

Bonjour à tous,

Bon courage pour cette année de préparation. Je m'appelle Ianis BERNARD, agrégé de sciences industrielles pour l'ingénieur en 2012, et j'interviens en prépa agrég (externe à Rennes, interne à Grenoble) depuis. Nous allons voir ensemble la thermodynamique, la thermique, et quelques concepts de mécanique des fluides.

J'ai repris la trame des cours des années précédentes, et ai ajouté quelques points qui m'ont semblé essentiels. Les deux pages suivantes sont un sommaire de ce que nous allons voir ensemble. Sur la gauche de chaque sous-section vous voyez des étoiles rouges, elles correspondent à ce que j'imagine être indispensable ou non.

- 3 étoiles : tout doit être compris et connu
- 2 étoiles : il faut comprendre l'idée et connaître les formules encadrées en rouge.
- 1 étoile : il faut comprendre d'où viennent les formules encadrées en rouge et savoir les utiliser si elles sont données
- 0 étoile : c'est à lire, pour donner une structure ou des exemples, mais j'estime que c'est pour votre culture et qu'il y a peu de chances que ça vous soit utile à l'agrég.

Nous avons, normalement, trois séances en présentiel prévues les mercredis après-midi : 23 septembre (cours 1), 7 octobre (cours 2), 4 novembre (3)

Chaque séance est prévue pour 3h mais il est possible que nous dépassions légèrement, surtout lors de la 3^e séance, (et de la 2^e aussi).

Je vous demande de bien vouloir lire le chapitre I] jusqu'au 5/A/ pour la 1^{re} séance, le chapitre II] intégralement pour la seconde séance, et le chapitre III] et la fin du chapitre I] pour le cours 3. Je ne vous demande pas de tout comprendre mais de l'avoir lu, ce qui nous fera gagner du temps.

Bon courage encore.

Ianis BERNARD.

SOMMAIRE

I] La base de la base

- A lire pour le cours 1**
- ☆☆☆ 1) Système ouvert/fermé, adiabatique, et autres définitions (1)
 - ☆☆☆ 2) Premier principe de la thermodynamique pour un système fermé (2)
 - 3) Enthalpie et chaleurs massiques
 - A/ Détente de Joule - Gay-Lussac (3)
 - B/ Transformation isochore (4)
 - C/ Transformation isobare quasi-statique (5)
 - D/ Relations entre les capacités thermiques pour un gaz parfait (5)
 - ☆☆☆ 4) Diagramme Pression - Volume (6)
 - 5) Systèmes ouverts et mécanique des fluides
 - A/ Mécanique des fluides et énergétique (8)
 - B/ Bilans (13)
 - C/ Force de poussée d'un fluide (13)
 - D/ Bilan enthalpique en canalisation (16)
- Cours 3**

II] Thermodynamique avancée

- A lire pour le cours 2**
- ☆☆☆ 1) Entropie
 - A/ Second principe de la thermodynamique (20)
 - B/ Identités thermodynamiques (21)
 - ☆☆☆ 2) Changement d'état d'un corps pur
 - A/ Chaleur latente de changement d'état (22)
 - B/ Diagramme P-V et courbe de rosée (24)
 - C/ Diagramme de Mollier ou diagramme enthalpique (26)
 - D/ Diagramme T-S ou diagramme entropique (IUT) (28)
 - ☆☆☆ 3) Machines thermiques et frigorifiques
 - A/ Conventions de transfert d'énergie (28)
 - B/ Exemple d'une machine réceptrice : la machine de Carnot (31)
 - C/ Exemple d'une machine frigorifique (33)
- + ANNEXES EXERCICES

III) Thermique et isolation

★ 1) Modes d'échanges de chaleur

(35)

2) Conduction

★ ★ ★

A/ Flux de chaleur

(36)

B/ Loi de Fourier et équation différentielle de la conduction

(37)

★ ★ ★

C/ Résistance thermique de conduction

(39)

3) Convection

★ ★

A/ Loi de Newton : un modèle simple pour le flux de convection

(40)

★ ★ ★

B/ Résistance thermique de convection (modèle de Newton)

(41)

À lire pour le cours 3

1) Système ouvert / fermé, adiabatique, et autres définitions.

