Multiples carrés

par Lafla

4 juillet 2017

1 Introduction

1.1 Qu'est-ce qu'un multiple carré ?

Les travaux de Howard Crowhurst à partir des alignements mégalithiques de Carnac, datés d'environ 4000 ans avant J.C., mettent en évidence une structure géométrique particulière qui se retrouve aussi sur d'autres sites dans le monde (Mexique, Égypte, Moyen-Orient, Cambodge, etc...). Cette architecture s'appuie sur diverses données géographiques (points cardinaux et latitudes), astronomiques (solstices et équinoxes) et métrologiques (unités de longueur spécifiques déduites des dimensions du globe terrestre), et les combine selon certains principes géométriques clairement identifiables.

Il n'est pas étonnant que le développement de l'agriculture aille de pair avec une maîtrise du cycle des saisons, des solstices et des équinoxes, et la mise en place d'observatoires astronomiques qui marquent ces dates et ces angles solaires remarquables. Cependant, ces monuments semblent implantés de préférence aux seules latitudes où ces angles sont correspondent aux **diagonales de certains rectangles** orientés selon les points cardinaux et constitués de plusieurs carrés disposés côte à côte. Il se dégage ainsi de cette pensée une notion centrale, un format type de rectangle que l'on peut appeler *multiple carré*.

Les raisons précises du choix de ce format, décliné sous toutes ses formes et de façon quasiment obsessionnelle dans de nombreux monuments, dépassent probablement le cadre purement mathématique. À ce sujet H. Crowhurst indique que la transition entre les modes de vie nomade et sédentaire se traduit dans la pensée géométrique par le passage du cercle (circulation et mouvement) au carré (fixation et structuration de l'espace par les quatre points cardinaux).

1.2 Ce qu'il faut nuancer

Nous verrons que les calculs d'angles et de longueurs dans ce contexte conduisent rapidement à passer des nombres *entiers* à des nombres dits *irrationnels*, qui par définition ne sont pas des rapports ou fractions de nombres entiers mais des racines carrées, arctangentes, etc... et qui ne peuvent pas s'exprimer sous une forme décimale finie. Bien que la connaissance de ces notions remonte à Euclide au IIIe siècle avant J.C. au moins, elle passe souvent pour la marque d'une science extraordinairement avancée auprès d'un grand public hélas bien peu familier.

Il convient de préciser d'emblée que, si nous pouvons avoir une idée relativement claire des connaissances géométriques de ces bâtisseurs en observant leurs monuments, nous ne savons rien en revanche de leur conception abstraite des nombres au-delà de cette vision géométrique concrète, nous ignorons même s'il en avaient une qui soit comparable à la nôtre. Au vu de certaines distances mesurées en milliers de mètres, nous pouvons supposer par exemple qu'ils utilisaient entre autres un système décimal, c'est-à-dire qu'ils comptaient comme nous par dizaines, centaines, milliers, etc... mais nous ignorons par exemple s'ils avaient conscience que ce système de numération ne permet en aucun cas d'exprimer une grandeur irrationnelle de façon exacte.

En outre, les nombres ne sont pas essentiels à la géométrie, ce ne sont que des outils qui permettent d'en donner une meilleure compréhension. Nous avons pris l'habitude, depuis les principes de géométrie analytique de DESCARTES notamment, de nous y référer très fréquemment voire exclusivement. Mais ce serait un piège de croire que la méthode que nous utilisons en aval pour décrypter ces monuments est forcément la même que celle qui a été utilisée en amont pour les concevoir.

Si nous voulons comprendre leur raisonnement, il faut dans un premier temps faire l'effort de mettre de côté tout ce qui concerne notre vision moderne, quitte à y revenir dans un second temps pour comparer l'une et l'autre.

1.3 Contenu de l'exposé

Dans ce document nous proposons une approche des multiples carrés qui s'appuie sur des nombres complexes, plus précisément dans un cadre appelé « arithmétique des entiers de GAUSS ». Il s'agit d'une alternative commode à l'utilisation des nombres irrationnels, qui met uniquement en jeu des nombres entiers et un nombre particulier appelé *unité imaginaire*. Ce nombre noté i se combine avec les nombres entiers selon les quatre opérations élémentaires $(+, -, \times, \div)$ et obéit à la règle supplémentaire suivante :

