.2 Relation entre les pulsations analogiques (ω_{an}) et numériques (ω_n)

La transformation inverse de la relation entre p et z permet d'obtenir :

$$p=\frac{2}{T_0}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow z=\frac{1+\frac{T_0}{2}p}{1-\frac{T_0}{2}p}$$

La réponse en fréquentielle est obtenue pour $p=j\omega_{an}$ soit $z=\dfrac{1+\frac{T_0}{2}j\omega_{an}}{1-\frac{T_0}{2}j\omega_{an}}$ pour $z=e^{j\omega_n T_0}$

ce qui donne :

$$\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)=\arctan\dfrac{\omega_{an}T_0}{2}+\arctan\dfrac{\omega_{an}T_0}{2}=2\arctan\dfrac{\omega_{an}T_0}{2}\end{cases}$$

finalement, on obtient :

$$\boxed{\omega_n=\frac{2}{T_0}\arctan\frac{\omega_{an}T_0}{2} \quad \text{et} \quad \omega_{an}=\frac{2}{T_0}\tan\frac{\omega_n T_0}{2}} \tag{7.4}$$

Il n'y a pas égalité entre pulsation analogique et pulsation discrète. La relation entre les deux n'est pas non plus linéaire. On dit qu'il y a distorsion en fréquence.
Le filtre discret obtenu par la transformation bilinéaire d'un filtre analogique n'a donc pas la même réponse en fréquence que celui-ci.
Lors de la synthèse d'un filtre discret par cette méthode, il faut tenir compte de cette distorsion pour déterminer le filtre analogique, qui par transformation bilinéaire, donnera le filtre discret cherché.

Exemple

Synthèse d'un filtre passe bas d'ordre 1, de fréquence de coupure discrète $\nu^c=40\text{Hz}$ pour une fréquence d'échantillonnage de 200Hz.

La pulsation de coupure analogique ν_a^c correspondante est calculée à partir de 7.4:

$$\omega_a^c=\frac{2}{T_0}\tan\frac{2\pi\nu^c T_0}{2} \quad \text{soit } \omega_a^c=291\text{rad}/s \text{ et } \nu_a^c=46\text{Hz}$$

La fonction de transfert du filtre analogique **passe-bas** premier ordre s'écrit :

$$H(p)=\frac{1}{\frac{p}{\omega_a^c}+1}=\frac{291}{p+291}$$

par transformation bilinéaire : $H(z)=H(p)\Big|_{p=\frac{2}{T_0}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\dfrac{1-z^{-1}}{2{,}38+0{,}38z^{-1}}$

Par construction, nous avons: $\left|H\left(z=e^{j2\pi\nu^c T_0}\right)\right|=\left|H\left(p=j\omega_a^c\right)\right|$ soit

soit en dB: $20\log_{10}\left|H\left(z=e^{j2\pi 46/200}\right)\right|=20\log_{10}\left|H(p=j291)\right|=-3dB$

7.4.3 Intérêts de la transformation bilinéaire

Le repliement de spectre n'est pas possible. En effet d'après 7.4 :

$$\omega_{an}=\frac{2}{T_0}tg\frac{\omega_n T_0}{2}$$

Donc lorsque $\omega_{an}\to\infty$, on a $\dfrac{\omega_n T_0}{2}\to\dfrac{\pi}{2}$ et $\nu\to\dfrac{\nu_0}{2}$

Par exemple comme $H(p=j\omega_{an})=H\left(z=e^{j2\pi\nu T_0}\right)$ pour un filtre passe-bas

$\lim\limits_{\omega_{an}\to+\infty}\left|H(p=j\omega_{an})\right|=0$ alors $\lim\limits_{\nu_n\to\nu_0/2}\left|H\left(z=e^{j2\pi\nu T_0}\right)\right|=0$ et il n'y a pas de repliement de spectre.

