QUELQUES CHAMPS D'APPLICATIONS DES VALEURS ET VECTEURS PROPRES ASSOCIÉS

Mémoire pour l'obtention du diplôme de :
Master d' **A**ptitude **P**édagogique de l' **E**cole **N**ormale (MAPEN)

présenté par:

Stephan Hervé RAMIANDRISOA

27 Janvier 2016

Remerciements

- Dr. RABEARISOA Andry Harinaina
- Dr. RAHERINIRINA Angelo
- Dr. RATSIMBAZAFY
- Dr. ANDRIANANDRASANIRINA Faly Tinasoa

Remerciements

- Dr. RABEARISOA Andry Harinaina
- Dr. RAHERINIRINA Angelo
- Dr. RATSIMBAZAFY
- Dr. ANDRIANANDRASANIRINA Faly Tinasoa

Remerciements

- Dr. RABEARISOA Andry Harinaina
- Dr. RAHERINIRINA Angelo
- Dr. RATSIMBAZAFY
- Dr. ANDRIANANDRASANIRINA Faly Tinasoa

Remerciements

- Dr. RABEARISOA Andry Harinaina
- Dr. RAHERINIRINA Angelo
- Dr. RATSIMBAZAFY
- Dr. ANDRIANANDRASANIRINA Faly Tinasoa

Remerciements

- Dr. RABEARISOA Andry Harinaina
- Dr. RAHERINIRINA Angelo
- Dr. RATSIMBAZAFY
- Dr. ANDRIANANDRASANIRINA Faly Tinasoa

Introduction

Plan de l'exposé

Espace vectoriel des matrices

Définition simplifiée

Une matrice : tableau sans contour à n ligne et p colonne arrangée dans un environnement parenthèse ou crochet òu $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Définition simplifiée

Une matrice : tableau sans contour à n ligne et p colonne arrangée dans un environnement parenthèse ou crochet òu $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p-1} & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Espace vectoriel $Mn, p(\mathbb{K})$

- M(n,p)(K) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- les lois considérées

Somme de deux matrices :$A = (a_{ij}), B = (b_{i,j}) \in$ M(n,p)(K)

$$A + B = C, C = a_{ij} + b_{i,j}; \forall i, j \in \mathbb{N}$$

Multiplication par un scalaire :Soit A=$(a_{i,j})$

$$\lambda(a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j}); \forall i, j \in \mathbb{N}$$

Espace vectoriel $Mn,p(\mathbb{K})$

- M(n,p)(K) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- les lois considérées

Somme de deux matrices :$A=(a_{ij}), B=(b_{i,j}) \in$ M(n,p)(K)

$$A+B=C, C=a_{ij}+b_{i,j}; \forall i,j \in \mathbb{N}$$

Multiplication par un scalaire :Soit A=$(a_{i,j})$

$$\lambda(a_{i,j})=(\lambda a_{i,j}); \forall i,j \in \mathbb{N}$$

Espace vectoriel $Mn, p(\mathbb{K})$

- M(n,p)(K) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- les lois considérées

Somme de deux matrices : $A = (a_{ij}), B = (b_{i,j}) \in$ M(n,p)(K)

$$A + B = C, C = a_{ij} + b_{i,j}; \forall i, j \in \mathbb{N}$$

Multiplication par un scalaire : Soit A=$(a_{i,j})$

$$\lambda(a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j}); \forall i, j \in \mathbb{N}$$

Espace vectoriel $Mn, p(\mathbb{K})$

- M(n,p)(K) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- les lois considérées

Somme de deux matrices : $A = (a_{ij}), B = (b_{i,j}) \in$ M(n,p)(K)

$$A + B = C, C = a_{ij} + b_{i,j}; \forall i, j \in \mathbb{N}$$

Multiplication par un scalaire : Soit A=$(a_{i,j})$

$$\lambda(a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j}); \forall i, j \in \mathbb{N}$$

Matrice et systèmes linéaires

Matrice et systèmes linéaires

Forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \quad \vdots & = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases},$$

Opérations dans l’ espace vectoriel des matrices

Selon la structure d’ espace vectoriel

Opérations dans l' espace vectoriel des matrices

Selon la structure d' espace vectoriel

Produit de deux matrices,transposition,inverse.

Valeur propre d 'une matrice

Définition

- Soit A $\in M(n)(\mathbb{K}), \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Définition1

$$Ax = \lambda x. \tag{1}$$

λ :valeur propre de A et x : le vecteur propre associé.

- Zéros du polynômes caractéristiques

Définition 2

$$det(A - XI_n) = 0 \tag{2}$$

Définition

- Soit A $\in M(n)(\mathbb{K}), \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Définition1

$$Ax = \lambda x. \tag{1}$$

λ :valeur propre de A et x : le vecteur propre associé.

- Zéros du polynômes caractéristiques

Définition 2

$$det(A - XI_n) = 0 \tag{2}$$

Définition

- Soit A $\in M(n)(\mathbb{K}), \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Définition1

$$Ax = \lambda x. \tag{1}$$

λ :valeur propre de A et x : le vecteur propre associé.

- Zéros du polynômes caractéristiques

Définition 2

$$det(A - XI_n) = 0 \tag{2}$$

Définition

- Soit A $\in M(n)(\mathbb{K}), \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Définition1

$$Ax = \lambda x. \tag{1}$$

λ :valeur propre de A et x : le vecteur propre associé.