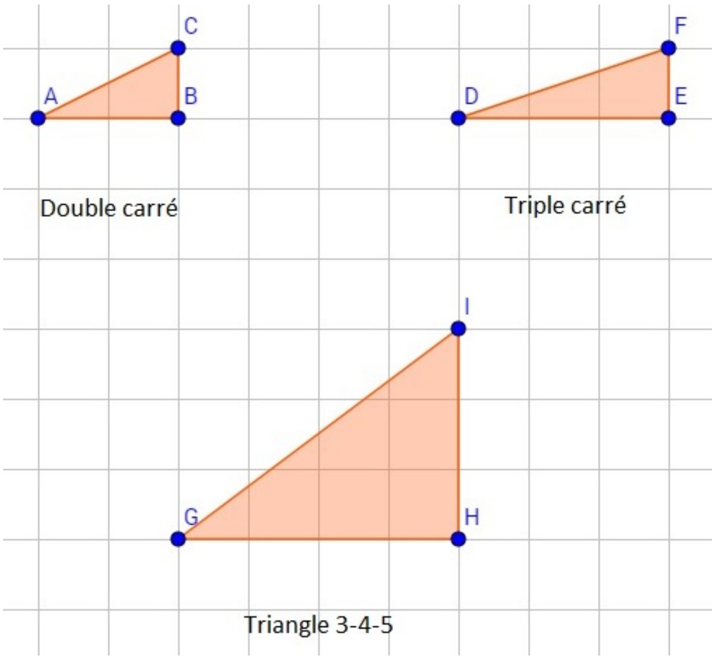
$$i^2 = i \times i = -1.$$

Un entier de GAUSS est ainsi un nombre obtenu par somme ou différence d'unités réelles et d'unités imaginaires : par exemple $3+i$, $7+2i$, $4-5i$, $-9+12i$ sont des entiers de GAUSS.

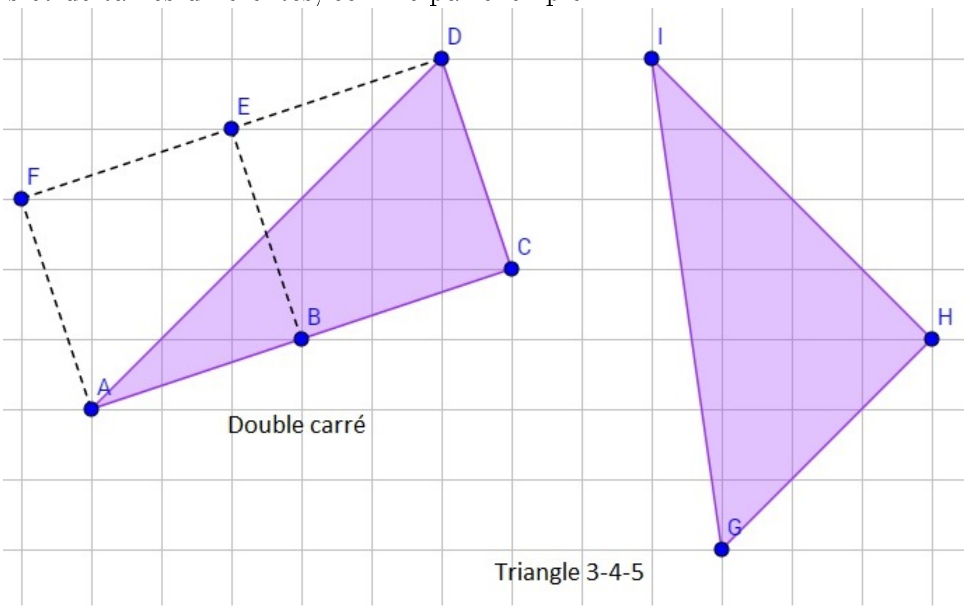
Il ne s'agit pas ici de discuter de l'existence de tels nombres, ce qui serait absurde : nous avons dit que les nombres sont des outils, ils existent donc dès lors qu'on les a créés et qu'on les utilise. Il ne s'agit pas non plus d'affirmer que les mégalithiciens pensaient forcément en unités imaginaires : ce n'est qu'une proposition, ni plus ni moins valable qu'une autre, mais particulièrement adaptée et pourtant méconnue.

2 Utilisation d'un quadrillage

Nous nous baserons sur un *quadrillage*, c'est-à-dire une famille de droites horizontales et verticales régulièrement espacées. Ces droites permettent de recouvrir le plan par une famille de *cellules* carrées toutes identiques, de côté 1 unité et d'aire $1 \times 1 = 1$ unité. Toutes les figures formées par des multiples carrés se présentent alors naturellement dans ce quadrillage, par exemple :



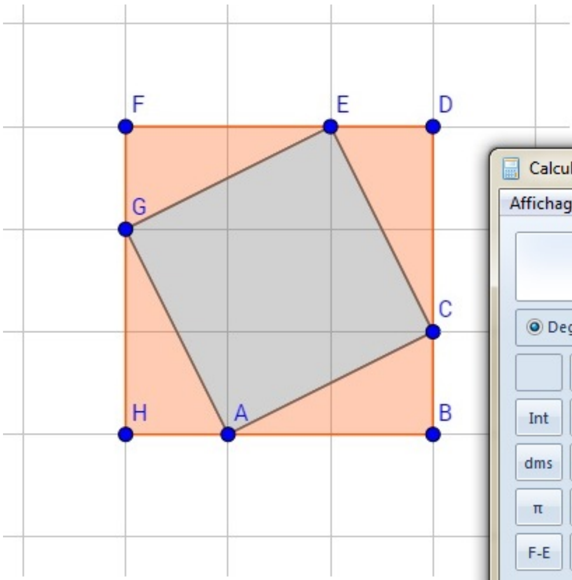
Elles s'y présentent aussi - de façon légèrement moins naturelle - sous toute une variété d'orientations et de tailles différentes, comme par exemple :