<u>Exemple</u> :

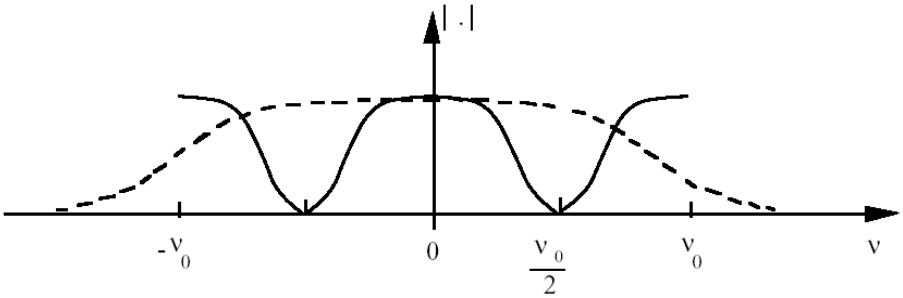


Figure 62 : Filtres analogique (trait discontinu) et discret (trait continu)

<u>Conclusion</u> :
A un filtre analogique stable correspond, par la transformation bilinéaire, un filtre discret qui est stable.
<u>Remarque</u> :
La distorsion en fréquence s'accompagne d'une modification du temps de propagation de groupe $\tau=\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\omega$ donc de la vitesse de propagation. En effet :

$$\omega_{an}=\frac{2}{T_0}tg\left[\frac{\omega_n T_0}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{d}\omega_{\mathrm{an}}=\left(1+\frac{2}{T_0}tg^2\left[\frac{\omega_n T_0}{2}\right]\right)\mathrm{d}\omega_n=\left(1+\left[\frac{\omega_n T_0}{2}\right]^2\right)\mathrm{d}\omega_n$$

et : $\tau_n=\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\omega_{\mathrm{n}}}=\left(1+\left[\dfrac{\omega_{an}T_0}{2}\right]^2\right)\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\omega_{\mathrm{an}}}\Rightarrow\boxed{\tau_{\mathrm{n}}=\left(1+\left[\dfrac{\omega_{an}T_0}{2}\right]^2\right)\tau_{\mathrm{an}}}$

Un filtre analogique qui a, dans un certain domaine de fréquences, un temps de propagation

de groupe constant (une phase linéaire) devient, par transformation bilinéaire, un filtre discret qui n’a plus cette propriété.

Chapitre 8 : Synthèse des filtres RIF

8.1 Introduction

Un filtre RIF est défini par sa fonction de transfert en Z :

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cdot z^{-n}$$

où $h(n)$ est la réponse impulsionnelle de longueur *N* du filtre.

A la différence des filtres RII, les filtres RIF ne sont réalisables que dans le domaine discret et ne sont pas issus d'un filtre analogique. L'un des intérêts majeurs de ce type de filtre est de pouvoir contraindre sa phase à être linéaire.

On distingue 2 principales méthodes de création :

- La méthode de la fenêtre
- La méthode par application de la TFD

8.2 Méthode de la fenêtre

Elle consiste à approcher la réponse fréquentielle d'un filtre à réponse impulsionnelle infinie par celle d'un filtre non récursif (commande fir1 de Matlab).

8.2.1 Méthode

Soit $H(e^{j\alpha})$ la réponse fréquentielle désirée pour $\alpha = 2\pi\nu_0$ (paragraphe 3.1.3).

Elle est décomposable en série de Fourier par sa réponse impulsionnelle, d'où

$$H(e^{j\alpha})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-jn\alpha} \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

Par transformation inverse, la réponse impulsionnelle s'exprime sous la forme :

$$h(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H(e^{j\alpha})e^{jk\alpha}d\alpha \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

On constate que ce filtre est non causal et à réponse impulsionnelle infinie. Intuitivement, la manière la plus simple permettant d'obtenir un filtre RIF est de limiter la taille de $h(k)$ par :

$$\hat{h}(k)=\begin{cases} h(k), & -N \le k \le N \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Le filtre RIF est alors défini par $\hat{h}(k)$ et sa réponse fréquentielle est altérée par le phénomène d'ondulation de Gibbs. De manière générale $\hat{h}(k)$ est le produit du filtre $h(k)$ par une fenêtre $w(k)$ à durée limitée. Intuitivement, $w(k)$ avait été choisi comme étant une fenêtre rectangulaire ($r(k)$) :

$$r(k)=\begin{cases} 1, & -N \le k \le N \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Le filtre obtenu est non causal et sa réponse fréquentielle est :

$$\hat{H}(e^{j\alpha})=\hat{H}(z)\big|_{z=e^{j\alpha}}=\sum_{k=-N}^{N} h(k)w(k)e^{-jk\alpha}$$

La réponse fréquentielle du filtre $\hat{H}\left(e^{j\alpha}\right)$ est le résultat de la convolution entre le filtre idéal et la transformée de Fourier de la fenêtre. Le choix de la fenêtre de pondération joue un rôle très important. Il permet de maitriser le phénomène d'oscillations présent lors de l'utilisation d'une fenêtre rectangulaire (illustrée ci-dessous). En augmentant *N*, $\hat{H}\left(e^{j\alpha}\right)$ se rapproche de $H\left(e^{j\alpha}\right)$ mais l'amplitude des oscillations ne diminue pas.

