Term S. **Correction DS n°2** 15 et 16 nov 2016

Exercice 1 (mardi 15 nov)

1 - $\frac{1}{2}x - \cos x = 0$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Soit f la fct définie sur $f(x) = \frac{1}{2}x - \cos x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Etude des variations de f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

$f'(x) = \frac{1}{2} + \sin x$.

Donc $f'(x) > 0$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

x	0	$\pi/2$
Variation de f	-1 ↗	$\pi/4$

or f est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$,

f est strict. croissante de $[0; \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1; \frac{\pi}{4}]$

et $0 \in [-1; \frac{\pi}{4}]$

Donc $f(x) = 0$ a une seule solution dans $[0; \frac{\pi}{2}]$

Affirmation 1 VRAIE

2 - $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + x$ sur $\mathbb{R}$.

T Tgte en $\frac{\pi}{4}$: $y = f'(\frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) + f(\frac{\pi}{4})$

$f'(x) = \cos(2x) + 1$, $f'(\pi/4) = 1$, $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

Une éq de T est : $y = x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

$y = x + \frac{1}{2}$.

Donc T coupe l'axe des ordonnées en $A(0; \frac{1}{2})$.

Affirmation 2 VRAIE

3 - $(a^2+2)z^2 + (3a+1)z + 2 = 0$ (E)

le discriminant est $\Delta = (3a+1)^2 - 4 \times (a^2+2) \times 2$

$\Delta = 9a^2 + 6a + 1 - 8a^2 - 16$

$\Delta = a^2 + 6a - 15$

L'éq (E) a des sol. complexes si $\Delta < 0$.

Etude du signe de $\Delta = a^2 + 6a - 15$.

Le discriminant est $\Delta' = 6^2 - 4 \times (-15) = 96$.

les racines de Δ sont $a_1 = \frac{-6+\sqrt{96}}{2}$ et $a_2 = \frac{-6-\sqrt{96}}{2}$

Donc :

a	$-\infty$		a_2		a_1		$+\infty$
signe de Δ		+	0	−	0	+	

Donc (E) a des solutions complexes lorsque $a \in]a_2; a_1[$

Affirmation 3 VRAIE

Affirmation 4 : $Z = \dfrac{z+3-i}{z-1-3i}$ pour $z \neq 1+3i$

On pose $z = x+iy$, $Z = \dfrac{(x+3)+i(y-1)}{(x-1)+i(y-3)}$

$$Z = \frac{[(x+3)+i(y-1)][(x-1)-i(y-3)]}{[(x-1)+i(y-3)][(x-1)-i(y-3)]}$$

$$Z = \frac{(x+3)(x-1)+(y-1)(y-3) + i[(y-1)(x-1)-(x+3)(y-3)]}{(x-1)^2+(y-3)^2}$$

Z réel $\iff (y-1)(x-1)-(x+3)(y-3) = 0$

" $\iff xy - y - x + 1 - xy + 3x - 3y + 9 = 0$

" $\iff 2x - 4y + 10 = 0$

" $\iff x - 2y + 5 = 0$

En choisissant x réel, on calcule y et donc il existe une infinité de complexes $z = x+iy$ tel que Z est réel.

Affirmation 4 FAUSSE

Exercice 2 (6)

Partie A

$g(x) = -2x^3 + 9x^2 - 10x + 4$ sur $\mathbb{R}$.

1) $g(x) = x^3\left(-2 + \frac{9}{x} - \frac{10}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2 + \frac{9}{x} - \frac{10}{x^2} + \frac{4}{x^3} = -2 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ 0,5

De même, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$. 0,25

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -6x^2 + 18x - 10$

Le discriminant est $\Delta = 84$

les racines sont $x_1 = \dfrac{-18-\sqrt{84}}{-12}$ et $x_2 = \dfrac{-18+\sqrt{84}}{-12}$

$x_1 = \dfrac{9+\sqrt{21}}{6}$ $\quad x_2 = \dfrac{9-\sqrt{21}}{6}$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de g	$+\infty$	$\searrow$	$g(x_2)$	$\nearrow$	$g(x_1)$	$\searrow$	$-\infty$

avec $g(x_1) \simeq 4{,}3$ et $g(x_2) \simeq 0{,}7$ 1

3 a) g continue sur $\mathbb{R}$,

→ le minimum de $g(x)$ sur $]-\infty; x_1[$ est positif,

donc $g(x) = 0$ n'a pas de sol. dans $]-\infty; x_1[$.

→ g est strict ↘ de $]x_1;+\infty[$ dans $]-\infty; g(x_1)[$.

or $0 \in]-\infty; g(x_1)[$

Donc $g(x)=0$ a une seule solution α dans $]x_1;+\infty[$

Finalement $g(x)=0$ a une seule solution α dans $\mathbb{R}$.