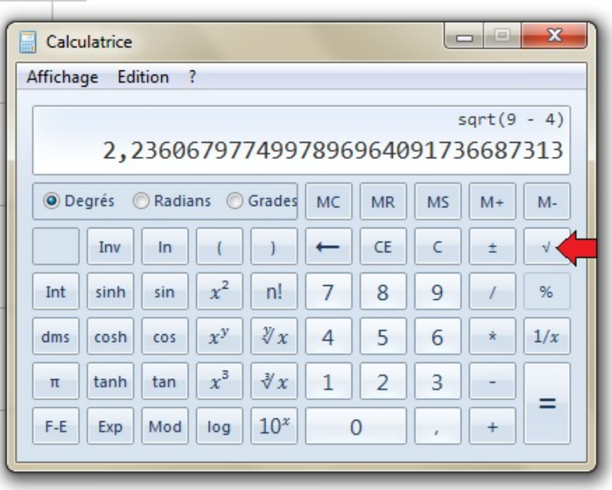


Il y a donc une certaine liberté dans cette structure qu'on va pouvoir faire jouer et utiliser à notre avantage. Intéressons-nous maintenant au double carré, celui de la chambre haute de la Grande Pyramide de Gizeh, du temple de Karnak, des cartes de tarot, etc...

2.1 Calcul de la longueur de la diagonale AC

C'est le fameux théorème de PYTHAGORE qu'on va redémontrer ici. Considérons un triangle ABC rectangle en B tel que $AB = 2$ et $BC = 1$, on va vérifier que l'hypoténuse $AC = \sqrt{5}$. Faisons d'abord trois copies du triangle ABC (en orange) et disposons-les dans le quadrillage de façon à former un grand carré $BDFH$ dans lequel s'inscrit un petit carré $ACEG$ (en violet) :





L'aire du triangle ABC vaut 1 unité (puisque c'est la moitié d'un rectangle formé de deux cellules carrées) et l'aire du grand carré vaut 9 unités. Pour trouver l'aire du petit carré, on soustrait 4 fois celle du triangle à celle du grand carré, soit $9 - 4 = 5$ unités. Par conséquent l'aire AC^2 doit valoir 5 unités et on trouve

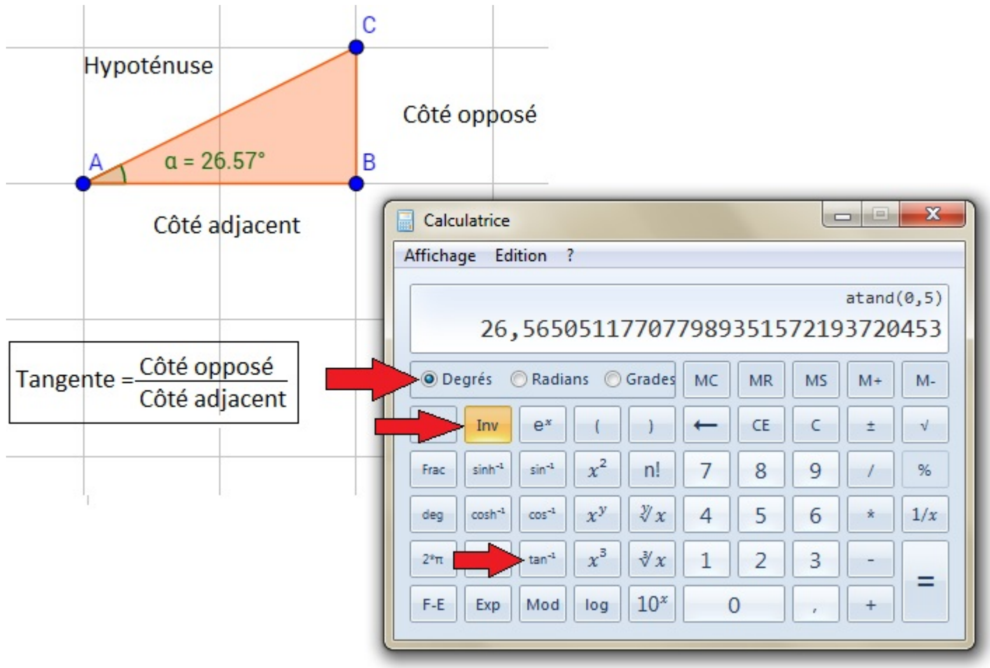
$$AC = \sqrt{5} \simeq 2,236.$$

Le même raisonnement, valable pour tous les triangles rectangles sans restriction, donne la fameuse identité de PYTHAGORE

$$\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2.}$$

Il est clair d'après la démonstration que cette identité concerne **des aires et non des longueurs**. C'est le fait, dans un second temps, de passer d'une aire à une longueur par la racine carrée – ou de prendre une « moyenne géométrique » d'après les Grecs, c'est-à-dire trouver la longueur du côté d'un carré ayant une aire donnée – qui conduit à des nombres irrationnels, alors que les aires sont toutes des nombres entiers ou rationnels.