- Un système fermé ne peut pas échanger de matière avec l'extérieur. (masse conservée, pas le volume). Les systèmes que nous étudierons le seront toujours MAIS ce sera parfois à vous de définir les limites du système. Son inverse: système ouvert.

Ex: Si nous avons du fluide dans une colonne, en déplacement, définir un système fermé c'est créer une enveloppe fictive qui se déplace avec le fluide, et dans laquelle le flux entrant = le flux sortant.

- Un système isolé n'échange ni matière, ni énergie avec l'extérieur.
- Un système calorifugé, ou athermane, n'échange pas de chaleur avec l'extérieur.
- Δ Certaines personnes parlent de système adiabatique pour désigner la même chose, les puristes vous expliqueront qu'ils ont tort: "Adiabatique" ne désigne pas un système ou des parois, mais une transformation, où la perte de chaleur aux parois est négligée. Cela peut par exemple être dû à une vitesse de transformation élevée (dans un moteur thermique, les étapes de compression et détente sont considérées adiabatiques, car le temps mécanique est faible donc les échanges thermiques - lents - n'ont pas le temps de s'établir).
- Transformation quasi-statique: où le système passe par une infinité / continuité d'états d'équilibre. Pour un piston, cela correspond à des équilibres thermo / mécaniques, autrement dit $P = P_{ext}$, la pression dans les deux chambres est la même. En général, lorsqu'une transformation est lente, on la considère quasi-statique.
- Transformation réversible, c'est une quasi-statique particulière, pour laquelle le système repasse par des états d'équilibre antérieurs si les contraintes sont inversées.
- La plupart des transformations que vous étudierez (voire toutes?) le seront!
- Transformation isochore: à volume constant, isobare: à pression constante.
- Une fonction d'état (on passe à quelque chose de plus compliqué) est une fonction (mathématique) de variables d'état (pression, volume, température) qui définit totalement un état d'équilibre. L'exemple que vous connaissez déjà sans forcément le savoir est la loi $pV = n \cdot R \cdot T$ des gaz parfaits.

Une fonction d'état est toujours vraie, quel que soit l'état du système pour peu qu'il soit à l'équilibre. La force de cette fonction d'état est vraie QUEL que soit le "chemin parcouru" (autrement dit ce que le fluide / système a subi) entre deux états d'équilibre. Pour en revenir à l'exemple de la loi des gaz parfaits, si j'ai fait passer mon système décrit à l'état géo par (P_0, V_0, T_0) , à un état (P_1, V_1, T_1) par exemple, alors quelle que soit la façon par laquelle j'en suis arrivé là, j'aurai (pour un système fermé $n_0 = n_1$): $P_1 V_1 = P_0 V_0 = n R T_0$

2) Premier principe de la thermodynamique

Le premier principe est un peu au thermodynamicien ce que celui de Lavoisier est au chimiste "rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme". Il s'agit en fait d'un simple bilan d'énergie. Vous savez que, dans des gaz ou liquides, l'agitation thermique fait "bouger" les molécules d'autant plus vite que la température* est élevée. On définit donc une fonction d'état, l'énergie interne (notée U) du fluide qui est la somme des énergies cinétique et potentielles interparticulaires dues à cette agitation thermique. Par conséquent, $U = U(T)$ est dépendante uniquement de la température.

→ Pour un système isolé d'énergie mécanique ^{macroscopique} (potentielle + cinétique) E_M , d'énergie interne (microscopique) U, qui reçoit une quantité de travail W_{resu} et de chaleur Q_{resu} la variation d'énergie totale engendrée est:

$$\Delta E_{tot} = \Delta E_M + \Delta U = W_{resu} + Q_{resu} \quad \text{1}^{\text{er}} \text{ principe.}$$

⚠ aux forces conservatives, il ne faut pas les compter deux fois ($\vec{F}_{cons} = -\vec{grad}(\text{potentiel})$). Ces forces dérivent d'une énergie potentielle, il faut choisir entre les ranger dans un ΔE_p inclus dans ΔE_M , ou dans un travail résultant. Je vous préconise de les ranger dans le ΔE_p . Ainsi, le travail à prendre en compte n'est que celui des forces non conservatives (frottement, pression, ...).