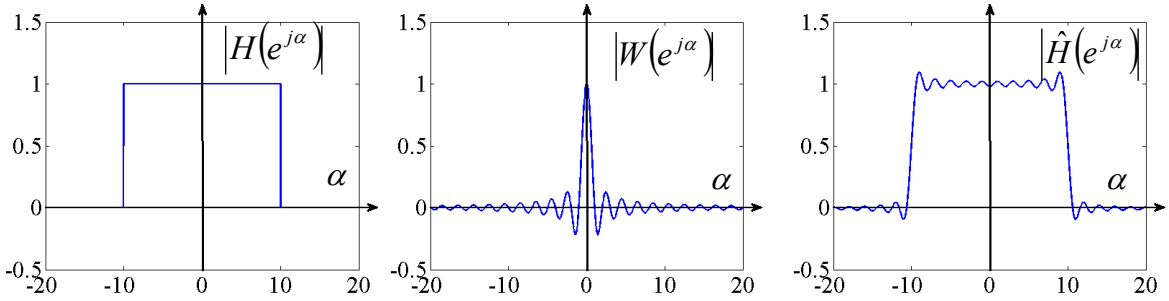


Figure 63 : De gauche à droite : réponses fréquentielles du filtre recherché, de la fenêtre de pondération et du filtre synthétisé

8.2.2 Fenêtres de pondération ou d'apodisation classiques

Les différentes fenêtres utilisées sont les mêmes que celles présentées au chapitre 4 : fenêtres rectangulaire, Bartlett, Hanning, Hamming et Blackman. Les principaux paramètres sont rappelés dans le tableau suivant :

Fenêtres	Rapport d'amplitude entre le lobe principal et secondaire	Largeur du lobe principal	Atténuation minimale en bande atténuée
Rectangulaire	-13dB	$4\pi/N$	-21dB
Bartlett	-25 dB	$8\pi/N$	-25 dB
Hanning	-31 dB	$8\pi/N$	-44 dB
Hamming	-41 dB	$8\pi/N$	-53 dB
Blackman	-57 dB	$12\pi/N$	-74 dB

Tableau 9 : Caractéristiques des fenêtres de pondération

8.2.3 Choix de la fenêtre de pondération

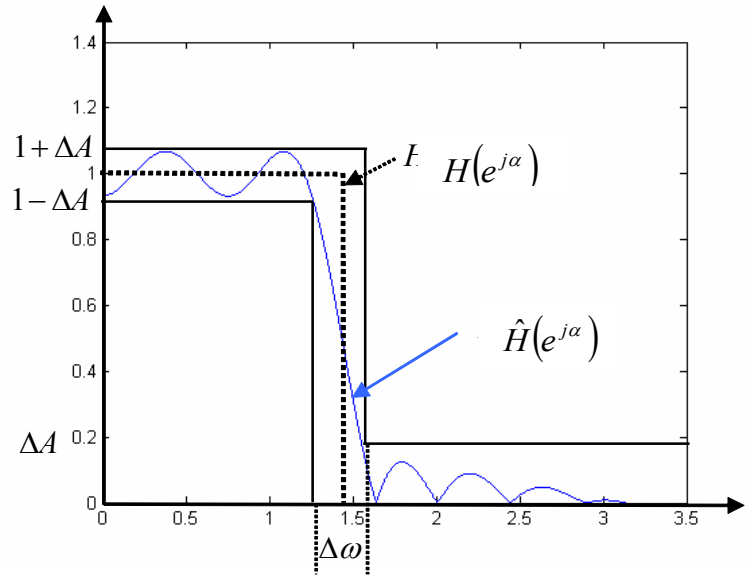


Figure 64 : Filtres synthétisé et idéal

La procédure de synthèse d'un filtre RIF s'effectue en plusieurs étapes :

- déterminer la réponse impulsionnelle d'un filtre idéal $h(n)$
- choisir la fenêtre à utiliser en fonction de l'atténuation ΔA
- choisir la longueur de la réponse impulsionnelle en fonction de la largeur de la zone de transition et en fonction du type de la fenêtre ciblée.