- Zéros du polynômes caractéristiques

Définition 2

$$det(A - XI_n) = 0 \tag{2}$$

Mise en évidence d' erreur

De l' algorithme de recherche des zéros du polynôme caractéristique

Mise en évidence d' erreur

De l' algorithme de recherche des zéros du polynôme caractéristique

- Soit $A = diag(1, 2, ...n)$

Mise en évidence d' erreur

De l' algorithme de recherche des zéros du polynôme caractéristique

- Soit $A = diag(1, 2, ...n)$
- Alors
$$P(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)...(n - \lambda)$$

Mise en évidence d' erreur

De l' algorithme de recherche des zéros du polynôme caractéristique

- Soit $A = diag(1, 2, ...n)$
- Alors
$$P(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)...(n-\lambda)$$
- supposons que les racines sont de la forme $\hat{a} = a_i(1+\epsilon)$

Mise en évidence d' erreur

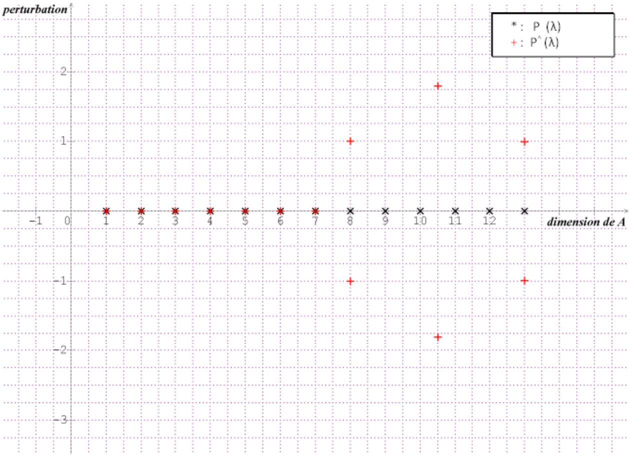
De l' algorithme de recherche des zéros du polynôme caractéristique

- Soit $A = diag(1, 2, ...n)$
- Alors

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)...(n - \lambda)$$

- supposons que les racines sont de la forme $\hat{a} = a_i(1 + \epsilon)$
- On cherche à étudier le comportement de $P(\lambda)$ et $\hat{P(\lambda)}$ suivant la dimension de A.

Perturbation des valeurs propres



Que peut on tirer ?

Les sept premières racines sont prèsques confondues, présentent une erreur de 10^{-4},mais pour les racines suivantes, l' erreur est de l' ordre de 1. On peut conclure qu' il faut éviter le calcul des coefficients du polynômes caractéristiques car c'est un algorithme numériquement instable. D' òu la nécessité des calculs numériques.

Plan de l'exposé

Calcul numérique des valeurs propres

Méthode de la puissance

Puissance itérée

- habilité :

Méthode de la puissance
Puissance itérée

- habilité :Permet de déterminer la plus grande valeur propre, en valeur absolue, A et le vecteur propre associé.

Méthode de la puissance

Puissance itérée

- habilité :Permet de déterminer la plus grande valeur propre, en valeur absolue, A et le vecteur propre associé.
- $$\lambda_n \leq .... \leq \lambda_{p+1} \leq \lambda_p = ... = \lambda_1 \tag{3}$$

Méthode de la puissance
Puissance itérée

- habilité :Permet de déterminer la plus grande valeur propre, en valeur absolue, A et le vecteur propre associé.
- $$\lambda_n \leq ...... \leq \lambda_{p+1} \leq \lambda_p = ... = \lambda_1 \tag{3}$$
- Calculons la suite récurrente

$$X = \begin{cases} x^{(0)} = x_0 & \in \mathbb{K} \\ x^{(k+1)} = Ax_k & , k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Méthode de la puissance

Puissance itérée

- habilité :Permet de déterminer la plus grande valeur propre, en valeur absolue, A et le vecteur propre associé.
-
$$\lambda_n \leq .... \leq \lambda_{p+1} \leq \lambda_p = ... = \lambda_1 \tag{3}$$
- Calculons la suite récurrente

$$X = \begin{cases} x^{(0)} = x_0 & \in \mathbb{K} \\ x^{(k+1)} = Ax_k & , k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Renormalisation

$$\| x^{(k+1)} \|_\infty = 1$$

.

- L'algorithme de la Puissance itérée

Entrées : A,tol ;
Sortie : lambda,x ;

```
x=rand(n,1) ;
x=x/norm(x) ;
y=A.x ;
lambda=x'.y ;
r=y-lambda.x
tant que norm(x)≥ tol
x=y/norm(y) ;
y=A.x ;
lambda=x'.y ;
r=y-lambda.x ;
fin tant que
```

Puissance inverse

- L'algorithme de la Puissance inverse

Entré : A, μ, tol
Sortie : lambda, x
$B = A\mu.eye(n)$

```
x=rand(n,1);
x=x/norm(x);
y=B/x;alpha=norm(y);
```

tant que `1/alpha` $\geq$ `tol`

```
x=y/alpha;
y=B / x;
alpha=norm(y);
```

fin tant que

Méthode QR

- habilité : permet de déterminer simultanément toutes les valeurs propres (mais pas les vecteurs, encore une fois).

Méthode QR

- habilité : permet de déterminer simultanément toutes les valeurs propres (mais pas les vecteurs, encore une fois).
- L'algorithme est

Poser : $A^{(0)} = A$ et $k = 0$
tant que $max_{i \neq j}, |a_{i,j}^{(k)}| \geq \epsilon$
$A^{(k)} = Q^{(k)} R^{(k)}$
$A^{(k+1)} = R^{(k)} Q^{(k)}$,
itérer $\leftarrow k + 1$
Fin tant que

Autres méthodes

- La méthode de Jacobi

Jacobi

La méthode de Jacobi permet par exemple de transformer de manière itérative une matrice symétrique en une matrice diagonale.