2.2 Duplication de l'angle $\widehat{BAC}$

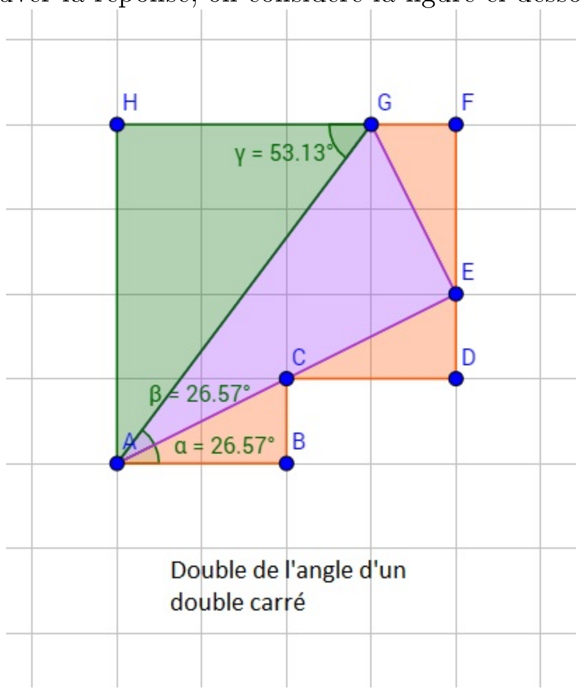


Considérons à nouveau un triangle ABC rectangle en B tel que $AB = 2$ et $BC = 1$. Pour calculer la valeur exacte de l'angle $\widehat{BAC}$ de sommet A, on utilise la calculatrice (programmée en mode Degrés) et un peu de trigonométrie... La *tangente* de cet angle est le rapport entre les longueurs du côté opposé BC et du côté adjacent AB, soit ici

$$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

La valeur de l'angle est donc *l'arctangente* de 0,5 soit 26,57° environ (c'est à nouveau un nombre irrationnel).

Le double de cet angle vaut 53,14° environ, mais c'est l'angle de quel multiple carré au juste ? Pour trouver la réponse, on considère la figure ci-dessous :



On y trouve notre triangle ABC (en orange) ainsi qu'un triangle AEG (en violet) qui lui est semblable, c'est-à-dire obtenu par rotation et agrandissement et de mêmes proportions. Celui-ci se construit simplement en alignant deux triangles identiques ABC et CDE selon leur hypoténuse, puis un troisième triangle EFG tourné d'un quart de tour vers la gauche. On compète la figure par un triangle GHA rectangle en H (en vert) en prenant appui sur le quadrillage.

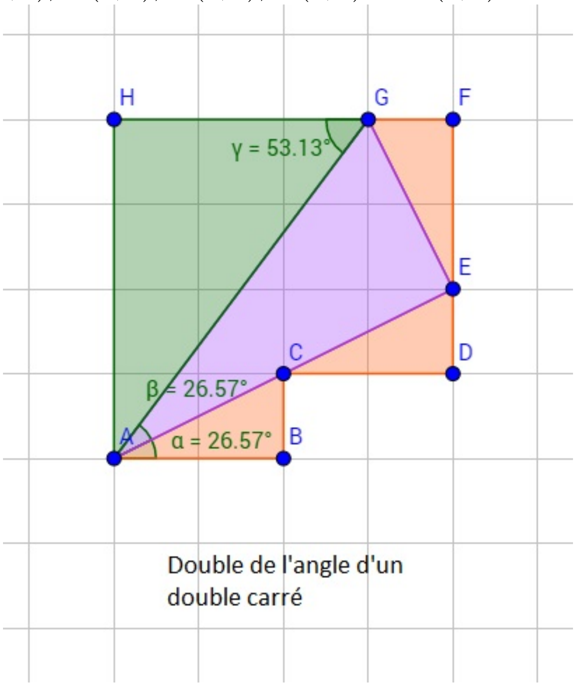
Par parallélisme, les angles $\widehat{BAG}$ et $\widehat{AGH}$ sont égaux (ils sont appelés *alternes-internes*). De plus l'angle $\widehat{BAG}$ est évidemment la somme des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{EAG}$. Enfin GHA est un triangle 3-4-5...

