Multiples carrés

par Lafla

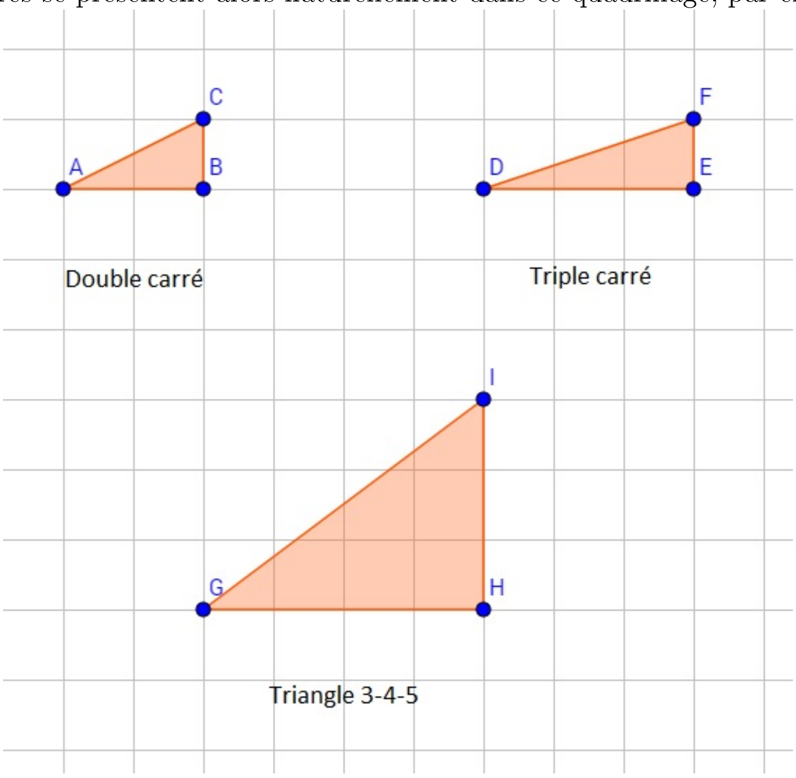
22 juin 2017

Les travaux de Howard Crowhurst mettent en évidence une structure géométrique dans les alignements mégalithiques de Carnac (datés d'environ 4000 ans avant J.C.) qui se retrouve aussi sur d'autres sites dans le monde (Mexique, Égypte, Moyen-Orient, Cambodge, etc...). Cette architecture s'appuie sur diverses données géographiques, astronomiques et métrologiques, et les combine selon certains principes géométriques clairement identifiables. Il se dégage en effet de cette pensée une notion centrale, un format typique que l'on peut appeler *multiple carré*.

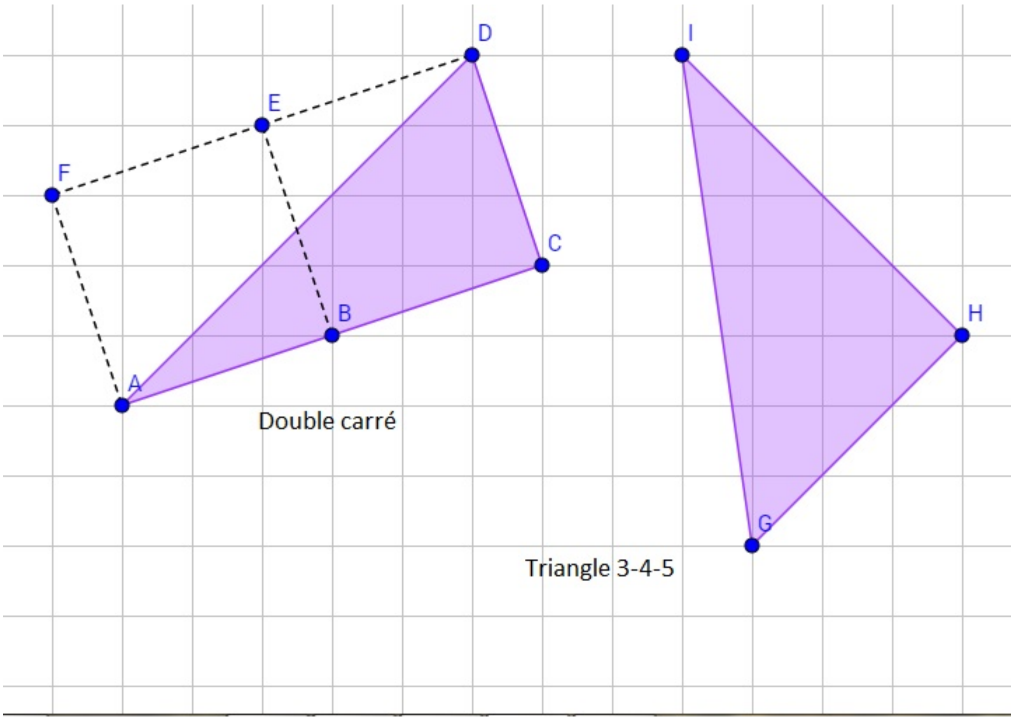
Voici quelques notions de ce que l'on appelle « arithmétique des entiers de Gauss » et qui permettent de traiter n'importe quel problème ou question de géométrie concernant les multiples carrés.