NB: on notera par la suite W et Q le travail reçu par le système, issu des forces non conservatives, et la chaleur. De plus, en général, $\Delta E_M = 0$ car il n'y a pas de déplacement ou variation macroscopique du système. Le 1^{er} principe prend alors la forme $\Delta U = W + Q$, ou sous forme infinitésimale: $dU = \delta W + \delta Q$.

- le travail des forces de pression, $\delta W_p = -p_{ext} \cdot dV$ est égal à la pression extérieure (pour un piston), fois la variation de volume. Mais si la transformation est quasi-statique (ou réversible), $p_{ext} = p$ la pression du fluide. Alors $\delta W_p = -p \cdot dV$.
- Pourquoi écrit-on δW et pas dW ? C'est une subtilité mathématique, car pour un dU , fini, on peut avoir un δW très grand (infini). Si par exemple un piston arrive en butée, il faut un déplacement infinitésimal pour fournir un travail infini (si le solide est rigide). D'où la différence de notation.
- NB: $U = U(T)$, donc pour une transformation isotherme, $\Delta U = 0 = W + Q$.
 ↑ pour un gaz et la plupart des liquides

* D'ailleurs, tant que j'y pense, à l'agreg, ne faites jamais de confusion entre CHALEUR et TEMPÉRATURE! sinon c'est mortel comme erreur de fond!

3) Enthalpie et chaleurs massiques

3

Vous avez peut-être trouvé que le point précédent aurait été trop rapide, ne vous inquiétez pas nous traiterons deux cas d'école dans cette partie. Si à la fin de ce point vous ne vous sentez toujours pas à l'aise avec les transformations dites "simples", envoyez-moi un mail je vous fournirai une feuille d'exos corrigés. Nous aurons besoin de cet acquis pour les machines thermiques. Ne faites pas l'impasse!

Vous l'avez peut-être noté, les mécaniciens parlent plus souvent d'enthalpie que d'énergie interne. L'enthalpie est également une fonction d'état, qui correspond à l'énergie (en Joules) "totale" d'un système thermo-mécanique. Notée H , elle comprend l'énergie interne U (nécessaire, liée aux équilibres interparticulaires) à laquelle s'ajoute l'énergie due à la pression, que le système doit exercer pour occuper son volume. La façon dont je le vois c'est que lorsqu'on réduit le volume de confinement d'un gaz (qu'on augmente la pression), on rapproche les particules, et statistiquement la probabilité de choc entre particules augmente.

$$H = U(T) + P \cdot V \quad \text{Def. enthalpie}$$

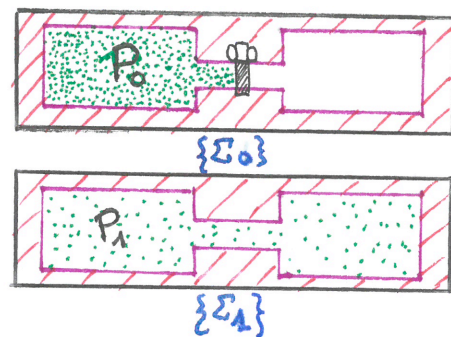
A/ Détente de Joule (Gay-Lussac)

Le cas le plus connu des transformations "simples" et le plus répandu, est celui de la transformation isochore.

Vous me direz sûrement qu'isochore c'est un truc de physicien, en méca on veut que ça bouge. Je

vous l'accorde, mais on ne va pas faire le tou des

exos de physiciens. Celui-ci est important pour votre compréhension.



→ On dispose d'une enceinte fermée, de volume V_0 , dans laquelle un gaz est maintenu à la pression P_0 à la température T_0 . À l'instant initial, on ouvre la chambre et le gaz se détend rapidement jusqu'à atteindre la pression P_1 dans un volume total V_1 .

→ Une première étape est de définir le système. Une manœuvre tentante mais peu judicieuse consisterait à isoler le compartiment de gauche. En effet lorsque l'on ouvre le robinet, la détente causerait une perte de matière du système (gaz s'échappant vers le compartiment de droite), et le premier principe ne serait pas applicable. Il est plus malin de définir le système fermé comme l'ensemble des deux compartiments.

→ On considère que la différence de température entre les deux états d'équilibre est négligeable, et que la paroi est adiabatique (ou la transformation adiabatique).