- Méthode de Given et Householder

Given et Householder

La méthodes de Given et de Householder réduisent pour leur part de manière directe une matrice symétrique en une matrice tridiagonale, dont on pourra ensuite résoudre l'équation caractéristique par des techniques itératives.

- Dans ce qui va suivre la recherche des valeurs propres ainsi que le vecteur propre, est grące à ces algorithmes données ci-dessus.

Autres méthodes

- La méthode de Jacobi

Jacobi

La méthode de Jacobi permet par exemple de transformer de manière itérative une matrice symétrique en une matrice diagonale.

- Méthode de Given et Householder

Given et Householder

La méthodes de Given et de Householder réduisent pour leur part de manière directe une matrice symétrique en une matrice tridiagonale, dont on pourra ensuite résoudre l'équation caractéristique par des techniques itératives.

- Dans ce qui va suivre la recherche des valeurs propres ainsi que le vecteur propre, est graçe à ces algorithmes données ci-dessus.

Autres méthodes

- La méthode de Jacobi

Jacobi

La méthode de Jacobi permet par exemple de transformer de manière itérative une matrice symétrique en une matrice diagonale.

- Méthode de Given et Householder

Given et Householder

La méthodes de Given et de Householder réduisent pour leur part de manière directe une matrice symétrique en une matrice tridiagonale, dont on pourra ensuite résoudre l'équation caractéristique par des techniques itératives.

- Dans ce qui va suivre la recherche des valeurs propres ainsi que le vecteur propre, est graçe à ces algorithmes données ci-dessus.

Plan de l'exposé

Champs d ' application des valeurs propres

Application sur l' arrangement des pages webs : le « pagerank. »

Arrangement des pages Webs

Le moteur de recherche procède en

- affichant les pages contenant les mots clés
- triant en ordre de pertinence
- affichant des résultats

le principe se repose sur

La matrice de web

$$C = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j \rightarrow i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les coefficients $C_{i,j}$ est 1 si la page j pointe vers i sinon 0

Arrangement des pages Webs

Le moteur de recherche procède en

- affichant les pages contenant les mots clés
- triant en ordre de pertinence
- affichant des résultats

le principe se repose sur

La matrice de web

$$C = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j \to i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les coefficients $C_{i,j}$ est 1 si la page j pointe vers i sinon 0

Arrangement des pages Webs

Le moteur de recherche procède en

- affichant les pages contenant les mots clés
- triant en ordre de pertinence
- affichant des résultats

le principe se repose sur

La matrice de web

$$C = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j \to i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les coefficients $C_{i,j}$ est 1 si la page j pointe vers i sinon 0

Arrangement des pages Webs

Le moteur de recherche procède en

- affichant les pages contenant les mots clés
- triant en ordre de pertinence
- affichant des résultats

le principe se repose sur

La matrice de web

$$C = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j \rightarrow i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les coefficients $C_{i,j}$ est 1 si la page j pointe vers i sinon 0

Arrangement des pages Webs

Le moteur de recherche procède en

- affichant les pages contenant les mots clés
- triant en ordre de pertinence
- affichant des résultats

le principe se repose sur

La matrice de web

$$C = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j \rightarrow i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les coefficients $C_{i,j}$ est 1 si la page j pointe vers i sinon 0

Résolution du problème

Résolution du problème

Pondération de vote

$$\mu(i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_{i,j}}{N_j} \mu(j) \tag{4}$$

- En posant

$$Q = \frac{C_{i,j}}{N_j}; \mu(i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_{i,j}}{N_j} \mu(j) \tag{5}$$

- En posant

$$Q = \frac{C_{i,j}}{N_j}; \mu(i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_{i,j}}{N_j} \mu(j) \tag{5}$$

- C'est une résolution d' équation linéaire de la forme

- En posant

$$Q = \frac{C_{i,j}}{N_j} ; \mu(i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_{i,j}}{N_j} \mu(j) \tag{5}$$

- C'est une résolution d' équation linéaire de la forme

$$\mu = Q\mu,$$

- En posant

$$Q = \frac{C_{i,j}}{N_j}; \mu(i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_{i,j}}{N_j} \mu(j) \tag{5}$$

- C'est une résolution d' équation linéaire de la forme

$$\mu = Q\mu,$$

- Puisque cette matrice 5 contient des lignes entières pleines de zéros. On crée un lien artificiel pondére par $1/n$ qui tend vers zéros, pour former la matrice P.

Matrice P

$$P = \frac{1}{N_j} c_{i,j} + \frac{1}{N} d_j \tag{6}$$

Matrice P

$$P = \frac{1}{N_j} c_{i,j} + \frac{1}{N} d_j \tag{6}$$

Coefficient $c_{i,j}$ etd_j

$$d_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad N_j = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Matrice P

$$P = \frac{1}{N_j} c_{i,j} + \frac{1}{N} d_j \qquad (6)$$

Coefficient $c_{i,j}$ etd_j

$$d_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad N_j = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Matrice P

$$P = \frac{1}{N_j} c_{i,j} + \frac{1}{N} d_j \tag{6}$$

Coefficient $c_{i,j}$ etd_j

$$d_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad N_j = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour s'assurer que cette valeur propre est simple, On pose

La matrice A à chercher

$$A = \alpha P + (1-\alpha)\frac{1}{N}e.^{T}e$$

Pour s'assurer que cette valeur propre est simple, On pose

La matrice A à chercher

$$A = \alpha P + (1-\alpha)\frac{1}{N}e.^{T}e$$

Pour google $\alpha = 0.85$ est optimale. Cherchons alors le vecteur x de $\mathbb{R}^n$ tel que $Ax = x$ c' est a dire recherche du vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$.

