

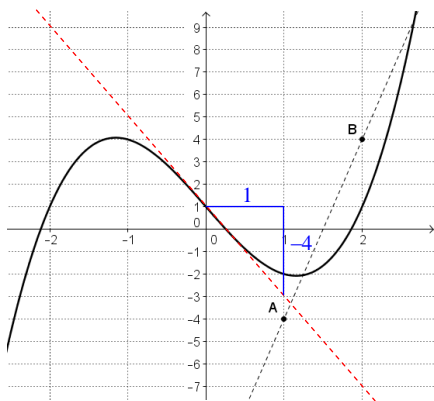
1. a)  $f$  fonction polynôme dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = 3x^2 - 4$ .

b)  $f(0) = 0^3 - 4 \times 0 + 1 = 1$   
donc, la tangente passe par le point  $(0; 1)$ .

$f'(0) = 3 \times 0^2 - 4 = -4$   
donc, la tangente a pour coefficient directeur  $-4$ .

→ Un point et le coefficient directeur, ça suffit!

On peut alors tracer la droite.



c)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{4}{3}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ ou } x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

→ Mauvaise nouvelle... des valeurs non entières... ça peut arriver.

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 4 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1$$

$$= \frac{8 \times 3\sqrt{3}}{27} - \frac{8\sqrt{3}}{3} + 1$$

$$= \frac{9 - 16\sqrt{3}}{9}$$

→ Évidemment, ça donne des calculs peu agréables!

→ Signalons que  $(\sqrt{3})^3$  donne  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ , puis  $3\sqrt{3}$ .

$$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 4 \times \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + 1$$

$$= -\frac{8 \times 3\sqrt{3}}{27} + \frac{8\sqrt{3}}{3} + 1$$

$$= \frac{9 + 16\sqrt{3}}{9}$$

Donc, la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses aux points  $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{9 - 16\sqrt{3}}{9}\right)$  et  $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{9 + 16\sqrt{3}}{9}\right)$ .

d)

$x$	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
Signes de $f'$	+	0	-	0	+
Variations de $f$	↗ $\frac{9 + 16\sqrt{3}}{9}$		↘ $\frac{9 - 16\sqrt{3}}{9}$		↗

Grosses valeurs, mais les calculs sont déjà faits...

e)  $\frac{2\sqrt{3}}{3} = 1,15\dots$  est dans l'intervalle  $[1; 2]$ .

→ Le placement des différentes valeurs les unes par rapport aux autres est essentiel.

$$f(1) = 1^3 - 4 \times 1 + 1 = -2$$

$$f(2) = 2^3 - 4 \times 2 + 1 = 1$$

$x$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
Variations de $f$	-2	↘ $\frac{9 - 16\sqrt{3}}{9}$	↗ 1

La méthode consiste à limiter le tableau de variations à l'intervalle.

On en déduit :  $\frac{9 - 16\sqrt{3}}{9} \leq f(x) \leq 1$ .

$$f) M(x; y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \times 8 - (y+4) \times 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x - 8 - y - 4 = 0$$

Donc,  $(AB) : 8x - y - 12 = 0$ .

$$g) 8x - y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 8x - 4,$$

donc  $(AB)$  a pour coefficient directeur 8.

$$f'(x) = 8 \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$$

→ Ah ! C'est plus sympa...

$$f(2) = 1$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 4 \times (-2) + 1 = 1$$

→ Déjà calculé.

Donc, la courbe admet une tangente parallèle à  $(AB)$  aux points  $(2; 1)$  et  $(-2; 1)$ .

## 2. Partie A

$$a) x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$$

Donc, le domaine de définition de  $g$  est  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ .

$$b) g \text{ de la forme } \frac{u}{v} \text{ avec } \begin{cases} u : x \mapsto -2x \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } u'(x) = -2 \\ v : x \mapsto x^2 - 4 \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } v'(x) = 2x. \end{cases}$$

$v$  s'annule en  $-2$  et  $2$ , donc  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$  et  $g' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ .

