400002) PH L2-S1-15
402006)

BU140398

Université de Lille Sciences et Technologies

Licence 2 STA **7 janvier 2014**

Semestre 3 ~~PEIP~~, ~~PC~~, ~~SE~~, PF, ~~Math~~

Introduction à l'électromagnétisme

Durée : 2 heures 30 min

Documents et calculatrices non autorisés

Soignez la rédaction et la clarté des explications

Formulaire d'analyse vectorielle joint

EXERCICE I

Induction magnétique créée par un conducteur parcouru par un courant électrique

1 – Un fil rectiligne infini et homogène F a une section droite circulaire de rayon R. Il est parcouru par un courant constant d'intensité I caractérisé par un vecteur densité de courant de conduction uniforme $\vec{j}$. Les milieux (conducteur et extérieur) ont la même perméabilité magnétique μ_o que le vide. On désire étudier en tout point M de l'espace, le champ d'induction magnétique $\vec{B}$, ainsi que le potentiel-vecteur $\vec{A}$ qui en dérive, créés par ce système.

a) Indiquer et justifier de façon claire le système de coordonnées adéquat qui sera utilisé. Le représenter sur un schéma en y reportant les vecteurs unitaires ainsi que les coordonnées d'un point M de l'espace. Sur ce schéma, représenter également une portion de F.

b) Justifier le fait que le vecteur champ d'induction magnétique $\vec{B}$ est axial et que le potentiel-vecteur $\vec{A}$ est polaire.

c) À l'aide des propriétés de symétrie du système, déterminer, en tout point M de l'espace, la direction et le sens des vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{A}$.
Tracer quelques lignes de champ d'induction $\vec{B}$.

d) En considérant les invariances du système, indiquer de quelles coordonnées vont dépendre $\vec{B}(M)$ et $\vec{A}(M)$.

2 – a) Exprimer la norme du vecteur densité de courant de conduction $\vec{j}$ dans le conducteur F en fonction de I et de R. Quels sont sa direction et son sens ?

b) Énoncer précisément en fonction de $\vec{j}$, la forme intégrale du théorème d'Ampère.

c) À l'aide de ce théorème, et avec toutes les justifications nécessaires établir, notamment en fonction de l'intensité I, l'expression du champ d'induction magnétique $\vec{B}_{ext}$ produit par ce fil en un point M extérieur au fil.

d) Établir également, notamment en fonction de I et de R, l'expression du champ d'induction magnétique $\vec{B}_{int}$ produit par ce fil en tout point intérieur à celui-ci.

e) Représenter les variations de la norme de $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace (extérieur et intérieur au cylindre).

BU140398

3 – a) Quelle est la relation fondamentale qui relie $\vec{B}$ et $\vec{A}$?

b) À l'aide des résultats précédents (questions 1c et 1d) et en vous servant du formulaire d'analyse vectorielle joint, déduire de cette relation fondamentale une expression simple reliant les composantes non nulles de $\vec{B}$ et de $\vec{A}$.

4 – En déduire, notamment en fonction de I et de R, l'expression des potentiels-vecteurs $\vec{A}_{ext}$ et $\vec{A}_{int}$ en tout point de l'espace extérieur et intérieur au cylindre, sachant que le potentiel-vecteur étant défini à une constante près, on supposera qu'il s'annule sur la surface du cylindre.

Tracer les variations de la norme de $\vec{A}$ en tout point M de l'espace (extérieur et intérieur du cylindre).

EXERCICE II

Ondes planes électromagnétiques

Dans un repère cartésien de vecteurs unitaires $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, un champ électrique $\vec{E}(z,t)$ <u>dans le vide</u>, s'écrit à l'instant t, en un point M repéré par $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$:

$\vec{E}(z,t) = \vec{u}_x\ E_0 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$, où E_0, et ω sont des constantes positives. $\vec{k}$ est le vecteur d'onde définissant le sens de propagation de l'onde. Dans cet exercice on considère le cas particulier où le vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_z$. Dans ces conditions $\vec{E}(z,t) = \vec{u}_x\ E_0 \cos(\omega t - kz)$.