1 Utilisation d'un quadrillage

Tout commence avec un quadrillage, c'est-à-dire une famille de droites horizontales et verticales régulièrement espacées. Ces droites permettent de recouvrir le plan par une famille de cellules carrées toutes identiques, de côté 1 unité et d'aire $1 \times 1 = 1$ unité. Toutes les figures formées par des multiples carrés se présentent alors naturellement dans ce quadrillage, par exemple :



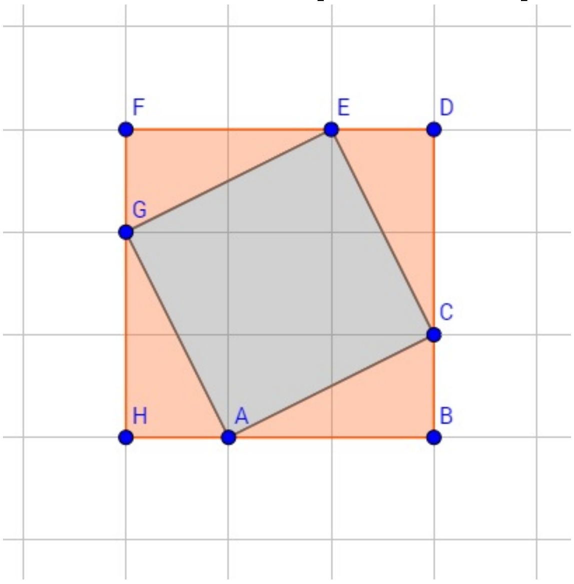
Elles se présentent aussi - de façon légèrement moins naturelle - sous toute une variété d'orientations et de tailles différentes, comme par exemple :



Il y a donc une certaine liberté dans cette structure qu'on va pouvoir faire jouer et utiliser à notre avantage. Intéressons-nous maintenant au double carré, celui de la chambre haute de la GP, du temple de Karnak, des cartes de tarot, etc...

1.1 Calcul de la longueur de la diagonale AC

C'est le fameux théorème de PYTHAGORE qu'on va redémontrer ici. Considérons un triangle ABC rectangle en B tel que $AB = 2$ et $BC = 1$, on va vérifier que l'hypoténuse $AC = \sqrt{5}$. Faisons d'abord trois copies du triangle ABC (en orange) et disposons-les dans le quadrillage de façon à former un grand carré $BDFH$ dans lequel s'inscrit un petit carré $ACEG$ (en violet) :



L'aire du triangle ABC vaut 1 unité (puisque c'est la moitié d'un rectangle formé de deux cellules carrées) et l'aire du grand carré vaut 9 unités. Pour trouver l'aire du petit carré, on soustrait 4 fois celle du triangle à celle du grand carré, soit 9 - 4 = 5 unités. Par conséquent AC^2 doit valoir 5 unités d'aire et donc on trouve