$$\text{Donc } g'(x) = \frac{-2(x^2 - 4) - (-2x) \times 2x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 8 + 4x^2}{(x^2 - 4)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 8}{(x^2 - 4)^2}$$

$$c) \begin{cases} x^2 \text{ toujours positif car carré} \Rightarrow 2x^2 + 8 \text{ toujours positif} \\ (x^2 - 4)^2 \text{ toujours positif car carré} \end{cases} \Rightarrow g'(x) \text{ positif sur } \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}.$$

Donc  $g$  croissante sur  $] -; -2[$ , sur  $] -2; 2[$  et sur  $] 2; +\infty[$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
Signes de $g'$	+		+	+
Variations de $g$				

## Partie B

$$a) g(0) = \frac{-2 \times 0}{0^2 - 4} = 0$$

$$g'(0) = \frac{2 \times 0^2 + 8}{(0^2 - 4)^2} = \frac{1}{2}$$

Une équation de  $(d)$  est  $y = g'(0)(x - 0) + g(0)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x.$$

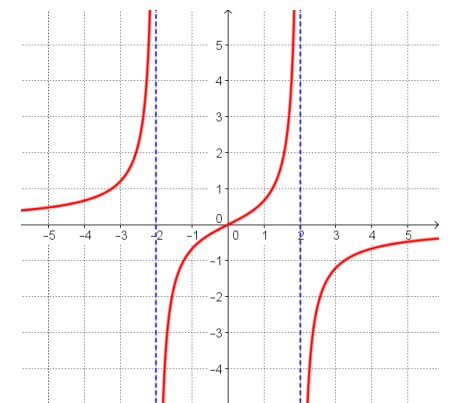
$$b) g(x) - \frac{1}{2}x = \frac{-2x}{x^2 - 4} - \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{-2x \times 2 - x(x^2 - 4)}{2(x^2 - 4)}$$

$$= \frac{-4x - x^3 + 4x}{2(x^2 - 4)}$$

$$= \frac{-x^3}{2(x^2 - 4)}$$

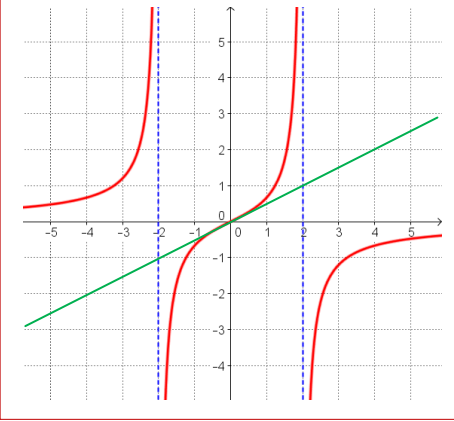
Bien évidemment, on commence par tracer la fonction pour avoir une idée des réponses à venir !



$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$	
Signes de $-x^3$	+	+	0	-	-	
Signes de $x^2 - 4$	+	0	-	-	0	+
Signes de $g(x) - \frac{1}{2}x$	+	+	-	0	+	-

On en déduit que  $(C_g)$  est au-dessus de  $(d)$  sur  $] -\infty; -2[$  et sur  $] 0; 2[$ , et en-dessous de  $(d)$  sur  $] -2; 0[$  et sur  $] 2; +\infty[$ .

Ce qui se confirme en traçant la tangente d'équation  $y = \frac{1}{2}x$ :



### Partie C

- a)  $f$  de la forme  $w + g$  avec  $\begin{cases} w : x \mapsto x + 1 \text{ croissante sur } \mathbb{R} \text{ et donc sur } [0; \sqrt{3}] \\ g \text{ croissante sur } ] -2; 2[ \text{ et donc sur } [0; \sqrt{3}] \end{cases}$ ,  
donc  $f$  croissante sur  $[0; \sqrt{3}]$ .

b)  $\begin{cases} f(0) = 0 + 1 + g(0) = 1 \\ f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + 1 - \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 - 4} = 1 + 3\sqrt{3} \end{cases}$

$$0 \leq x \leq \sqrt{3} \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(\sqrt{3}) \text{ car } f \text{ croissante sur } [0; \sqrt{3}] \\ \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 1 + 3\sqrt{3}.$$

→ Il faut absolument voir que  $f$  est la somme de deux fonctions croissantes, au risque de perdre un temps fou...

→ Inutile de faire un tableau !