8.2.4 Exemple

<u>Approximation du filtre passe-bas idéal suivant :</u>

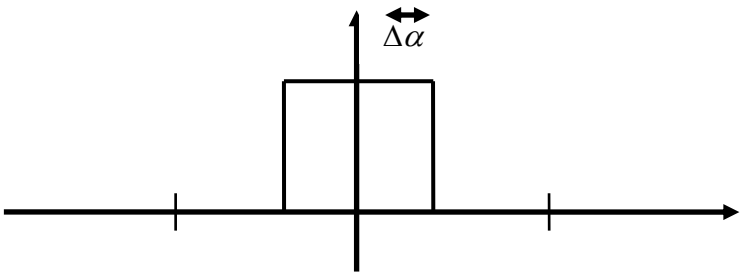


Figure 65 : Filtre passe-bas idéal

$$h(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H(e^{j\alpha})e^{jk\alpha}d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha_c}^{+\alpha_c}e^{jk\alpha}d\alpha=\frac{1}{k\pi}\sin(k\alpha_c)$$

La fonction de transfert obtenue en limitant le nombre de coefficients à $(2N+1)$ est alors :

$$\hat{H}(e^{j\alpha})=\sum_{k=-N}^{+N}h(k)e^{-jk\alpha}=\sum_{k=-N}^{+N}\frac{1}{k\pi}\sin(k\alpha_c)e^{-jk\alpha}$$

α

Il s'agit en fait d'un développement en série de Fourier tronqué et le gabarit obtenu est celui présenté dans le paragraphe décrivant la méthode.

8.3 Application de la TFD à la synthèse de filtres non récursifs

8.3.1 Méthode de l'échantillonnage en fréquence

Connaissant la réponse fréquentielle discrète du filtre, on détermine la réponse impulsionnelle à partir de sa FFT inverse (commande fir2 de Matlab).:

$$h(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j2\pi\frac{kn}{N}} \quad 0 \le n \le N-1$$

Pour obtenir une précision suffisante, il est souvent utile d'effectuer la FFT sur un nombre de points fréquentiels assez grand. La taille de la réponse impulsionnelle doit alors être réduite par fenêtrage de manière identique à celle de la méthode dite de la fenêtre.

8.3.2 Exemple

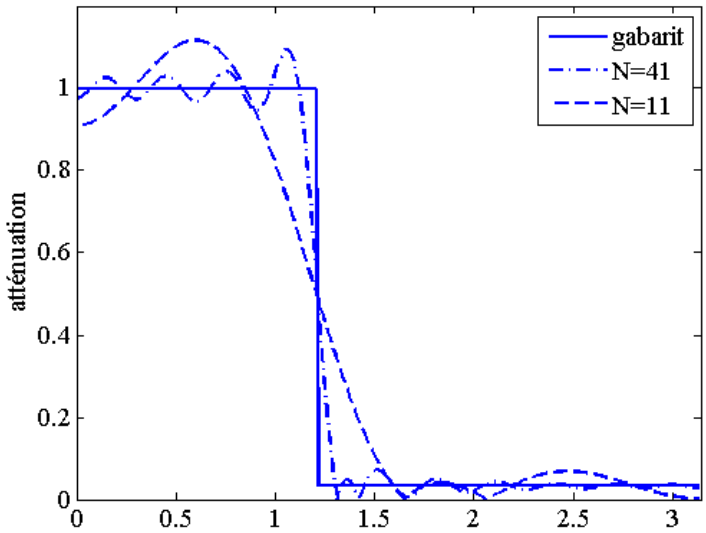


Figure 66 : Synthèse par FFT avec fenêtrage rectangulaire pour 2 valeurs de *N*

8.4 Filtres à phase linéaire

8.4.1 Définition - Intérêt

Les filtres RIF ont la particularité de pouvoir présenter une phase linéaire. Une phase linéaire évitera la modification de la forme du signal (phénomène de distorsion).

La réponse de ce type de filtre est :

$$H\left(e^{j\alpha}\right) = A\left(e^{j\omega}\right)\cdot e^{j\alpha\omega + j\beta}\, H\left(e^{j\alpha}\right) = \left|H\left(e^{j\alpha}\right)\right| e^{j\varphi(\alpha)}$$

avec $\varphi(\alpha)$ la phase de la fonction de transfert. La phase est linéaire si $\varphi(\alpha) = -a\alpha + b$ où $a, b \in$ R$^+$. Le retard égal à $\tau = \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = -a$ est constant. Si en théorie, la valeur de *b* peut prendre une valeur quelconque, en pratique seules les valeurs 0 et $\pi/2$ sont classiques.