Pour résumer, **le double de l'angle 26,57° d'un double carré est précisément le grand angle 53,14° d'un triangle 3-4-5**. La démonstration par le même procédé du fait suivant est laissée au lecteur : **le double de l'angle 18,43° d'un triple carré est le petit angle 36,86° de ce même triangle 3-4-5**. On peut voir que, même si les mesures exactes de tous ces angles sont des nombres irrationnels, ils n'en sont pas moins reliés étroitement entre eux par une arithmétique interne particulièrement simple.

3 Entiers de Gauss

3.1 Coordonnées

Revenons à la dernière figure et passons aux *coordonnées* afin de retrouver le résultat géométrique par un calcul numérique. L'origine étant choisie en A, chaque point du quadrillage est repéré par son abscisse x et son ordonnée y, qui correspondent à un déplacement horizontal ou vertical depuis A. Par exemple C a pour coordonnées $x = 2$ et $y = 1$ ce qui se note aussi $C(2; 1)$. De même $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $D(4; 1)$, $E(4; 2)$, $F(4; 4)$, $G(3; 4)$ et $H(0; 4)$.



On a utilisé 2 triangles oranges horizontaux et 1 triangle orange vertical pour construire le triangle violet, ce qui correspond aux coordonnées $x = 2$ et $y = 1$ de C. De manière générale, si on avait voulu dupliquer l'angle d'un triangle donné par $C(x; y)$ quelconque, alors on aurait dû utiliser x triangles horizontaux puis y triangles verticaux. Les coordonnées de G se déduisent ainsi de x et y :

- pour l'abscisse, on se déplace x fois de x unités vers la droite, puis y fois de y unité vers la gauche ;
- pour l'ordonnée, on se déplace x fois de y unités vers le haut, puis y fois de x unités vers le haut ;

Ceci se résume par la formule

$$C(x;y) \mapsto G(x^2 - y^2; 2xy).$$

En appliquant cette formule à notre cas particulier $x = 2$ et $y = 1$ on retrouve $G(2^2 - 1^2; 2 \times 2 \times 1)$ soit $G(3;4)$.

3.2 Des coordonnées aux affixes

Cette formule donnant G devient beaucoup plus simple en passant aux nombres complexes. En effet, considérons le nombre réel 1 comme un déplacement d'une unité vers la droite, et le nombre imaginaire i (défini par la relation $i^2 = -1$) comme un déplacement d'une unité vers le haut. Ceci permet d'associer à chaque point du quadrillage un nombre complexe appelé son *affixe* de manière évidente :

Point	Abscisse	Ordonnée	Coordonnées	Affixe
A	0	0	$(0;0)$	0
B	2	0	$(2;0)$	2
C	2	1	$(2;1)$	$2+i$
D	4	1	$(4;1)$	$4+i$
E	4	2	$(4;2)$	$4+2i$
F	4	4	$(4;4)$	$4+4i$
G	3	4	$(3;4)$	$3+4i$
H	0	4	$(0;4)$	$4i$

Le point C ayant pour affixe $(2+i)$, élevons ce nombre au carré en utilisant la double distributivité :

$$(2+i)^2 = (2+i) \times (2+i) = 2 \times 2 + 2 \times i + i \times 2 + i \times i = 4 + 2i + 2i - 1 = 3 + 4i$$

on retrouve ainsi l'affixe de G.

Ce procédé astucieux s'applique à toutes les situations, avec l'avantage de ne jamais sortir du domaine des nombres entiers. Par exemple si on veut additionner l'angle 26,57° d'un double carré à celui 18,43° d'un triple carré, il suffit :

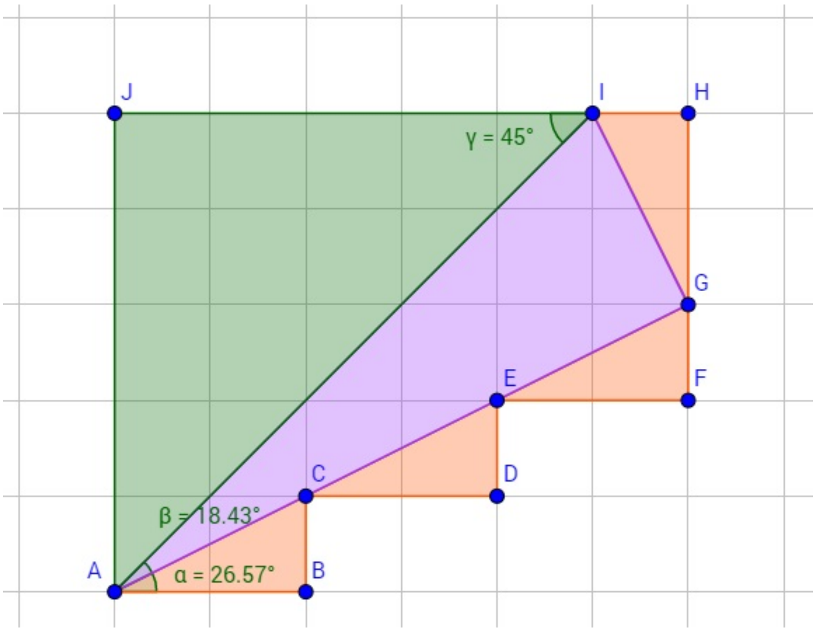
a. de traduire ces figures par des affixes : $(2+i)$ pour le double carré et $(3+i)$ pour le triple carré ;