Simulation à petite échelle

Modélisation en graphe des liens

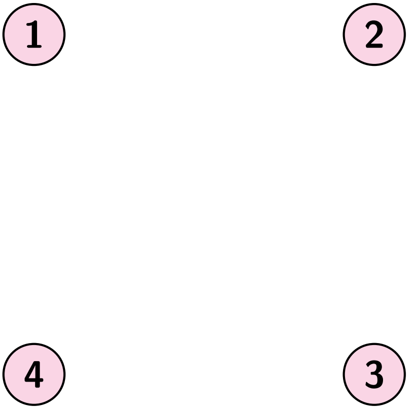


FIGURE: Représentations en graphe des liens entre les quatres pages webs

Simulation à petite échelle

Modélisation en graphe des liens

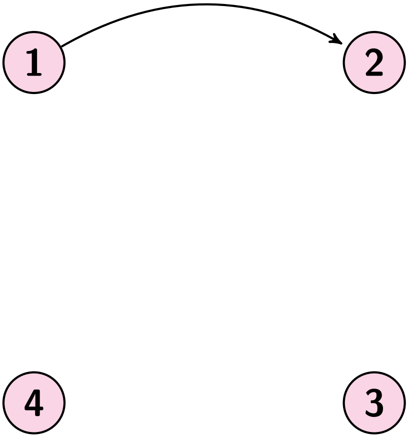


FIGURE: Représentations en graphe des liens entre les quatres pages webs

Simulation à petite échelle

Modélisation en graphe des liens

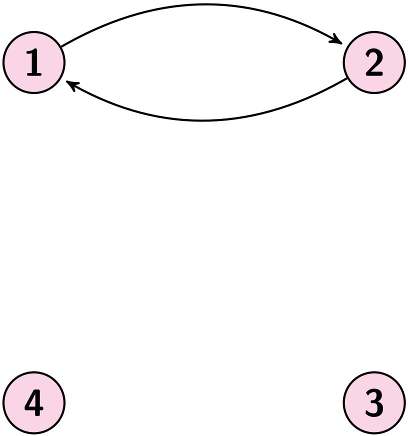


FIGURE: Représentations en graphe des liens entre les quatres pages webs

Simulation à petite échelle

Modélisation en graphe des liens

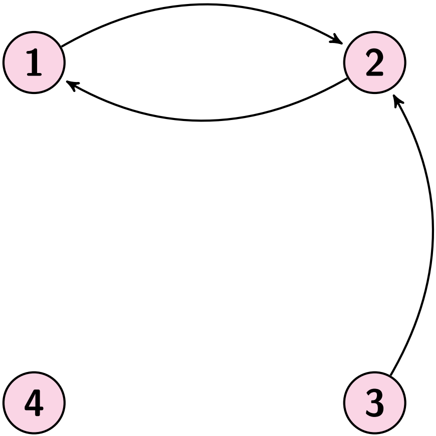


FIGURE: Représentations en graphe des liens entre les quatres pages webs

Simulation à petite échelle

Modélisation en graphe des liens

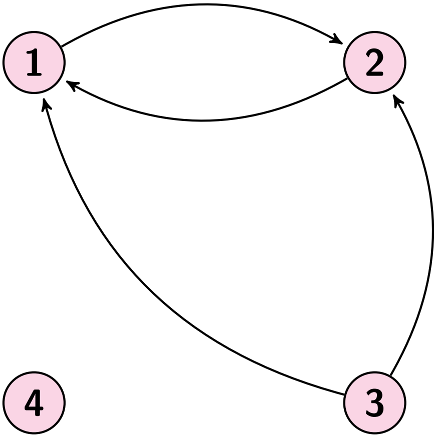


FIGURE: Représentations en graphe des liens entre les quatres pages webs

La matrice C du web

- $$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

La matrice C du web

- $$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$
- respectant

La matrice de web

$$C = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j \to i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice C du web

- $$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$
- respectant

La matrice de web

$$C = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j \rightarrow i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice C du web

- $$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$
- respectant

La matrice de web

$$C = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j \to i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice Q

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

- La matrice P, respectant

- La matrice P, respectant

Matrice P

$$P = Q + \frac{1}{N} d_j, d_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad N_j = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{9}$$

- La matrice P, respectant

Matrice P

$$P = Q + \frac{1}{N} d_j, d_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad N_j = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{9}$$

- est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \tag{10}$$

- Enfin,

$$A = \begin{pmatrix} 0.0375 & 0.8875 & 0.3208 & 0.4625 \\ 0.8875 & 0.0375 & 0.3208 & 0.0375 \\ 0.0375 & 0.0375 & 0.0375 & 0.4625 \\ 0.0375 & 0.0375 & 0.3208 & 0.0375 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

- Enfin,

$$A = \begin{pmatrix} 0.0375 & 0.8875 & 0.3208 & 0.4625 \\ 0.8875 & 0.0375 & 0.3208 & 0.0375 \\ 0.0375 & 0.0375 & 0.0375 & 0.4625 \\ 0.0375 & 0.0375 & 0.3208 & 0.0375 \end{pmatrix} \tag{11}$$

- avec

$$A = \alpha P + (1-\alpha)\frac{1}{N}e.^{T}e$$

- Enfin,

$$A = \begin{pmatrix} 0.0375 & 0.8875 & 0.3208 & 0.4625 \\ 0.8875 & 0.0375 & 0.3208 & 0.0375 \\ 0.0375 & 0.0375 & 0.0375 & 0.4625 \\ 0.0375 & 0.0375 & 0.3208 & 0.0375 \end{pmatrix} \tag{11}$$