- **1er cas :** $b = 0$ et $\varphi(\alpha) = -a\alpha$ pour $-\pi \le \alpha < \pi$

D'une part : $H(e^{j\alpha}) = |H(e^{j\alpha})| e^{-ja\alpha} = |H(e^{j\alpha})|(\cos a\alpha - j\sin a\alpha)$

D'autre part pour des filtres causaux : $H(e^{j\alpha}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)(\cos n\alpha - j\sin n\alpha)$

Par identification pour des filtres à coefficients réels, on obtient :

$$\begin{cases} |H(e^{j\alpha})|\cos(a\alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos n\alpha \\ |H(e^{j\alpha})|\sin(a\alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin n\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin[(a-n)\alpha] = 0$$

L'équation précédente définit la condition pour que le filtre soit à phase linéaire. Si $\alpha \ne 0$, la réponse impulsionnelle doit être symétrique par rapport à *a* :

$$\begin{cases} a = \dfrac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n) \quad 0 \le n \le a \end{cases}$$

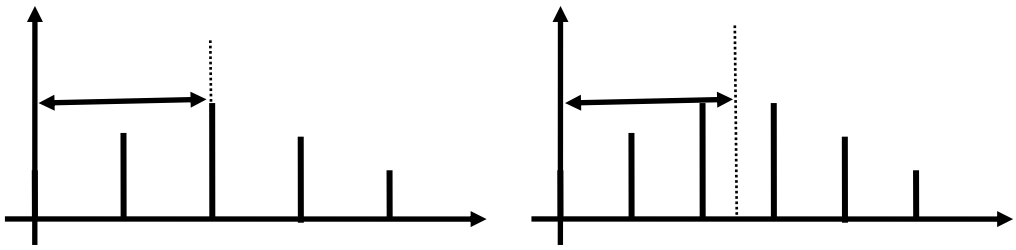


Figure 67 : Exemple de RI de filtre à phase linéaire pour *b* = 0

- **2e cas :** $b = \pm\pi/2$ et $\varphi(\alpha) = \dfrac{\pm\pi}{2} - a\alpha$ pour $-\pi \le \alpha < \pi$

En utilisant la même méthode que précédemment, on obtient

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\left[(a-n)\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right] = 0$$

La réponse impulsionnelle est antisymétrique par rapport à *a* :

$$\begin{cases} a = \dfrac{N-1}{2} \\ h(n) = -h(N-1-n) \quad 0 \le n \le a \end{cases}$$

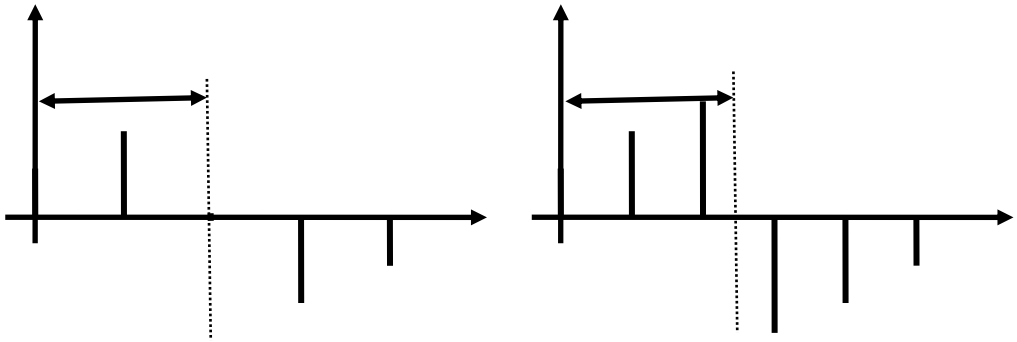


Figure 68 : Exemple de RI de filtre à phase linéaire pour $b = \pm\pi/2$

Intérêt : les signaux de fréquences différentes ont un même retard en sortie de filtre comme montré sur la figure suivante.