b. de multiplier les deux affixes :

$$(2+i) \times (3+i) = 2 \times 3 + 2 \times i + i \times 3 + i \times i = 6 + 2i + 3i - 1 = 5 + 5i \ ;$$

c. d'interpréter géométriquement le résultat obtenu : c'est la diagonale d'un rectangle de côtés 5 et 5, autrement dit d'un carré.

En effet, 26,57 + 18,43 = 45,00 tout rond (et même avec les valeurs exactes irrationnelles...). Ce fait s'exprime géométriquement par la figure suivante (doubles carrés en orange, triple carré en violet, somme des deux angles en vert) :



H. CROWHURST résume ce résultat dans une conférence en disant que « $3+2=1$ », autrement dit que la somme des angles du triple carré et du double carré est l'angle d'un simple carré. Notre égalité $(3+i)\times(2+i)=(1+i)\times 5$ ne fait qu'exprimer cette même idée d'une arithmétique simple reliant ces angles, mais de façon un peu plus rigoureuse.

Pour compléter cet aperçu, on pourra consulter un cours de Terminale : un nombre complexe peut être représenté en coordonnées cartésiennes par une partie réelle (abscisse) et une partie imaginaire (ordonnée), mais aussi en coordonnées polaires par un module (rayon) et un argument (angle ou *phase* dans le vocabulaire de la mécanique quantique notamment). Lorsqu'on fait le produit de deux nombres complexes, **leurs modules se multiplient tandis que leurs phases s'ajoutent**, d'où l'on déduit les propriétés angulaires constatées ici. On trouve également dans ce programme une introduction à la forme exponentielle et la fameuse relation d'EULER

$$e^{i\pi}=-1.$$

4 Problème de la bissection

4.1 Triplets pythagoriciens

On appelle *triplet pythagoricien* un triangle rectangle dont les trois côtés se mesurent par des nombres entiers, ces nombres vérifiant ainsi l'identité de PYTHAGORE. Les exemples les plus simples de ces triplets sont bien sûr 3-4-5 puisque

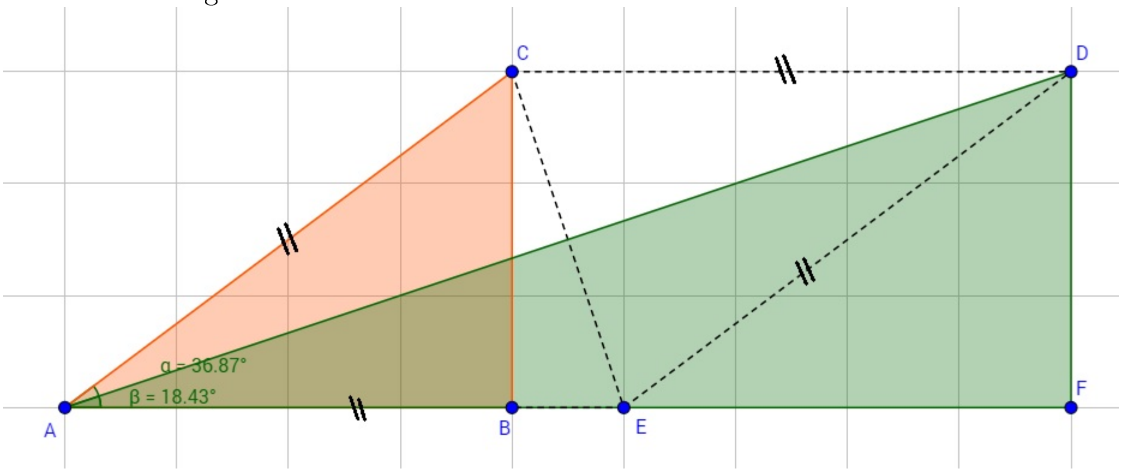
$$3^2+4^2=9+16=25=5^2$$

ainsi que 5-12-13 puisque

$$5^2+12^2=25+144=169=13^2.$$

On a constaté dans les sections précédentes que le double de l'angle d'un double carré ou d'un triple carré est l'angle exact d'un triangle 3-4-5, autrement dit d'un triplet pythagoricien. **C'est le cas pour tout les angles de multiples carrés : leur double est toujours l'angle d'un triplet pythagoricien.** Ceci montre bien que ces triplets ne sont pas rares du tout : par exemple, il y a 52 triplets pythagoriciens croissants formés de nombres inférieurs à 100, dont 16 sont primitifs et 36 s'en déduisent par multiplication.