0,75

3) $3{,}09 < \alpha < 3{,}1$ 0,25

4)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de $g(x)$		+	0	−	

0,5

Partie B $f(x) = -x^3+6x^2-10x+8$ sur $\mathbb{R}$.

1 - $\mathcal{A}_{OPMQ} = OP \times PM$

" $= x \times f(x)$

" $= -x^4+6x^3-10x^2+8x$

Soit h cette fonction; $h(x) = -x^4+6x^3-10x^2+8x$ sur $]0;4]$

Variation de h :

Pour $x \in]0;4]$, $h'(x) = -4x^3+18x^2-20x+8$

$h'(x) = 2\,g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de $h'(x)$		+	0	−	

Donc h a bien un maximum lorsque $x=\alpha$

0,75

2) $f'(x) = -3x^2+12x-10$

$$f'(\alpha) + \frac{f(\alpha)}{\alpha} = -3\alpha^2+12\alpha-10 + \frac{-\alpha^3+6\alpha^2-10\alpha+8}{\alpha}$$

$$= \frac{-3\alpha^3+12\alpha^2-10\alpha-\alpha^3+6\alpha^2-10\alpha+8}{\alpha}$$

$$= \frac{-4\alpha^3+18\alpha^2-20\alpha+8}{\alpha}$$

$$= \frac{2g(\alpha)}{\alpha}$$

$= 0$ (car $g(\alpha)=0$)

Donc $f'(\alpha) = -\frac{f(\alpha)}{\alpha}$ 1

3) Coef. dir de la droite (PQ) : $m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$

$$m = \frac{f(\alpha)-0}{0-\alpha}$$

$$m = -\frac{f(\alpha)}{\alpha}$$

or le coef. dir de la tgte au pt d'abs. α est $f'(\alpha)$

On a démontré que $f'(\alpha) = -\frac{f(\alpha)}{\alpha}$

Donc les 2 droites sont bien parallèles.

1

Exercice 1 (mercredi 16 nov). (non spé). (spé)

Partie A $f(x) = \frac{7}{2} + 2\tan x - \frac{4}{\cos x}$ sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$

1. $f(x) = \frac{7}{2} + \frac{2\sin x - 4}{\cos x}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} 2\sin x - 4 = -2 \\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0 \text{ (positif)} \\ \lim\limits_{x \underset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \frac{7}{2} = \frac{7}{2} \end{array}\right\} \lim\limits_{x \underset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$$

0,5

2. Pour $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = \frac{2\cos x \times \cos x - (2\sin x - 4)(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$f'(x) = \frac{2\cos^2 x + 2\sin^2 x - 4\sin x}{\cos^2 x}$

$f'(x) = \frac{2(\cos^2 x + \sin^2 x) - 4\sin x}{\cos^2 x}$

$f'(x) = \frac{2 - 4\sin x}{\cos^2 x} = \frac{2(1 - 2\sin x)}{\cos^2 x}$

0,5

Résolvons $1 - 2\sin x < 0$ dans $[0 ; \frac{\pi}{2}[$.

$\sin x > \frac{1}{2}$. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$

x	0		$\pi/6$		$\pi/2$
signe de $1-2\sin x$		+	0	−	
signe de $\cos^2 x$		+		+	
signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variation de f	$-\frac{1}{2}$	↗	$f(\frac{\pi}{6})$	↘	$-\infty$

0,5

avec $f(\frac{\pi}{6}) \simeq 0{,}04$

3. f est continue sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$

f est strict. ↗ de $[0 ; \frac{\pi}{6}[$ dans $[-\frac{1}{2} ; f(\frac{\pi}{6})[$

et $0 \in [-\frac{1}{2} ; f(\frac{\pi}{6})[$

Donc $f(x) = 0$ a une seule sol. α dans $[0 ; \frac{\pi}{6}[$

De m., $f(x) = 0$ a une seule sol. β dans $]\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}[$.

0,75

avec $\alpha \simeq 0{,}39$ et $\beta \simeq 0{,}64$

0,5

4.

x	0		α		β		$\frac{\pi}{2}$
signe de $f(x)$		−	0	+	0	−	‖

0,5

Partie B

1 a) Dans ABD, rectangle en B,

$\cos\theta = \frac{AB}{AD} = \frac{4}{AD}$ $\tan\theta = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{4}$ 2× 0,25

Donc $AD = \frac{4}{\cos\theta}$ $BD = 4\tan\theta$

Donc $CD = 7 + 4\tan\theta$.

b) $t_1 = \frac{AD}{v_1}$ avec AD en m et $v_1 = 30\,000$ m/h.

$t_1 = \frac{4}{30000\cos\theta}$

0,25

c) $t_2 = \frac{CD}{v_2}$ avec $v_2 = 60\,000$ m/h.