→ Il s'agit d'un gaz, une loi (fonction d'état) lie donc pression, température, et volume. On peut notamment penser à la loi des gaz parfaits ou des gaz de Van der Waals. Il suffit donc de deux variables d'état pour définir totalement un système. On choisit T et V : ainsi $du = \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_V dT + \left. \frac{\partial u}{\partial V} \right|_T dV$.

Ici, si f est une fonction des variables x et y , $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x$ indique la dérivée partielle relative à y , à x fixé. ④

On a $\Delta T = 0$ donc $\Delta U = \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T \Delta V + \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V \Delta T$. *

→ Enfin on applique le premier principe au système fermé: $\Delta E_n + \Delta U = W + Q$

$Q = 0$ car la transformation est adiabatique

$W = -P_{ext} \Delta V = 0$ car la membrane est supposée solide ($P_{ext} = 0$).

Ainsi la transformation est isoénergétique: $\Delta U = 0 = \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T \Delta V$ avec ΔV non nul.

On montre ainsi que U est indépendant de V . De même, en décrivant le système avec les deux variables d'état (T, P) , on montrerait que U est indépendant de la pression. Preuve que U ne dépend que de T .

B/ Transformation isochore

Je vous ai introduit deux nouvelles fonctions d'état: l'énergie interne et l'enthalpie.

On peut écrire le premier principe avec les deux: $du + dE_n = \delta W + \delta Q$

mais également $dH = d[U + pV] = dU + p dV + V dp$

ainsi, avec l'enthalpie, pour une transformation quasi-statique, c'est-à-dire

$\delta W = -p \cdot dV$, le premier principe s'écrit: $dH = \cancel{\delta W} + \delta Q + V \cdot dp + p \cdot dV = \delta Q + V \cdot dp$.

Bon, c'est bien mais quelle forme utilise, et dans quel cas? Pour faire simple, je

répondrais $\left\{ \begin{array}{l} \text{si rien de mécanique ne bouge (isochore), utilise } U. \\ \text{si ça bouge, ce sera quasi-statique voire probablement réversible, utilise } H. \end{array} \right.$

→ Supposons donc une transformation isochore: $dV = 0$. On n'a donc aucun travail des forces de pression, $W_{pression} = 0$. Le premier principe s'écrit alors:

$$dU = \cancel{\delta W} + \delta Q$$

Par ailleurs, $dU = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V dT + \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T dV$ *

On introduit une valeur, $c_v = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V$, nommée capacité thermique à volume constant, considérée constante à notre niveau. Ainsi, pour des transformations isochores, $dU = \delta Q = c_v dt$

En général, dans les abaques, vous trouverez davantage les termes de "capacité thermique massique", "chaleur massique", ou encore "chaleur spécifique", définie par:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_v = \frac{1}{m} C_v = \frac{1}{m} \left(\left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V \right) \\ \text{ou encore, } c_v = \left(\left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_V \right) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{avec } m \text{ masse du système dont } U \text{ est l'énergie} \\ \text{avec } u = \frac{U}{m} \text{ énergie interne massique.} \end{array}$$

* De manière générale, il est vrai que les variables d'état nécessaires à la description d'un système sont au nombre de deux, pas trois. Donc vous pouvez en choisir deux.

C/ Transformation isobare quasi-statique

Pour une transformation quasi-statique, nous avons vu que le premier principe s'écrit pour l'enthalpie : $dH = \delta Q + V \cdot dP$.

Nous allons utiliser l'enthalpie comme fonction d'état car ici le système se déforme, en effet, c'est évident que si une transformation isobare n'a pas de variation de volume, c'est qu'on ne change rien.

Pour une transformation isobare, $dP = 0$ et $dH = \delta Q$.

Or, $dH = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_P \cdot dT + \left. \frac{\partial H}{\partial P} \right|_T \cdot dP$ *

On introduit désormais $C_P = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_P$ la capacité thermique à pression constante.

Pour une transformation isobare, $dH = C_P \cdot dT = \delta Q$. De même que tout à l'heure, on définit la capacité thermique massique, chaleur massique ou chaleur spécifique à pression constante, $c_P = \frac{C_P}{m} = \frac{1}{m} \left(\left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_P \right) = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_P$ avec $\begin{cases} m: \text{masse du système} \\ h: \text{enthalpie massique.} \end{cases}$

D/ Relations entre les capacités thermiques, POUR UN GAZ PARFAIT

Nous devons introduire l'indice adiabatique, γ , qui est le rapport des capacités thermiques.