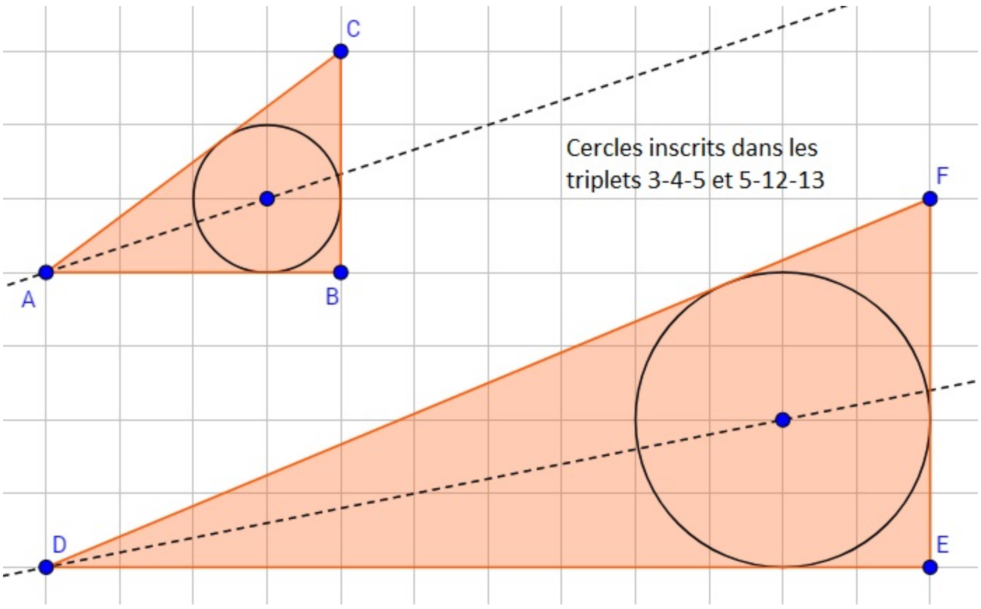
La réciproque de cette affirmation est également vraie : l'angle d'un triplet pythagoricien divisé par deux est toujours l'angle d'un multiple carré. Pour le vérifier, partons par exemple d'un triangle 3-4-5 et construisons la figure ci-dessous :



Les longueurs $AC = 5$ et CD sont égales, et le segment $[CD]$ est horizontal, ce qui permet de former un losange $ACDE$. Dans ce losange, la diagonale (AD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, c'est-à-dire la droite qui partage cet angle en deux angles égaux.

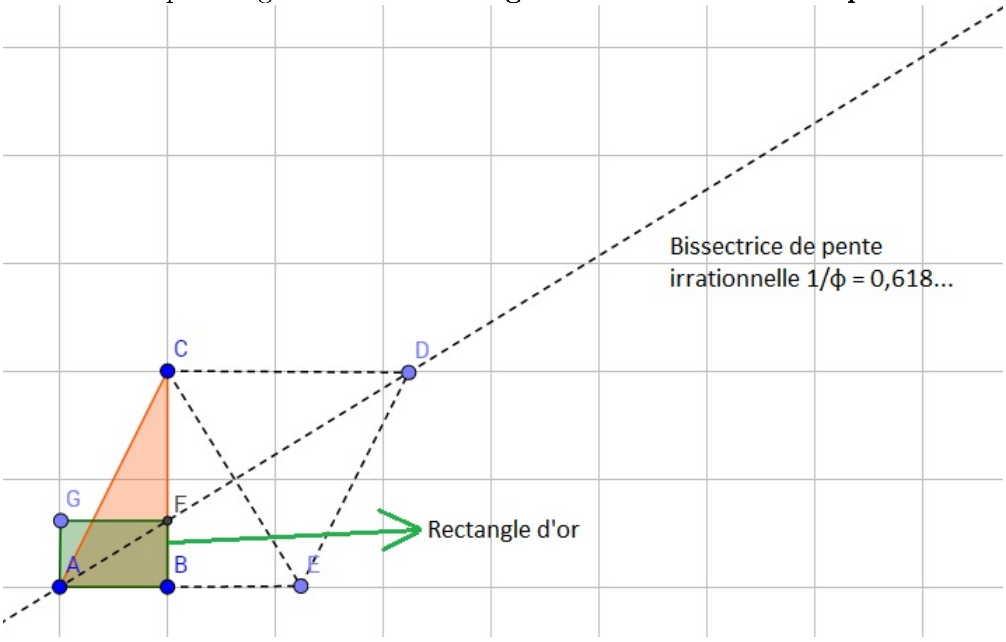
Pour conclure, il suffit de constater que la moitié inférieure de l'angle $\widehat{BAC}$ réalise un triangle rectangle AFD au proportions d'un triple carré. Mais il y a mieux : étant donné un triplet pythagoricien quelconque, on vérifie que le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, qui est le point d'intersection des trois bissectrices, est toujours un point du quadrillage, et que le rayon du cercle est un nombre entier donné par la formule