- avec

$$A = \alpha P + (1-\alpha)\frac{1}{N} e.^T e$$

- Résolvons $\mu = A\mu$

- Enfin,

$$A = \begin{pmatrix} 0.0375 & 0.8875 & 0.3208 & 0.4625 \\ 0.8875 & 0.0375 & 0.3208 & 0.0375 \\ 0.0375 & 0.0375 & 0.0375 & 0.4625 \\ 0.0375 & 0.0375 & 0.3208 & 0.0375 \end{pmatrix} \tag{11}$$

- avec

$$A = \alpha P + (1-\alpha)\frac{1}{N}e.^{T}e$$

- Résolvons $\mu = A\mu$
- On trouve en utilisant matlab

$$x = \begin{pmatrix} 0.6772 \\ 0.7284 \\ 0.0740 \\ 0.0740 \end{pmatrix}$$

Résultat

Alors, la première page affiché lors d 'une requête est la page

Résultat

Alors, la première page affiché lors d 'une requête est la page 2

Résultat

Alors, la première page affiché lors d ’une requête est la page 2 suivi de la page 1

Résultat

Alors, la première page affiché lors d 'une requête est la page 2 suivi de la page 1 et les deux dernières.

Simulation à petite échelle

Modélisation en graphe des liens

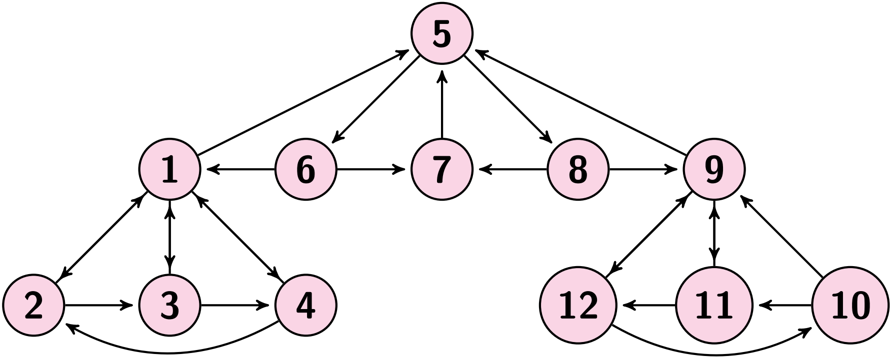


FIGURE: Représentations en graphe des liens entre les douze pages webs

Simulation pour les douze pages

La matrice C du web

- La matrice C est :

Simulation pour les douze pages

La matrice C du web

- La matrice C est :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

La matrice Q

- D' ou La matrice stochastique Q

La matrice Q

- D' ou La matrice stochastique Q

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0. & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

la matrice A

- $Q = P$

la matrice A

- $Q = P$
- $A = \begin{pmatrix} a & c & c & c & a & c & a & a & a & a & a & a \\ b & a & a & c & a & a & a & a & a & a & a & a \\ b & c & a & a & a & a & a & a & a & a & a & a \\ b & a & c & a & a & a & a & a & a & a & a & a \\ b & a & a & a & a & a & d & a & b & a & a & a \\ a & a & a & a & c & a & a & a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a & c & a & c & a & a & a & a \\ a & a & a & a & c & a & a & a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a & a & a & c & a & c & c & c \\ a & a & a & a & a & a & a & a & b & a & a & c \\ a & a & a & a & a & a & a & a & b & c & a & a \\ a & a & a & a & a & a & a & a & b & a & c & a \end{pmatrix}$

la matrice A

- $Q = P$
- $A = \begin{pmatrix} a & c & c & c & a & c & a & a & a & a & a & a \\ b & a & a & c & a & a & a & a & a & a & a & a \\ b & c & a & a & a & a & a & a & a & a & a & a \\ b & a & c & a & a & a & a & a & a & a & a & a \\ b & a & a & a & a & a & d & a & b & a & a & a \\ a & a & a & a & c & a & a & a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a & c & a & c & a & a & a & a \\ a & a & a & a & c & a & a & a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a & a & a & c & a & c & c & c \\ a & a & a & a & a & a & a & a & b & a & a & c \\ a & a & a & a & a & a & a & a & b & c & a & a \\ a & a & a & a & a & a & a & a & b & a & c & a \end{pmatrix}$
- òu les valeurs a,b,c et d sont respectivement 0.0125, 0.225, 0.4375 et 0.8625

Conclusion

Résultat

Parmi les 12 pages considérées, Les pages considérées importantes est la page numéro 1,($\mu_1 = 0.4586$)suivi du numéro 5 ($\mu_5 = 0.4312$), après 9 ($\mu_9 = 0.3788$).

Conclusion

Résultat

Parmi les 12 pages considérées, Les pages considérées importantes est la page numéro 1,($\mu_1 = 0.4586$)suivi du numéro 5 ($\mu_5 = 0.4312$), après 9 ($\mu_9 = 0.3788$).

Interprétation

Ainsi, Le problème du classement des pages du Web se trouve ainsi ramené à la recherche d'un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Importance de la valeur propre dans la chaine de Markov

Qu'est ce qu'on entend par Chaine de Markov ?

- Une chaine de Markov est un processus aléatoire.

Qu'est ce qu'on entend par Chaine de Markov ?

- Une chaine de Markov est un processus aléatoire.

Propriété de Markov

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} / X_{0:n} = i_{0:n}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i)$$

Le futur ne dépend que du présent

Qu'est ce qu'on entend par Chaine de Markov ?

- Une chaine de Markov est un processus aléatoire.

Propriété de Markov

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}/X_{0:n} = i_{0:n}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j/X_n = i)$$

Le futur ne dépend que du présent

- Elle est dite **homogène** en temps si :

Qu'est ce qu'on entend par Chaine de Markov ?

- Une chaine de Markov est un processus aléatoire.