1/ <u>Questions de cours</u>

a/ Identifier le terme d'amplitude et le terme de phase de cette onde.

b/ Quelle est sa polarisation ?

c/ Définir le lieu (P) des points où la phase, pour t donné est constante.

d/ Comment est disposé le vecteur $\vec{E}(z,t)$ par rapport à (P) et au vecteur $\vec{k}$? Représenter précisément cette disposition dans le repère Oxyz.

Utiliser, si nécessaire, le formulaire d'analyse vectorielle joint.

2) Calculer $\mathrm{div}\vec{E}$. Le résultat trouvé est-il conforme à l'équation de Maxwell-Gauss relative à la divergence du champ électrique ?

3) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}$.

a/ En déduire, à l'aide de l'équation locale de Maxwell-Faraday, les expressions des composantes du champ magnétique $\vec{B}$ associé à cette onde. On ne prendra pas en compte les champs statiques.

b/ Quelle est l'amplitude de $\vec{B}$ en fonction de k, ω et E_0 ?

c/ Pour t et z donnés, représenter, dans le repère Oxyz, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, ainsi que vecteur d'onde associé $\vec{k}$.

4) Calculer $\mathrm{div}\vec{B}$. Le résultat trouvé est-il conforme à l'équation de Maxwell relative à la divergence du champ magnétique ?

BU140398

5) a/ Calculer $\overrightarrow{\text{rot}\,\text{B}}$. L'exprimer en fonction de E_0 et des paramètres (ω, k, t) donnés.

b/ Calculer $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. En identifiant avec la forme locale de l'équation de Maxwell-Ampère, en déduire l'expression de la vitesse de propagation de cette onde en fonction de k et de ω.

6) a/ En exprimant le fait que, pour un instant t donné, lorsque $(\omega t - kz)$ varie de 2π, l'onde se retrouve identique à elle-même, retrouver l'expression de la longueur d'onde λ de cette onde en fonction de k.

b/ De la même façon, en exprimant le fait qu'en un point z donné, lorsque $(\omega t - kz)$ varie de 2π, l'onde se retrouve identique à elle-même, retrouver l'expression de la période T de cette onde en fonction de ω.

c/ En déduire une relation entre λ et T.

PRINCIPAUX OPÉRATEURS EXPRIMÉS DANS TROIS SYSTÈMES DE COORDONNÉES

- **CARTÉSIENNES**

– Champ scalaire $\Phi(x, y, z)$

– Champ vectoriel $\vec{W}(x,y,z) = W_x(x,y,z)\vec{u}_x + W_y(x,y,z)\vec{u}_y + W_z(x,y,z)\vec{u}_z$

$$\text{div}\,\vec{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W} = \left(\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

- **CYLINDRIQUES**

– Champ scalaire $\Phi(\rho, \theta, z)$

– Champ vectoriel $\vec{W}(\rho,\theta,z) = W_\rho(\rho,\theta,z)\vec{u}_\rho + W_\theta(\rho,\theta,z)\vec{u}_\theta + W_z(\rho,\theta,z)\vec{u}_z$

$$\text{div}\,\vec{W} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho W_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial W_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial W_z}{\partial \theta} - \frac{\partial W_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial W_\rho}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial \rho}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\, W_\theta) - \frac{\partial W_\rho}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

- **SPHÉRIQUES**

– Champ scalaire $\Phi(r, \theta, \varphi)$

– Champ vectoriel $\vec{W}(r,\theta,\varphi) = W_r(r,\theta,\varphi)\vec{u}_r + W_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{u}_\theta + W_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec{u}_\varphi$

$$\text{div}\,\vec{W} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 W_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\, W_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, W_\varphi) - \frac{\partial W_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial W_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\, W_\varphi)\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\, W_\theta) - \frac{\partial W_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_\varphi$$