§1.4. Équations différentielles linéaires du second ordre

Déf Soit I un intervalle ouvert. On appelle équation différentielle linéaire du second ordre une équation de la forme

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \qquad (EDL2)$$

où $p, f, q : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Déf Une équation de la forme

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

est dite une EDL2 homogène.

On cherche une solution de cette equation de classe $C^2(I, \mathbb{R})$.

Ex 1. $y'' = 0$. EDL2 homogène.

$\Rightarrow \quad y'(x) = C_1, \ \in \mathbb{R} \ ; \quad \underbrace{y(x) = C_1 x + C_2,} \quad \underbrace{C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}.}$

Ex 2 EDL2 homogène à coefficients constants

$$y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = 0 \quad , \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$$(*) \qquad y''(x) - (a+b)\,y'(x) + ab\,y(x) = 0 \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

a et b sont les racines de l'equation quadratique $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

Pour résoudre $(*)$, on fait un changement de variable:

$$\big(\underbrace{y'(x) - a\,y(x)}_{z(x)}\big)' - b\big(\underbrace{y'(x) - a\,y(x)}_{z(x)}\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (*)$$

$$z'(x) - b\,z(x) = 0 \qquad \text{EDL1 homogène}$$

(dé)croissance exponentielle

$$\Rightarrow \boxed{z(x) = C_1 e^{bx}} \qquad \text{la solution générale} , \quad C_1 \in \mathbb{R} , \ x \in \mathbb{R}$$

$z(x) = y'(x) - a\,y(x)$ => on a l'équation pour $y(x)$:

$$y'(x) \underbrace{-\,a}_{p(x)}\,y(x) = \underbrace{C_1 e^{bx}}_{f(x)} \qquad \text{EDL1}$$

$$y'(x) \underbrace{-a}_{p(x)} y(x) = \underbrace{C_1 e^{bx}}_{f(x)}$$

$$p(x) = -a \Rightarrow P(x) = \int -a\, dx = -ax \Rightarrow y_{hom}(x) = C_2 e^{ax}$$ – solution générale de l'équation homogène associée.

$$c(x) = \int \underbrace{C_1 e^{bx}}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{-ax}}_{e^{+P(x)}} dx = C_1 \int e^{(b-a)x} dx = \begin{cases} \frac{1}{b-a} C_1 e^{(b-a)x}, & \text{si } b \neq a \\ C_1 x, & \text{si } b = a \end{cases}$$

$$y_{part}(x) = C(x) e^{-P(x)} = \begin{cases} C_1 e^{(b-a)x} \cdot e^{ax} = C_1 e^{bx}, & \text{si } a \neq b \\ C_1 x e^{ax}, & \text{si } a = b. \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \overbrace{C_2 e^{ax}}^{y_{hom}} + \overbrace{C_1 e^{bx}}^{y_{part}}, & \text{si } a \neq b \\ C_2 e^{ax} + C_1 x e^{ax}, & \text{si } a = b. \end{cases}$$

C_1, C_2 - deux constantes arbitraires.

a, b les racines de l'equation $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

Si $a \neq b$ sont des racines complexes, telles que $a, b \notin \mathbb{R}$

Alors $a = \bar{b} \Rightarrow y(x) = C e^{ax} + \bar{C} e^{\bar{a}x}$ pour avoir $y(x) \in \mathbb{R}$.

Soit $C = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2) \Rightarrow \bar{C} = \frac{1}{2}(C_1 + iC_2)$; $a = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$y(x) = C e^{ax} + \bar{C} e^{\bar{a}x} = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2) e^{\alpha x} e^{i\beta x} + \frac{1}{2}(C_1 + iC_2) e^{\alpha x} e^{-i\beta x} =$$

$$= C_1 e^{\alpha x} \underbrace{\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}}_{\cos \beta x} + C_2 e^{\alpha x} \underbrace{\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}}_{\sin \beta x} =$$

$$\boxed{-i = \frac{1}{i}}$$

$$e^{i\beta x} = (\cos \beta x + i \sin \beta x) \Rightarrow \cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

$$= C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de l'équation (*)

si $b = \bar{a} \notin \mathbb{R}$

Résumé : EDL2 homogène à coefficients constants

$$y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = 0$$

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ les racines de l'equation $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$.

Alors la solution générale est

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}, & \text{si } a \neq b,\ a, b \in \mathbb{R} \\ C_1 e^{ax} + C_2\, x\, e^{ax}, & \text{si } a = b \in \mathbb{R} \\ C_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin\beta x, & \text{si } a = \alpha + i\beta = \bar{b} \notin \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{matrix} C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}}$$