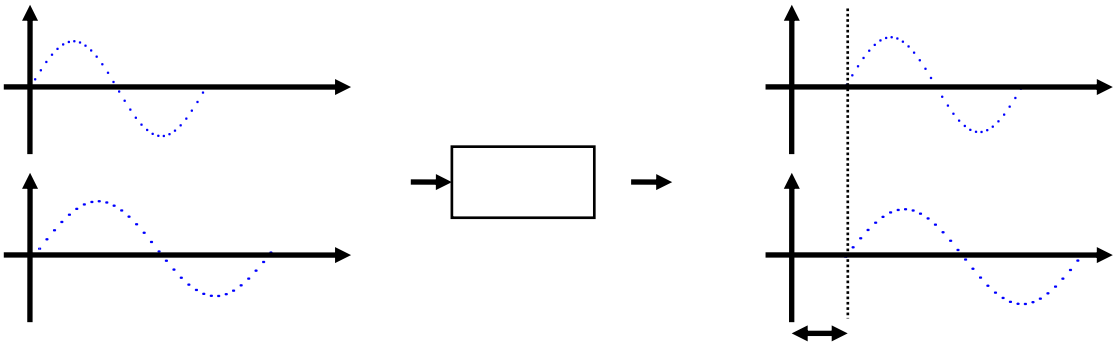


Figure 69 : Filtre à phase linéaire ➔ retard constant

Des résultats précédents, on remarque que 4 types de filtres causaux peuvent être caractérisés en fonction de la parité de *N* et du type de symétrie des coefficients réels $h(n)$.

8.4.2 Filtre RIF à phase linéaire de type I : réponse symétrique et *N* impair

$$h(n) = h(N-1-n) \quad 0 \le n \le a$$

pour un retard entier $a = \dfrac{N-1}{2}$ et $b = 0$.

et une réponse fréquentielle $H(e^{j\alpha}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\alpha} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a_n \cos n\alpha$

avec $a_0 = h\left(\dfrac{N-1}{2}\right)$ et $a_n = 2h\left(\dfrac{N-1}{2} - n\right),\ n = 1,\ldots,\dfrac{N-1}{2}$

Quelles que soient les valeurs a_n , $\sum_{n=0}^{(N-1)/2} a_n \cos n\alpha \neq 0$ pour $\alpha = 0$ ou π, cette solution est valable pour tous type de gabarit.

8.4.3 Filtre RIF à phase linéaire de type II : réponse symétrique et *N* pair

$$h(n) = h(N-1-n) \quad 0 \le n \le a$$

pour un retard fractionnaire $\alpha = \dfrac{N-1}{2}$

et une réponse fréquentielle $H\left(e^{j\alpha}\right) = e^{-j\frac{N-1}{2}\alpha} \sum_{n=0}^{N/2} b_n \cos\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\alpha$

avec $b_n = 2h\left(\dfrac{N}{2} - n\right),\ n = 1, \ldots, \dfrac{N}{2}$

Quelles que soient les valeurs b_n , $\sum_{n=0}^{N/2} b_n \cos\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\alpha = 0$ pour $\alpha = \pi$, ce type de filtre ne convient pas pour un passe-haut

8.4.4 Filtre RIF à phase linéaire de type III : réponse antisymétrique et *N* impair

$$h(n) = -h(N-1-n) \quad 0 \le n \le a$$

pour un retard entier $a = \dfrac{N-1}{2}$ et $b = \pm\pi/2$

et une réponse fréquentielle du filtre $H\left(e^{j\alpha}\right) = e^{-j\frac{N-1}{2}\alpha} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} c_n \sin n\alpha$

avec $c_n = 2h\left(\dfrac{N-1}{2} - n\right),\ n = 1, \ldots, \dfrac{N-1}{2}$

Quelles que soient les valeurs c_n , $\sum_{n=0}^{(N-1)/2} c_n \sin n\alpha = 0$ pour $\alpha = 0$ ou π, ce type de filtre ne peut être utilisé que pour un passe-bande ou pour certains dérivateurs.

8.4.5 Filtre RIF à phase linéaire de type IV : réponse antisymétrique et *N* pair

$$h(n) = -h(N-1-n) \quad 0 \le n \le a$$

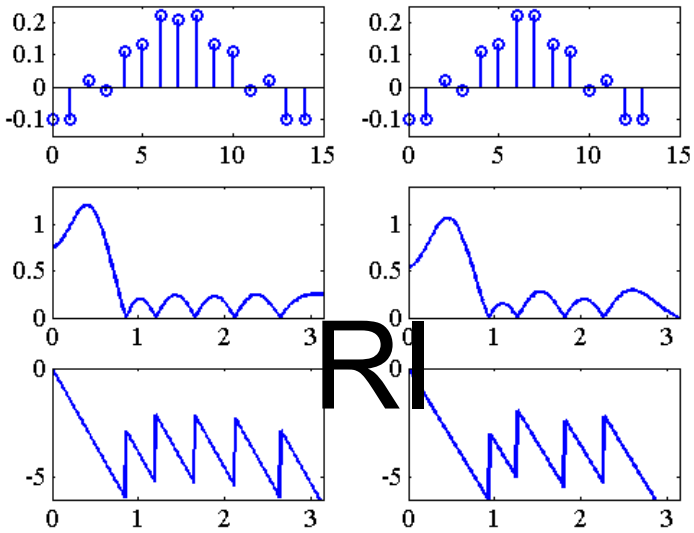
pour un retard fractionnaire $a = \dfrac{N-1}{2}$ et $b = \pm\pi/2$

