DS 2 – Mécanique des solides et des fluides

durée 2h — documents et calculatrices non autorisés

A Verre vide ou plein sur un flotteur

Sur un flotteur en liège de section s, au repos sur la surface libre de l'eau d'un cristallisoir (de section S_0), on a déposé un verre de section a rempli d'eau jusqu'à une hauteur h. La hauteur d'eau dans le cristallisoir est Z_1. On vide l'eau du verre dans le cristallisoir, la nouvelle hauteur d'eau dans ce-dernier est Z_2. On notera h_1 et h_2 les hauteurs du flotteur immergées dans les deux cas.

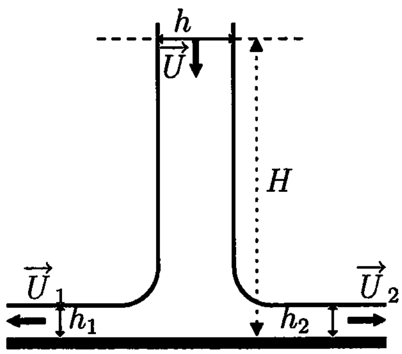
–1– Donner la relation liant $(Z_2 - Z_1)$ et $h_2 - h_1$ en fonction de h, s, S_0 et a.

–2– Ecrire la condition d'équilibre du système dans les deux cas. On désignera par M la masse de ce qui flotte en dehors de l'eau du verre.

–3– Comparer Z_1 et Z_2.

–4– Application : que concluez-vous lors de la fusion d'un glaçon flottant à la surface d'un verre plein.

B Jet incident sur un plan



Un jet de liquide bidimensionnel en forme de lame d'épaisseur variable et de largeur unité dans la direction orthogonale au plan de la figure se divise en arrivant sur le plan en deux lames d'épaisseurs h_1 et h_2. On note $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ les vitesses des lames émergentes, supposées constantes loin du point d'impact. A l'altitude H, la lame incidente a une épaisseur h et une vitesse $\vec{U}$ supposée uniforme à travers la section. On négligera les effets de la viscosité en supposant le fluide parfait. Les épaisseurs des lames émergentes de liquide étant faibles, on y négligera aussi les effets dus à la pesanteur.

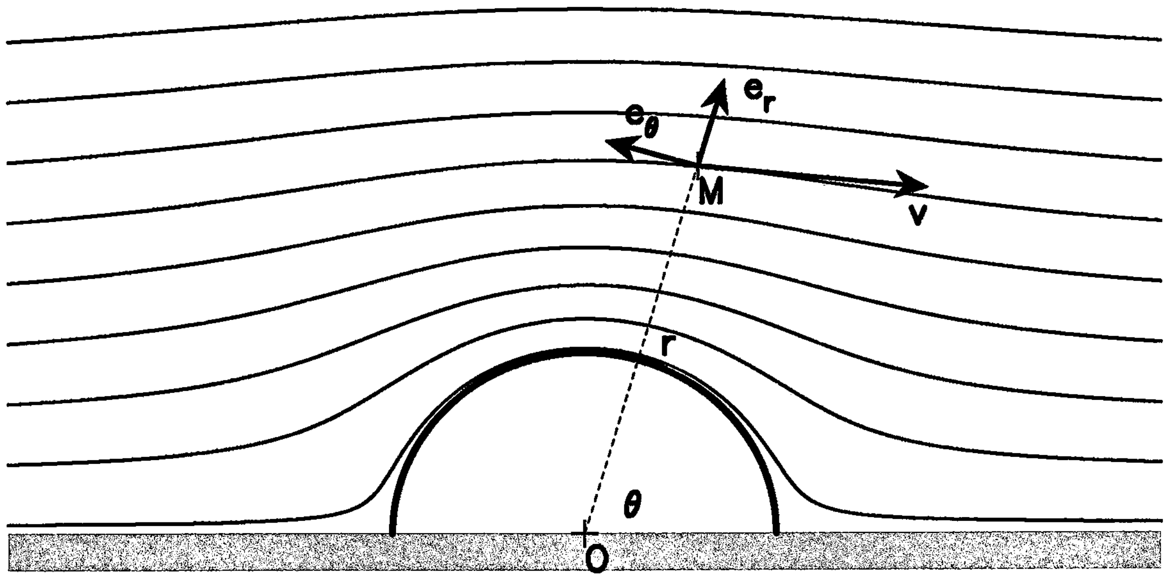
–1– Déterminer les vitesses $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$, loin du point d'impact. En déduire une relation entre les épaisseurs.

–2– Calculer la force exercée par le jet sur la plaque.

–3– Le fluide étant parfait, la force exercée par le jet doit être orthogonale à la plaque, en déduire une nouvelle relation entre h_1 et h_2.

–4– Exprimer h_1 et h_2 en fonction de h, U, g et H.