$t_2 = \frac{7 + 4\tan\theta}{60\,000}$

0,25

2) lapin vivant $\Leftrightarrow t_1 < t_2$.

" $\Leftrightarrow \dfrac{4}{30000\cos\theta} < \dfrac{7+4\tan\theta}{60000}$

" $\Leftrightarrow 60000 \times \dfrac{4}{30000\cos\theta} < 7+4\tan\theta$

" $\Leftrightarrow 2 \times \dfrac{4}{\cos\theta} < 7+4\tan\theta$

" $\Leftrightarrow \dfrac{4}{\cos\theta} < \dfrac{7}{2} + 2\tan\theta$

" $\Leftrightarrow \dfrac{7}{2} + 2\tan\theta - \dfrac{4}{\cos\theta} > 0$

" $\Leftrightarrow f(\theta) > 0$. 0,5

3) or $f(\theta) > 0$ pour $\theta \in]\alpha;\beta[$

Donc le lapin est vivant après la traversée

lorsque $\theta \in]\alpha;\beta[$.

0,25

Exercice 2 5

$U_0 = -3$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n - 8}{2U_n - 9}$

1 → $U_0 = -3$ donc $U_0 < 1$

→ Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $U_p < 1$

et mq $U_{p+1} < 1$.

$U_{p+1} - 1 = \dfrac{U_p - 8}{2U_p - 9} - 1$

$= \dfrac{U_p - 8 - 2U_p + 9}{2U_p - 9}$

$= \dfrac{-U_p + 1}{2U_p - 9}$

or $U_p < 1$, donc $-U_p + 1 > 0$

et $2U_p - 9 < 0$

Donc $U_{p+1} - 1 < 0$ et $U_{p+1} < 1$.

Par récurrence, $U_n < 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. 1

2- $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n - 8}{2U_n - 9} - U_n$

$= \dfrac{U_n - 8 - 2U_n^2 + 9U_n}{2U_n - 9}$

$= \dfrac{-2U_n^2 + 10U_n - 8}{2U_n - 9}$

Etude du signe de $P(x) = -2x^2 + 10x - 8$ pour $x<1$.

Le discriminant est $\Delta = 36$.

les racines sont 1 et 4.

Donc $P(x) < 0$ sur $]-\infty, 1[$.

On en conclut que $-2u_n^2 + 10u_n - 8 < 0$

et $2u_n - 9 < 0$ (car $u_n < 1$)

Finalement, $u_{n+1} - u_n > 0$

et (u_n) est croissante. 1

3 - (u_n) est majorée par 1 et (u_n) est croissante.

Or toute suite croissante et majorée converge

Donc (u_n) converge vers l ($l < 1$). 0,5

4 - $v_n = 1 - u_n$.

a) $v_{n+1} - \frac{1}{7} v_n = 1 - u_{n+1} - \frac{1}{7}(1 - u_n)$.

$= 1 - \frac{u_n - 8}{2u_n - 9} - \frac{1}{7}(1 - u_n)$.

$= \frac{7(2u_n - 9 - u_n + 8)}{7(2u_n - 9)} - \frac{(1-u_n)(2u_n - 9)}{7(2u_n - 9)}$

$= \frac{7u_n - 7 - (2u_n - 9 - 2u_n^2 + 9u_n)}{7(2u_n - 9)}$

$v_{n+1} - \frac{1}{7} v_n = \frac{7u_n - \cancel{7} - 2u_n + 9 + 2u_n^2 - 9u_n}{7(2u_n - 9)}$

$= \frac{2u_n^2 - 4u_n + 2}{7(2u_n - 9)}$

$= \frac{2(u_n - 1)^2}{7(2u_n - 9)}$ 0,75

b) or $u_n < 1$, donc $2u_n - 9 < 0$

et $(u_n - 1)^2 > 0$

Donc $v_{n+1} - \frac{1}{7} v_n \leq 0$

d'où $v_{n+1} \leq \frac{1}{7} v_n$. 0,25

c) → $v_0 = 1 - u_0 = 4$ et $\left(\frac{1}{7}\right)^0 v_0 = v_0 = 4$

Donc $0 \leq v_0 \leq \left(\frac{1}{7}\right)^0 v_0$.

→ Supp. qu'il existe $p \geq 0$ tel que $0 \leq v_p \leq \left(\frac{1}{7}\right)^p v_0$

et mq $0 \leq v_{p+1} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{p+1} v_0$.

$v_p \leq \left(\frac{1}{7}\right)^p v_0$

donc $\frac{1}{7} v_p \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{p+1} v_0$

et $v_{p+1} \leq \frac{1}{7} v_p \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{p+1} v_0$.

De plus $u_n < 1$ pour tout n, donc $v_n = 1 - u_n \geq 0$

Finalement $0 \leq v_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n v_0$ pour $n \geq 0$. 1

0,5

d) $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ (Gendarmes) et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$