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{c_P}{c_V}$$

(Bon, je me rends compte que la différence de notation entre C_P et c_P n'est pas flagrante, désolé. Donc à partir de maintenant, les chaleurs spécifiques, massiques seront désignées par $c_{m,p}$ et $c_{m,v}$

Pour un gaz, $\gamma > 1$. Pour un liquide ou un solide (incompressibles) $\gamma \sim 1$.

Une relation utile est la relation de Mayer** : $C_P - C_V = m R$, avec R la constante des gaz parfaits (la même que pour $PV = mRT$), $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

NB: pour un gaz parfait monoatomique, $C_V = \frac{3}{2} m R$ donc $C_P = \frac{5}{2} m R$ d'après la loi de Mayer.

En utilisant les deux formules encadrées précédentes, on trouve (à savoir):

$$\begin{cases} C_V = \frac{mR}{\gamma - 1} \\ C_P = \frac{\gamma mR}{\gamma - 1} \end{cases}$$

* Encore une fois, on peut définir un état avec seulement deux variables parmi P, V et T (car une autre équation d'état les lie ensemble). A vous de choisir astucieusement.

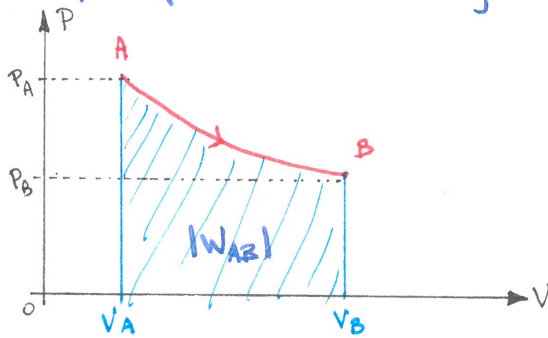
** ATTENTION, seulement pour un gaz parfait!

4) Diagramme PV - pression volume

(6)

On a vu que les variables d'état thermodynamiques P, V, T sont nécessairement liées par une fonction d'état (un peu comme une loi de comportement pour des matériaux), ce qui permet d'avoir, en pratique, la possibilité de n'en utiliser que deux pour totalement définir un système. La troisième peut être déduite des deux premières via la fonction d'état. C'est donc à vous de choisir lesquelles deux vous utilisez : (P, T) , (P, V) , (V, T) mais également H ou U puisqu'elles sont construites à partir des autres variables d'état.
 → Ici nous utilisons P et V pour définir l'état d'un système.

Notons que souvent, les pression massique p et volume massique v sont préférées aux grandeurs pression P et volume V . Je rappelle que p et v sont alors des grandeurs intensives (si l'on multiplie la masse par 2, ils ne sont pas modifiés), contrairement au volume V qui est extensif (si l'on multiplie la masse par deux, pour un fluide homogène, le volume l'est aussi). Ce distinguo n'a pas grand intérêt, sauf de pouvoir comparer des énergies entre deux systèmes de même masse. Pour éviter les problèmes de notation, je ne traiterai par la suite que de système dont la masse est de 1kg , de sorte que $p = P$, $v = V$. A l'agreg, vous devrez sûrement travailler avec les grandeurs massiques, et multiplier par la masse à la fin s'il y a plusieurs systèmes à comparer.

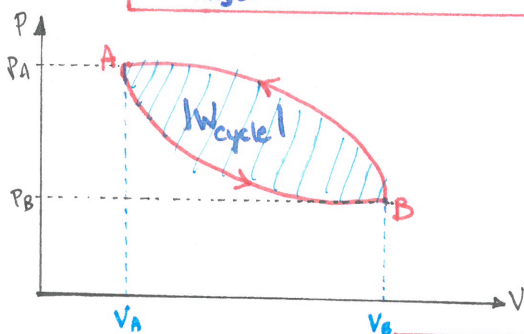


→ Pour une transformation $A \rightarrow B$, quasi statique (ou réversible puisque réversible est un cas particulier de transformation quasi-statique), on a vu que le travail reçu par le système $\delta W_{AB} = -P \cdot dV$, donc l'aire sous la courbe

(en bleu) représente le travail reçu par le système. Attention, $W_{fourni} = -W_{reçu}$.