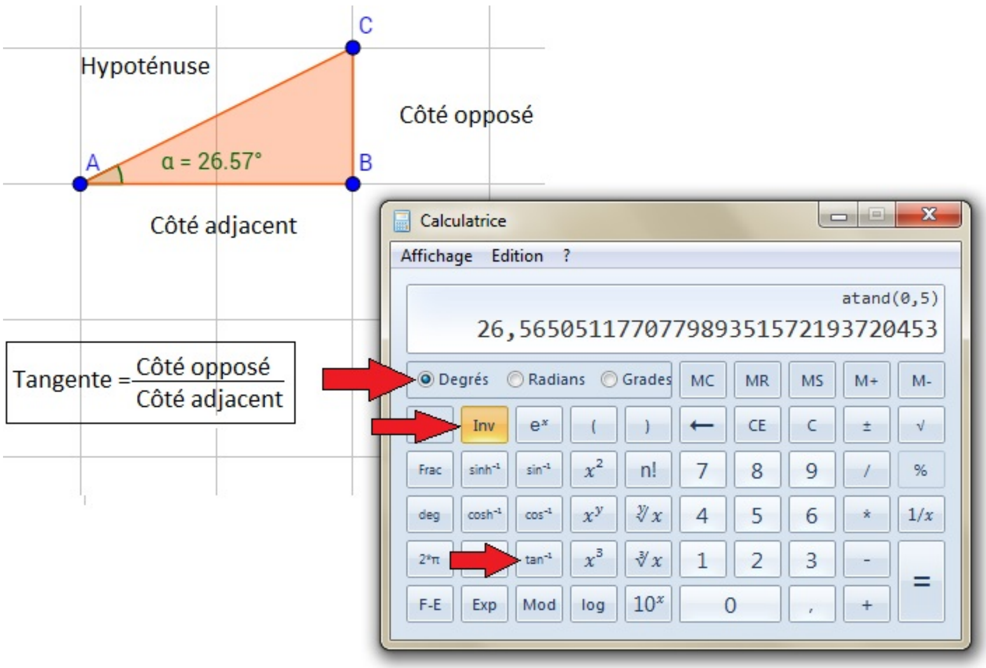
$$AC = \sqrt{5} \simeq 2,236.$$

Le même raisonnement, valable pour tous les triangles rectangles sans restriction, donne la fameuse identité de PYTHAGORE

$$\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2.}$$

On voit clairement ici que cette identité concerne des aires et non des longueurs. C'est le passage d'une aire à une longueur (ou "moyenne géométrique", d'après les Grecs) à travers la racine carrée qui introduit des nombres irrationnels, alors que les aires sont toutes des nombres entiers.

1.2 Duplication de l'angle BAC

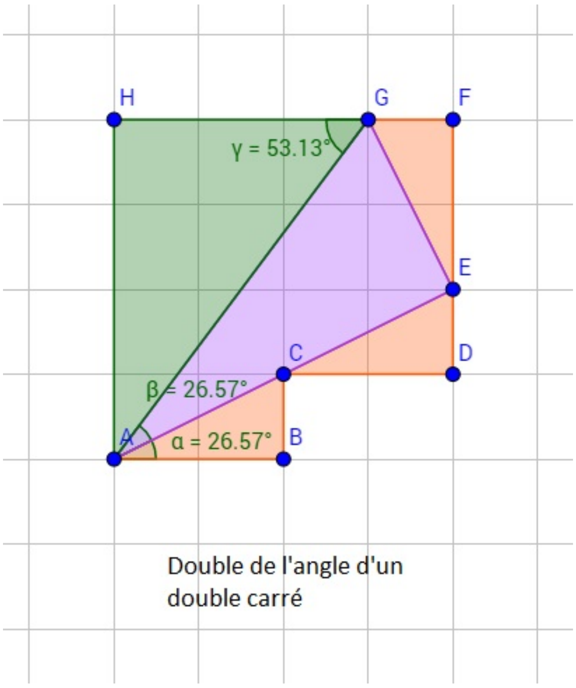


Considérons à nouveau un triangle ABC rectangle en B tel que $AB = 2$ et $BC = 1$. Pour calculer la valeur exacte de l'angle $\widehat{BAC}$ de sommet A, on utilise la calculatrice (programmée en mode DEGRÉS) et un peu de trigonométrie... La *tangente* de cet angle est le rapport entre les longueurs du côté opposé BC et du côté adjacent AB, soit ici

$$\tan(\widehat{BAC}) = BC/AC = 1/2 = 0,5.$$

La valeur de l'angle est donc *l'arctangente* de 0,5 soit 26,57° environ (c'est à nouveau un nombre irrationnel).

Le double de cet angle vaut 53,14° environ, mais c'est l'angle de quel multiple carré au juste ? Pour trouver la réponse, on considère la figure ci-dessous :



On y trouve notre triangle ABC (en orange) ainsi qu'un triangle AEG (en violet) qui lui est semblable, c'est-à-dire obtenu par rotation et agrandissement et de mêmes proportions. Celui-ci se construit simplement en alignant deux triangles identiques ABC et CDE selon leur hypoténuse, puis un troisième triangle EFG tourné d'un quart de tour vers la gauche. On compète la figure par un triangle GHA rectangle en H (en vert) en prenant appui sur le quadrillage.