$$r = AB + BC - AC.$$



4.2 Et sinon ?

Si le triangle ABC n'est pas un triplet pythagoricien, autrement dit si la longueur de l'hypoténuse AC n'est pas un nombre entier alors que AB et BC le sont, alors le point D qui forme le losange n'est pas un point du quadrillage. Mais il y a pire : la droite (AD) qui est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ **ne passe alors par aucun point du quadrillage** à l'exception de son origine A, elle les évite tous (bien qu'elle se rapproche indéfiniment de certains d'entre eux). Cette prouesse géométrique, digne des plus habiles slalomeurs, n'est que la manifestation directe de l'irrationalité de la longueur de l'hypoténuse AC et entraîne que l'angle $\widehat{BAD}$ n'est **l'angle exact d'aucun multiple carré**.



Prenons par exemple un triangle ABC rectangle en B tel que $AB = 1$ et $BC = 2$. L'abscisse de D est égale à l'abscisse de C plus la longueur AC soit $x = 1 + \sqrt{5}$, et l'ordonnée de D est égale à celle de C soit $y = 2$. Par conséquent la tangente de l'angle $\widehat{BAD}$ vaut

$$\tan(\widehat{BAD}) = \frac{y}{x} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{\phi} \simeq 0,618.$$

Le lecteur attentif aura reconnu ici l'inverse du fameux nombre d'or $\phi = (1+\sqrt{5})/2 \simeq 1,618033989$. Cet exemple tiré d'une conférence de H. Crowhurst indique ainsi une façon parmi d'autres de construire un rectangle d'or à la règle et au compas.

Précisons que si le rectangle d'or de format $1 \times \phi$ était l'homothétique exact d'un multiple carré alors, en divisant la longueur p de ce dernier par sa largeur q, nous obtiendrions une expression du nombre d'or sous forme d'une fraction $\frac{p}{q}$ de deux nombres entiers, ce qui n'existe pas, bien que certaines fractions, notamment celles de Fibonacci, s'en approchent indéfiniment. Par conséquent, **le rectangle d'or n'est pas un multiple carré** à homothétie près, bien qu'il soit approchable avec n'importe quelle précision par des multiples carrés, comme l'est d'ailleurs n'importe quel rectangle.

Nous pouvons tenter ici d'établir une correspondance entre les nombres entiers et les entiers de Gauss. Doubler un angle correspond à élever un affixe au carré ; réciproquement, diviser un angle par deux correspond donc à prendre la racine carrée d'un affixe. Or la racine carré d'un nombre entier est soit un nombre entier (si le nombre est un carré parfait) soit un nombre irrationnel. De même, la racine carrée d'un entier de Gauss est soit un entier de Gauss (si le nombre représente un triplet pythagoricien) soit un « irrationnel de Gauss ». En bref, les triplets pythagoriciens sont exactement les carrés parfaits de l'arithmétique des entiers de Gauss.

5 Exercices

1. (a) Prouver que les diagonales d'un multiple carré de format 2×3 sont de longueur $\sqrt{13} \simeq 3,605$ et forment des angles de 33,69° et 56,31° environ. *Rappel : la somme des trois angles d'un triangle vaut toujours 180°.*

   (b) Prouver que le double du petit angle 33,69° de ce multiple carré est exactement le grand angle 67,38° du triplet pythagoricien 5-12-13.

2. (a) Prouver que le double du petit angle 22,62° du triplet pythagoricien 5-12-13 est exactement le grand angle 45,24° du triplet pythagoricien 119-120-169.
   (b) Prouver que le triple du même angle 22,62° est exactement le double de l'angle 33,93° d'un multiple carré de format 605×407 et montrer que les diagonales de ce dernier ont pour longueur $\sqrt{531\ 674} \simeq 729,16$.
3. Soit $n \geqslant 3$ un nombre entier quelconque. Prouver que le double du petit angle d'un rectangle formé de n carrés alignés est l'angle d'un triplet pythagoricien

$$(2n) \diamond (n^2 - 1) \diamond (n^2 + 1).$$

   Applications : pour $n = 5$ on obtient le triplet 10-24-26 ; pour $n = 10$ on obtient le triplet 20-99-101.
4. (a) Calculer $(5 + i)^4$ d'une part et $(1 + i) \times (239 + i)$ d'autre part.
   (b) En déduire la formule de MACHIN

$$4 \arctan(1/5) - \arctan(1/239) = \arctan(1).$$