et une réponse fréquentielle $H\left(e^{j\alpha}\right) = e^{-j\frac{N-1}{2}\alpha} \sum_{n=0}^{N/2} d_n \sin\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\alpha$

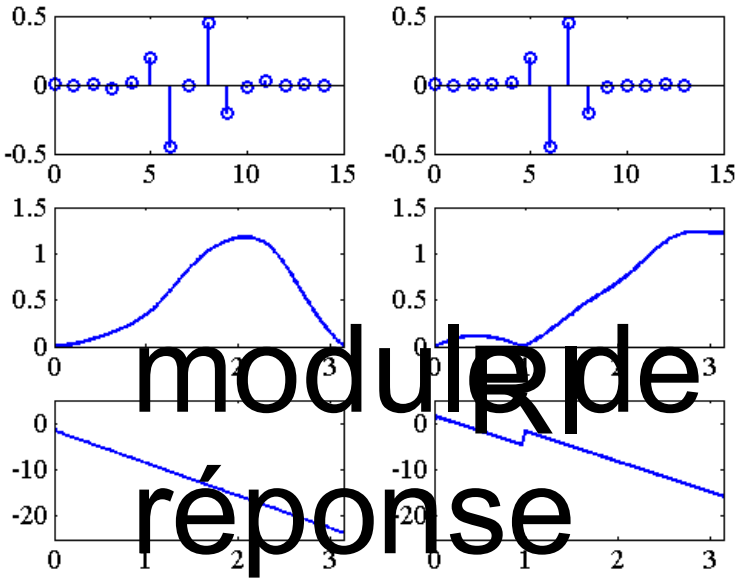
avec $d_n = 2h\left(\dfrac{N}{2} - n\right),\ n = 1, \ldots, \dfrac{N}{2}$.

Quelles que soient les valeurs d_n , $\sum_{n=0}^{N/2} d_n \sin\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\alpha = 0$ pour $\alpha = 0$, ce type de filtre convient parfaitement pour un passe-haut.

8.4.6 Exemples



a) Filtre de type I (N=15) b) Filtre de type II (N=14)



c) Filtre de type III (N=15) d) Filtre de type IV (N=14)

Figure 71 : Exemple des 4 types de filtres RIF à phase linéaire

phase de la
module de la répo
réponse

8.5 Petite Classe 4 : Synthèse de filtre

<u>Exercice 1</u> : Synthèse de filtre RII par transformation bilinéaire
On désire construire un filtre RII dont la réponse en fréquence idéale respecte le gabarit suivant avec $\omega = 2\pi\upsilon$:

- Atténuation supérieure à 20 dB pour $0 \le \omega \le 5\,\mathrm{rd/s}$
- Atténuation de 3dB pour $\omega = 20\,\mathrm{rd/s}$ (pulsation normalisée)
- Atténuation inférieure à 1dB pour $25 \le \omega \le 314\,\mathrm{rd/s}$

La fréquence d'échantillonnage est voisine de 100 Hz.

a. Tracer le gabarit du filtre numérique $20\log|H(j\omega)|$ en échelle semi-logarithmique. Définir le type de filtre ainsi défini.

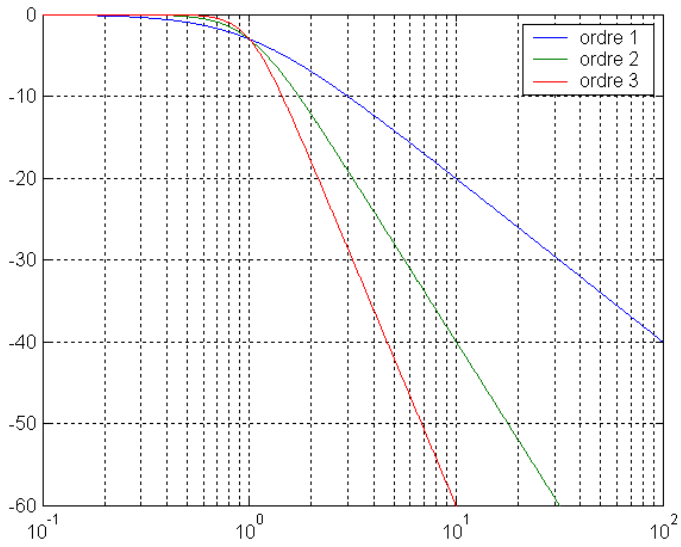
On souhaite réaliser la synthèse de ce filtre par la méthode de la transformation bilinéaire.