Par parallélisme, les angles $\widehat{BAG}$ et $\widehat{AGH}$ sont égaux (ils sont appelés *alternes-internes*). De plus l'angle $\widehat{BAG}$ est évidemment la somme des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{EAG}$. Pour conclure GHA est un triangle 3-4-5... et pour résumer, le double de l'angle 26,57° d'un double carré est précisément le grand angle 53,14° d'un triangle 3-4-5.

La démonstration par le même procédé du fait suivant est laissée au lecteur : le double de l'angle 18,43° d'un triple carré est le petit angle 36,86° de ce même triangle 3-4-5. On peut voir que, même si les mesures exactes de tous ces angles sont des nombres irrationnels, ils obéissent à une arithmétique interne particulièrement simple (d'ailleurs ce ne sont à la base que des nombres rationnels, c'est-à-dire des fractions d'entiers, rendus irrationnels par application de la fonction arctangente).

1.3 Triplets pythagoriciens

On peut même montrer que le double de n'importe quel angle apparaissant dans un multiple carré est un angle apparaissant dans un *triplet pythagoricien*, c'est-à-dire un triangle rectangle dont les trois côtés se mesurent par des nombres entiers. Les exemples les plus simples de ces triplets sont bien sûr 3-4-5 puisque

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

ainsi que 5-12-13 puisque

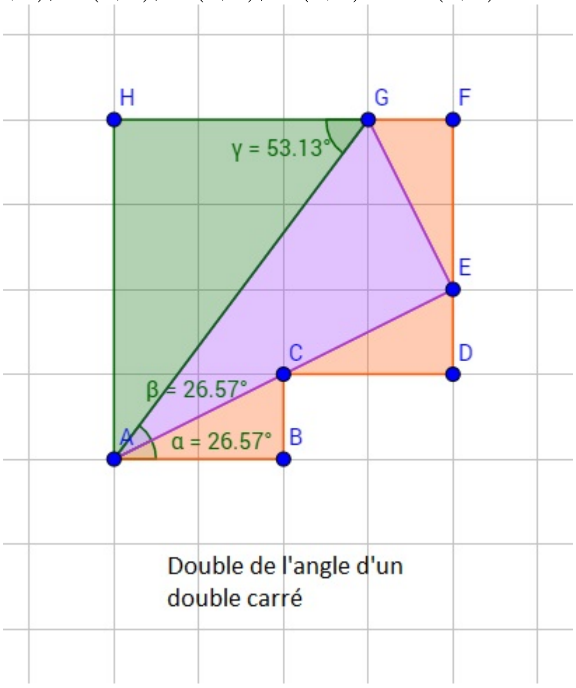
$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2.$$

À noter que ces configurations ne sont pas rares du tout : il y a 52 triplets pythagoriciens croissants formés de nombres inférieurs à 100, dont 16 sont primitifs et 36 s'en déduisent par multiplication (cf Wikipédia).

2 Entiers de Gauss

2.1 Coordonnées

Revenons à la dernière figure et passons aux *coordonnées* afin de retrouver le résultat géométrique par un calcul numérique. L'origine étant choisie en A, chaque point du quadrillage est repéré par son abscisse x et son ordonnée y, qui correspondent à un déplacement horizontal ou vertical depuis A. Par exemple C a pour coordonnées $x = 2$ et $y = 1$ ce qui se note aussi $C(2; 1)$. De même $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $D(4; 1)$, $E(4; 2)$, $F(4; 4)$, $G(3; 4)$ et $H(0; 4)$.



On a utilisé 2 triangles oranges horizontaux et 1 triangle orange vertical pour construire le triangle violet, ce qui correspond aux coordonnées $x = 2$ et $y = 1$ de C. De manière générale, si on avait voulu dupliquer l'angle d'un triangle donné par $C(x; y)$ quelconque, alors on aurait dû utiliser x triangles horizontaux puis y triangles verticaux. Les coordonnées de G se déduisent ainsi de x et y :

- pour l'abscisse, on se déplace x fois de x unités vers la droite, puis y fois de y unité vers la gauche ;
- pour l'ordonnée, on se déplace x fois de y unités vers le haut, puis y fois de x unités vers le haut ;

Ceci se résume par la formule

$$C(x; y) \mapsto G(x^2 - y^2; 2xy).$$

En appliquant cette formule à notre cas particulier $x = 2$ et $y = 1$ on retrouve $G(2^2 - 1^2; 2 \times 2 \times 1)$ soit $G(3; 4)$.