Propriété de Markov

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}/X_{0:n} = i_{0:n}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j/X_n = i)$$

Le futur ne dépend que du présent

- Elle est dite **homogène** en temps si :

Homogénéité

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j/X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j/X_0 = i)$$

La probabilité d'aller i et j ne varie pas au cour du temps

Matrice de transition

- Une matrice de transition $Q = (Q_{ij})_{i,j \in E}$

$$Q_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i)$$

Matrice de transition

- Une matrice de transition $Q = (Q_{ij})_{i,j \in E}$

$$Q_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i)$$

  - $Q_{ij} \geq 0$
  - $\sum_{j \in E} Q_{ij} = 1$

Matrice de transition

- Une matrice de transition $Q = (Q_{ij})_{i,j \in E}$

$$Q_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i)$$

Matrice de transition

- Une matrice de transition $Q = (Q_{ij})_{i,j \in E}$

$$Q_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i)$$

La matrice de transition peut être représentée par un graphe appelé Graphe de transition

Loi stationnaire

- La probabilité π est une loi stationnaire ou invariante pour la chaîne de Markov lorsque

$$\pi = \pi P \tag{14}$$

Loi stationnaire

- La probabilité π est une loi stationnaire ou invariante pour la chaîne de Markov lorsque

$$\pi = \pi P \tag{14}$$

- Si on a $Av = \lambda v$, par définition, v est le vecteur propre associé à λ. Ainsi ,nous somme à la recherche d' un vecteur propre associé à $\lambda = 1$

Loi stationnaire

- La probabilité π est une loi stationnaire ou invariante pour la chaîne de Markov lorsque

$$\pi = \pi P \tag{14}$$

- Si on a $Av = \lambda v$, par définition, v est le vecteur propre associé à λ. Ainsi ,nous somme à la recherche d' un vecteur propre associé à $\lambda = 1$
- Nous sommes conduit alors à la recherche du vecteur propre à gauche, associé à la valeur propre 1.

illustration

- Considérons

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 7/20 & 1/2 & 3/20 \\ 0 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} \tag{15}$$

illustration

- Considérons

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 7/20 & 1/2 & 3/20 \\ 0 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} \tag{15}$$

- En utilisant l' inférence du chaine de Markov en exécutant *simulation.m* On trouve

illustration

- Considérons

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 7/20 & 1/2 & 3/20 \\ 0 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} \tag{15}$$

- En utilisant l' inférence du chaine de Markov en exécutant *simulation.m* On trouve

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.1950 & 0.5573 & 0.2477 \end{pmatrix} \tag{16}$$

illustration

- Considérons
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 7/20 & 1/2 & 3/20 \\ 0 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} \tag{15}$$

- En utilisant l' inférence du chaine de Markov en exécutant *simulation.m* On trouve
$$\pi = \begin{pmatrix} 0.1950 & 0.5573 & 0.2477 \end{pmatrix} \tag{16}$$

- En utilisant le calcul matriciel, on procède d' abord à chercher le vecteur propre à gauche associé à $lambda = 1$, puis on normalise cette dernière.

illustration

- Considérons

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 7/20 & 1/2 & 3/20 \\ 0 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} \tag{15}$$

- En utilisant l' inférence du chaine de Markov en exécutant *simulation.m* On trouve

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.1950 & 0.5573 & 0.2477 \end{pmatrix} \tag{16}$$

- En utilisant le calcul matriciel, on procède d' abord à chercher le vecteur propre à gauche associé à $lambda = 1$, puis on normalise cette dernière.
- par la fonction *eigpower.m* on trouve

Calcul matriciel

- le vecteur propre associé est :

$$D = \begin{pmatrix} 0.3046 & 0.8704 & 0.3868 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Calcul matriciel

- le vecteur propre associé est :

$$D = \begin{pmatrix} 0.3046 & 0.8704 & 0.3868 \end{pmatrix} \tag{17}$$

- en normalisant en utilisant *normalisation.m*, on trouve

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.1950 & 0.5573 & 0.2477 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Calcul matriciel

- le vecteur propre associé est :

$$D = \begin{pmatrix} 0.3046 & 0.8704 & 0.3868 \end{pmatrix} \tag{17}$$

- en normalisant en utilisant *normalisation.m*, on trouve

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.1950 & 0.5573 & 0.2477 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Interprétation

Ainsi,les égalités 18 et 16 nous permettra d ' affirmer que la loi stationnaire lorqu' elle existe , est le vecteur propre à gauche normalisé associé à la valeur propre 1.

La loi invariante

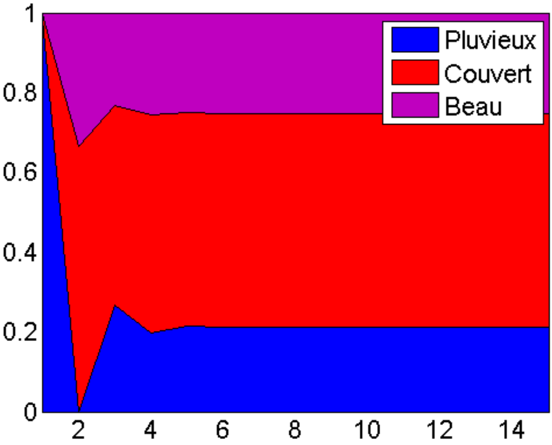


FIGURE: La loi invariante

Application dans le dynamisme de population : « le Modèle de Leslie. »

Le modèle de Leslie

les hypothèses du modèles

- qui tient compte de hétérogénéité, le modèle linéaire ou modèle structuré en ages.