C Écoulement autour d'une serre–tunnel



La serre–tunnel est modélisée par un demi-cylindre creux de rayon $R = 5$ m d'axe Oz et de longueur infinie. On se propose ici d'étudier l'impact mécanique sur la serre d'un écoulement d'air dans la direction transverse à l'axe du cylindre. On négligera les effets de la viscosité. L'air emprisonné dans la serre est immobile et à la pression atmosphérique P_0.

–1– Justifier l'approximation consistant à négliger les variations de pression hydrostatique (due exclusivement à la gravité) que l'on utilisera dans la suite.

La vitesse de l'écoulement autour de la serre est donnée dans la base cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ par :

$$\vec{v}_M(r,\theta) = U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta\,\vec{e}_r - U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta\,\vec{e}_\theta$$

Étude de écoulement

–2– Montrer que le champ de vitesse est parallèle et uniforme loin de la serre (quand $r \to \infty$).

–3– Vérifier que ce champ de vitesse satisfait aux conditions aux bords.

–4– L'écoulement est–il permanent ?

–5– L'écoulement est–il irrotationnel ?

–6– L'écoulement est–il incompressible ?

–7– En déduire que le champ de vitesse peut être obtenu à partir d'une fonction $A_z(r,\theta)$ par la relation

$$\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(A_z(r,\theta)\,\vec{e}_z\right).$$

Déterminer la fonction $A_z(r,\theta)$

–8– Que représentent les courbes $A_z = \text{cte}$.

Impact mécanique sur la serre

–9– Justifier l'emploi de l'équation de Bernoulli pour la résolution de ce problème.

–10– Donner le champ de vitesse au voisinage de la surface de la serre $(r = R)$.

–11– Utilisant l'équation de Bernoulli, déterminer le champ de pression au voisinage de la surface de la serre.

–12– En déduire la résultante des forces de pression sur la serre.

FORMULAIRE

A Relations usuelles

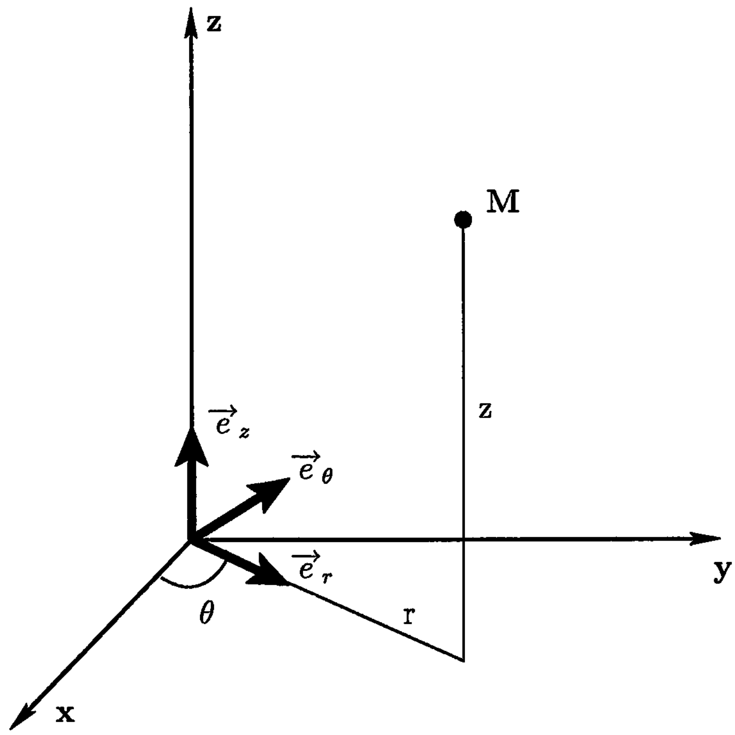
$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U\right) &= \Delta\, U \\
\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A}\right) &= 0 \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U\right) &= 0 \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A}\right) &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\, \vec{A}\right) - \vec{\Delta}\, \vec{A} \\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(U\, W) &= W\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(U) + U\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(W) \\
\mathrm{div}\left(U\, \vec{A}\right) &= U\, \mathrm{div}\, \vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(U) \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(U\, \vec{A}\right) &= U\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(U) \wedge \vec{A} \\
\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right) \vec{v} &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v}\right) \wedge \vec{v}
\end{aligned}$$

B Opérateurs différentiels

Coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U &= \frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z \\
\mathrm{div}\, \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z \\
\Delta\, U &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\
\vec{\Delta}\, \vec{A} &= \Delta\, A_x\, \vec{e}_x + \Delta\, A_y\, \vec{e}_y + \Delta\, A_z\, \vec{e}_z
\end{aligned}$$

Coordonnées cylindriques



$$\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\text{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

$$\Delta\, U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\vec{\Delta}\,\vec{A} = \left[\Delta\, A_r - \frac{1}{r^2}\left(A_r + 2\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right)\right]\vec{e}_r + \left[\Delta\, A_\theta - \frac{1}{r^2}\left(A_\theta - 2\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\right]\vec{e}_\theta + \Delta\, A_z\,\vec{e}_z$$