2.2 Des coordonnées aux affixes

Cette formule donnant G devient beaucoup plus simple en passant aux nombres complexes. En effet, considérons le nombre réel 1 comme un déplacement d'une unité vers la droite, et le nombre imaginaire i (défini par la relation $i^2 = -1$) comme un déplacement d'une unité vers le haut. Ceci permet d'associer à chaque point du quadrillage un nombre complexe appelé son *affixe* de manière évidente :

Point	Abscisse	Ordonnée	Coordonnées	Affixe
A	0	0	$(0;0)$	0
B	2	0	$(2;0)$	2
C	2	1	$(2;1)$	$2+i$
D	4	1	$(4;1)$	$4+i$
E	4	2	$(4;2)$	$4+2i$
F	4	4	$(4;4)$	$4+4i$
G	3	4	$(3;4)$	$3+4i$
H	0	4	$(0;4)$	$4i$

Le point C ayant pour affixe $(2+i)$, élevons ce nombre au carré en utilisant la double distributivité :

$$(2+i)^2 = (2+i)\times(2+i) = 2\times 2 + 2\times i + i\times 2 + i\times i = 4+2i+2i-1 = 3+4i$$

on retrouve ainsi l'affixe de G.

Ce procédé astucieux s'applique à toutes les situations, avec l'avantage de ne jamais sortir du domaine des nombres entiers. Par exemple si on veut additionner l'angle 26,57° d'un double carré à celui 18,43° d'un triple carré, il suffit :

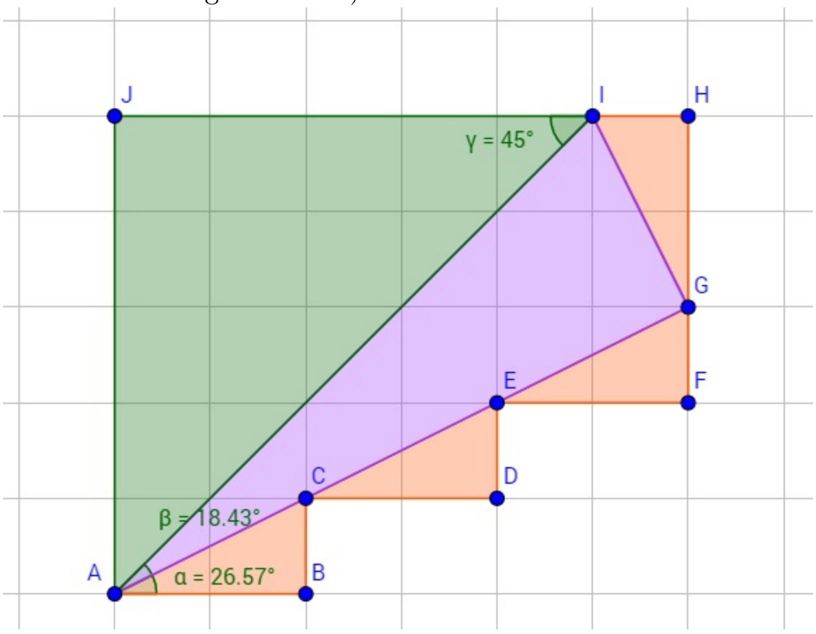
a. de traduire ces figures par des affixes : $(2+i)$ pour le double carré et $(3+i)$ pour le triple carré ;

b. de multiplier les deux affixes :

$$(2+i)\times(3+i) = 2\times 3 + 2\times i + i\times 3 + i\times i = 6+2i+3i-1 = 5+5i\ ;$$

c. d'interpréter géométriquement le résultat obtenu : c'est la diagonale d'un rectangle de côtés 5 et 5, autrement dit d'un carré.

En effet, 26,57 + 18,43 = 45,00 tout rond (et même avec les valeurs exactes irrationnelles...). Ce fait s'exprime géométriquement par la figure suivante (doubles carrés en orange, triple carré en violet, somme des deux angles en vert) :



Un nombre réel (programme de Seconde) exprime une mesure de longueur et prend place sur une droite, tandis qu'un nombre complexe (programme de Terminale S) exprime à la fois une mesure de longueur et une mesure d'angle et prend place dans un plan. En coordonnées cartésiennes, les nombres complexes ont une partie réelle (abscisse) et une partie imaginaire (ordonnée) ; en coordonnées polaires, ils ont aussi un module (rayon) et un argument (angle, qu'on appelle aussi *phase* en mécanique quantique notamment). Lorsqu'on multiplie deux nombres complexes, les modules se multiplient et les phases s'additionnent.