Le modèle de Leslie

les hypothèses du modèles

- qui tient compte de hétérogénéité, le modèle linéaire ou modèle structuré en ages.
- $$x^{(k+1)} = L.x^{(k)}$$

Le modèle de Leslie

les hypothèses du modèles

- qui tient compte de hétérogénéité, le modèle linéaire ou modèle structuré en ages.
- $$x^{(k+1)} = L.x^{(k)}$$
- première ligne de L : contient les coeficients de fertilité de chaque classe d' âge

Le modèle de Leslie

les hypothèses du modèles

- qui tient compte de hétérogénéité, le modèle linéaire ou modèle structuré en ages.
- $$x^{(k+1)} = L.x^{(k)}$$
- première ligne de L : contient les coeficients de fertilité de chaque classe d' âge
- Sous diagonale : les probabilités de survie d'une classe d' âge à la suivante.

Application dans le dynamique de la population

- $$L v_i = \lambda_i v_i, 1 \leq i \leq n$$

- $$Lv_i = \lambda_i v_i, 1 \leq i \leq n$$

- $$\begin{aligned} Lv_i &= LV \\ &= L(v_1, v_2, \dots v_n) \\ &= (Lv_1, Lv_2, \dots, Lv_n) \\ &= (v_1, v_2, \dots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Application dans le dynamique de la population

- $$Lv_i = \lambda_i v_i, 1 \leq i \leq n$$

- $$\begin{aligned} Lv_i &= LV \\ &= L(v_1, v_2, \dots v_n) \\ &= (Lv_1, Lv_2, \dots, Lv_n) \\ &= (v_1, v_2, \dots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $A = VPV^{-1}$;

- $$L v_i = \lambda_i v_i, 1 \leq i \leq n$$

- $$\begin{aligned} L v_i &= LV \\ &= L(v_1, v_2, \ldots v_n) \\ &= (L v_1, L v_2, \ldots, L v_n) \\ &= (v_1, v_2, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $A = VPV^{-1}$; $P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$

- $$
\begin{aligned}
L^k &= (VPV^{-1})^k \\
&= (VPV^{-1})(VPV^{-1})\dots(VPV^{-1}) \\
&= (VP^kV^{-1}) \\
&= V \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & {\lambda_1}^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & {\lambda_n}^k \end{pmatrix} V^{-1}
\end{aligned}
$$

-
$$
\begin{aligned}
L^k &= (VPV^{-1})^k \\
&= (VPV^{-1})(VPV^{-1})\dots(VPV^{-1}) \\
&= (VP^kV^{-1}) \\
&= V\begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & {\lambda_1}^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & {\lambda_n}^k \end{pmatrix} V^{-1}
\end{aligned}
$$

-
$$
\begin{aligned}
x^{(k)} &= L^k x^{(0)} && (19) \\
&= V\begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & {\lambda_1}^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & {\lambda_n}^k \end{pmatrix} V^{-1}x^{(0)} && (20)
\end{aligned}
$$

suite

- $$x^{(k)} = [v_1, v_2, \ldots, v_n] \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & {\lambda_1}^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & {\lambda_n}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{21}$$

suite

- $$x^{(k)} = [v_1, v_2, \ldots, v_n] \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & {\lambda_1}^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & {\lambda_n}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{21}$$

- $$x^{(k)} = [v_1, v_2, \ldots, v_n] \begin{pmatrix} c_1 \lambda_1^k \\ c_2 \lambda_2^k \\ \vdots \\ c_n \lambda_n^k \end{pmatrix} \tag{22}$$

suite

- $$x^{(k)} = [v_1, v_2, \ldots, v_n] \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & {\lambda_1}^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & {\lambda_n}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (21)$$

- $$x^{(k)} = [v_1, v_2, \ldots, v_n] \begin{pmatrix} c_1\lambda_1^k \\ c_2\lambda_2^k \\ \vdots \\ c_n\lambda_n^k \end{pmatrix} \quad (22)$$

- $$x^{(k)} = \sum^{n} c_i \lambda_i^k V_i \quad (23)$$

- $$\frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} c_i \lambda_i^k V_i \tag{24}$$

- $$\frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} c_i \lambda_i^k V_i \qquad (24)$$

- $$(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}) \to 0; pour k \to \infty$$

- $$\frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} c_i \lambda_i^k V_i \tag{24}$$

- $$(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}) \to 0; pour k \to \infty$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \{\frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)}\} = c_1 v1$$

- $$\frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} c_i \lambda_i^k V_i \tag{24}$$

- $$(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}) \to 0; pour k \to \infty$$

  donc

  $$\lim_{n\to\infty} \{\frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)}\} = c_1 v1$$

- $$x^{(k)} = c_1 \lambda_1^k v_1 \tag{25}$$

- $$\frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} c_i \lambda_i^k V_i \tag{24}$$

- $$(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}) \rightarrow 0; pourk \rightarrow \infty$$

  donc

  $$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)}\} = c_1 v1$$

- $$x^{(k)} = c_1 \lambda_1^k v_1 \tag{25}$$

- Ainsi

$$x^{(k)} = \lambda_1 x^{(k-1)}$$

avec λ_1 est la valeur propre dominant de L

Les Saumons présentent trois cycles de vie, dont

- Les femelles de la seconde et troisième génération donnent respectivement 4 et 3 enfants.

Les Saumons présentent trois cycles de vie, dont

- Les femelles de la seconde et troisième génération donnent respectivement 4 et 3 enfants.
- Moitié des femelles de la première génération atteint leur second ages,

Simulation du modèle
Exemple du Saumon

Les Saumons présentent trois cycles de vie, dont

- Les femelles de la seconde et troisième génération donnent respectivement 4 et 3 enfants.
- Moitié des femelles de la première génération atteint leur second ages,
- 25 % de cette dernière vit leur troisième âge.