b. Pour cela, on calcule les caractéristiques du filtre analogique équivalent.

c. On calcule ensuite les caractéristiques du filtre passe-bas normalisé équivalent.

d. En utilisant les gabarits donnés en fin d'exercice, proposer un ordre de filtre satisfaisant au gabarit recherché.

e. Donner la fonction de transfert sous forme numérique



Filtre de Butterworth d'ordre 1, 2 et 3

$$H(p_N) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} a_k p_N^k} \quad \text{pour } \omega_c = 1$$

n	a_0	a_1	a_2	a_3
2	1	$\sqrt{2}$	1	0
3	1	2	2	1

<u>Exercice 2</u> : Synthèse de filtre RIF par la méthode de la fenêtre
On considère un filtre idéal défini par la réponse fréquentielle suivante :

$$H\left(e^{j2\pi\nu}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \le |\nu| \le 1/6 \\ 0 \text{ si } 1/6 \le |\nu| \le 1/2 \end{cases}$$

1. Dessiner la réponse en fréquence sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. Préciser le type de filtre.

2. Donner l'expression des coefficients du filtre $h(n)$ de la réponse du filtre. On calculer la réponse du filtre pour *n* compris entre -5 et 5. Dessiner la forme générale de la réponse. Discuter sur la causalité du filtre.
3. *exercices possibles : déterminer les coefficients du filtre dans le cas d'un filtre passe-haut, d'un filtre passe-bande (dans la bande passante est* $[1/6, 1/3]$*) et d'un réjecteur de bande (bande atténuée est la même que la bande passante du filtre précédent). Calcul et représentation des coefficients des filtres.*
4. Que doit-on faire pour améliorer la qualité de ce filtre ?

Bibliographie

[1] Proakis, J.G. and Manolakis, D.G., - Digital signal processing: principles, algorithms and applications -, Macmillan, 1996

[2] M. Bellanger - Traitement numérique du signal : Théorie et pratique – Collection technique et scientifique des Télécommunications, Masson, 4ème éd. 1990.

[3] M. Bellanger - Synthèse des filtres numériques - Cnet Enst Masson

[4] G. Blanchet, J.Prado - Méthodes numériques pour le traitement du signal. Exemple et programmes - Masson, 1991.

[5] R. Boite, H. Leich - Les filtres numériques : Analyse et synthèse de filtres unidimensionnels - Masson, 3ème éd. 1990.

[6] D.F. Elliot - Handbook of digital signal processing, Engineering applications - Academic Press, 1987.

[7] C. Gueguen - Commande des systèmes discrets et échantillonnés - Enst.

[8] R.W. Hamming - Digital _lters - Prentice Hall signal processing series, 2ème éd. 1983.

[9] L.B. Jackson - Digital _lters and signal processing - Kluwer Academic publishers, 2ème éd. 1986.

[10] M. Kunt - Traitement numérique des signaux , Dunod, 3ème éd. 1981.

[11] B. Liu - Digital filters and the fast fourier transform - Halsted Press, 1975.

[12] A.V. Oppenheim, R.W. Shafer - Digital signal processing , Prentice Hall, 1975

[13] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, I.T. Young - Signals and systems - Prentice Hall, 1983.

[14] Rabiner, Gold - Theory and application of digital signal processing , Prentice-Hall.

[15] W.P. Salman, M.S. Solotareff - Le filtrage numérique - Eyrolles, 1982.

[16] Sevely - Systèmes linéaires échantillonnés - Dunod

[17] Y. Thomas - Signaux et systèmes linéaires - Masson, 1992.

[18] Tretter - Discrete time signal processing - Wiley

[19] A.W.M. van. den enden, N.A.M. Verhoeckx - Traitement numérique du signal : une introduction - Masson, 1992.

[20] C. Hamitouche-Djabou – Elément de traitement numérique – cours ENST Bretagne