COLLE n° 1 : semaine du 14 septembre

1 Suites numériques

Révisions de première année.

2 Séries numériques

Il s'agit là aussi pour l'essentiel de révisions de première année.

1. Définition et premières propriétés des séries.
   Séries géométriques.
2. Séries à termes positifs.
   Théorème de comparaison ; séries de Riemann ; critère de d'Alembert
   Sommation des relations de comparaison ; comparaison série/intégrale
3. Séries absolument convergentes
   Produit de Cauchy
4. Cas particulier des séries alternées

Questions de cours

1. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n \sim v_n$. Montrer que ces deux séries ont même nature.
2. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Énoncé et démonstration du critère de d'Alembert.
3. Démontrer le théorème du point fixe : si $f : I \to I$ est k-contractante, où I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, alors f admet un unique point fixe, et toute suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe.
4. Soit $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ une série de Riemann avec $\alpha > 1$. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ le reste d'ordre n. Montrer que
$$R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$
5. Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, montrer que $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$, où $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ (on établira préalablement la convergence absolue de la série exponentielle).
6. Énoncé et démonstration du critère spécial des séries alternées (y compris la majoration du reste).