Les Saumons présentent trois cycles de vie, dont

- Les femelles de la seconde et troisième génération donnent respectivement 4 et 3 enfants.
- Moitié des femelles de la première génération atteint leur second ages,
- 25 % de cette dernière vit leur troisième âge.

La matrice de Leslie correspondante

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulation du modèle
Exemple du Saumon

Les Saumons présentent trois cycles de vie, dont

- Les femelles de la seconde et troisième génération donnent respectivement 4 et 3 enfants.
- Moitié des femelles de la première génération atteint leur second ages,
- 25 % de cette dernière vit leur troisième âge.

La matrice de Leslie correspondante

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

Les Saumons présentent trois cycles de vie, dont

- Les femelles de la seconde et troisième génération donnent respectivement 4 et 3 enfants.
- Moitié des femelles de la première génération atteint leur second ages,
- 25 % de cette dernière vit leur troisième âge.

La matrice de Leslie correspondante

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

- Une évolution de la population pour les dis premières années
- On démontre que

$$x^{(k)} = \lambda_1 x^{(k-1)}$$

avec λ_1 est la valeur propre dominant de L

- Une évolution de la population pour les dis premières années
- On démontre que

$$x^{(k)} = \lambda_1 x^{(k-1)}$$

avec λ_1 est la valeur propre dominant de L

- En utilisant normalisation.m - eigpower.m ,
- $$\lambda_1 = 1.5, \lambda_2 = -1.30, \lambda_3 = -0.1910$$

  en normalisant, soit

  $$\lambda_1 = 0.72, \lambda_2 = 0.24, \lambda_3 = 0.04$$

taille de la population en dix ans

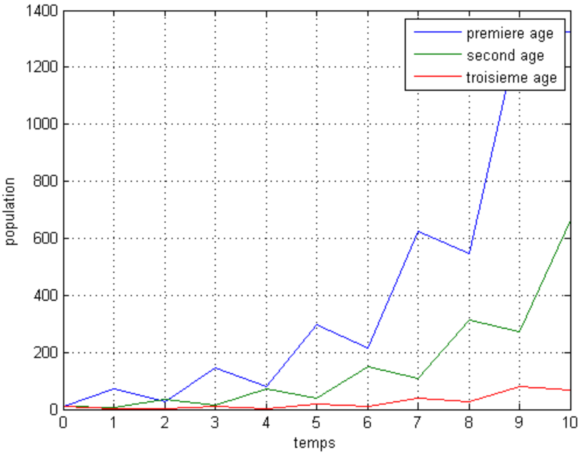


FIGURE: Taille de la population du saumon en dix ans

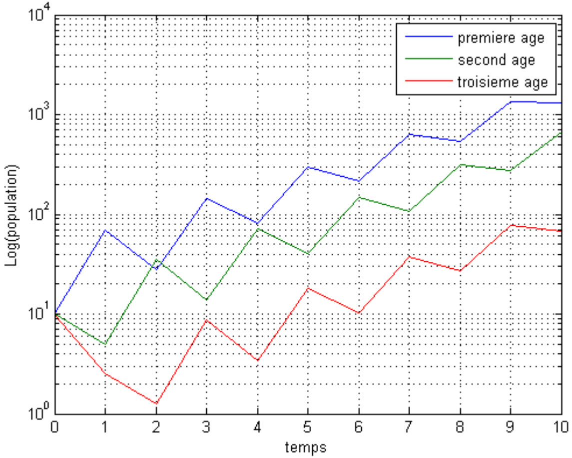


FIGURE: le logarithme de la taille de la population du saumon en dix ans

Pourcentage en 100 ans

- Prenons n=100 ,

Pourcentage en 100 ans

- Prenons n=100 ,$x^{(100)} = \begin{pmatrix} 1.1555.10^{19} \\ 0.3852.10^{19} \\ 0.0642.10^{19} \end{pmatrix}$

Pourcentage en 100 ans

- Prenons n=100 ,$x^{(100)} = \begin{pmatrix} 1.1555.10^{19} \\ 0.3852.10^{19} \\ 0.0642.10^{19} \end{pmatrix}$

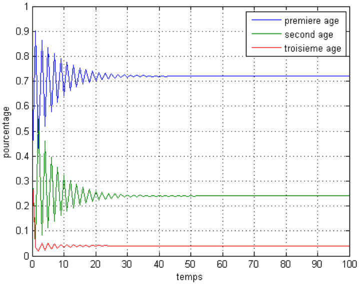
- en normalisant on trouve :

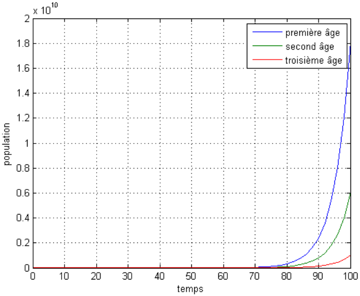
Pourcentage en 100 ans

- Prenons n=100 ,$x^{(100)} = \begin{pmatrix} 1.1555.10^{19} \\ 0.3852.10^{19} \\ 0.0642.10^{19} \end{pmatrix}$
- en normalisant on trouve :$x^{(100)} = \begin{pmatrix} 0.7200 \\ 0.2400 \\ 0.0400 \end{pmatrix}$

Pourcentage en 100 ans

- Prenons n=100 ,$x^{(100)} = \begin{pmatrix} 1.1555.10^{19} \\ 0.3852.10^{19} \\ 0.0642.10^{19} \end{pmatrix}$
- en normalisant on trouve :$x^{(100)} = \begin{pmatrix} 0.7200 \\ 0.2400 \\ 0.0400 \end{pmatrix}$





Conclusion

Merci de votre aimable attention ! ! !