De la formule précédente, qui peut également s'écrire $W_{AB} = - \int_A^B P \cdot dV$, on déduit

$$\begin{cases} W_{reçu} > 0 & \text{dans le cas d'une compression } (V_A < V_B) \\ W_{reçu} < 0 & \text{si détente } (V_A > V_B) \end{cases}$$



→ Dans le cas d'une transformation cyclique (plusieurs étapes), ou d'un cycle de plusieurs transformations, le travail reçu par le fluide correspond à l'aire balayée par le cycle.

Enfin, notons que

$$\begin{cases} W_{reçu, cycle} > 0 & \text{si cycle parcouru dans sens trigonométrique} \\ W_{reçu, cycle} < 0 & \text{si cycle parcouru dans sens horaire.} \end{cases}$$

Le diagramme PV est particulièrement adapté à l'étude des gaz (supposés parfaits), en effet, pour les liquides, les variations de volumes sont difficilement mesurables. Les deux grands cas d'école sont :

• Transformation à température constante.

Pour un gaz parfait, $P \cdot V = nRT_0 = \text{constante}$ donc $P = \frac{\text{constante}}{V}$ et la courbe est une hyperbole.

• Transformation adiabatique, réversible

Je fais le choix de ne pas vous présenter la démonstration des lois de Joule, mais je vous les énonce :

pour un gaz parfait, $\begin{cases} dU = C_v \cdot dT \\ dH = C_p \cdot dT \end{cases}$ pour une transformation adiabatique.

Lois de Joule

Ainsi, le premier principe s'écrit : $dH = C_p \cdot dT = d[U + P \cdot V] = dPV + \delta Q + \delta W$.

- pour une transformation quasi-statique, $\delta W = -P \cdot dV$

- on a $d(PV) = P \cdot dV + V \cdot dP$

- enfin, puisque la transformation est adiabatique, $\delta Q = 0$.

De la sorte, on peut écrire : $V \cdot dP = -\gamma \cdot P \cdot dV$ avec $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ coefficient adiabatique

Vous savez sûrement que $\frac{d(\ln(x))}{dx} = \frac{1}{x}$, donc $\frac{dx}{x} = d\ln(x)$.

L'équation précédente s'écrit donc $\frac{dP}{P} + \gamma \cdot \frac{dV}{V} = 0 \Leftrightarrow d\ln(P) + \gamma \cdot d\ln(V) = 0$
 $\Leftrightarrow d\ln(P) + d\ln(V^\gamma) = 0$
 $\Leftrightarrow d\ln(P \cdot V^\gamma) = 0$.

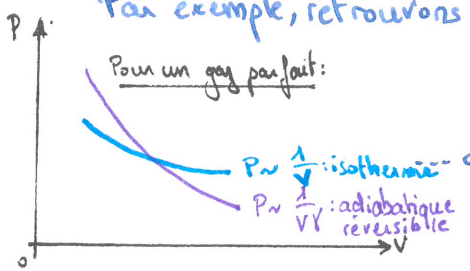
on obtient donc, pour une transformation adiabatique, réversible d'un gaz parfait, les lois de Laplace :

$$\begin{cases} PV^\gamma = \text{constante} & (1) \\ P^{1-\gamma} \cdot T^\gamma = \text{une autre constante} & (2) \\ V^{\gamma-1} \cdot T = \text{encore une autre constante} & (3) \end{cases}$$

Loi de Laplace

Note 1 : Rien ne sert de connaître les trois formes par cœur. Retenez $PV^\gamma = \text{constante}$, et les deux autres formes se retrouvent en sachant que $PV = nRT$ pour un gaz parfait.

Par exemple, retrouvons la (3) : $PV^\gamma = \text{constante}$, mais $P = nR \cdot \frac{T}{V}$



donc $\frac{T}{V} \cdot V^\gamma = T \cdot V^{\gamma-1} = \text{constante}_3$

ou la (2) : $PV^\gamma = \text{constante}$, mais $V = nR \cdot \frac{T}{P}$

donc $\left(\frac{T}{P}\right)^\gamma \cdot P = P^{1-\gamma} \cdot T^\gamma = \text{constante}_2$

Note 2 : on se fiche de la valeur des constantes, ce qui nous importe c'est de savoir que le produit $P \cdot V^\gamma$ est constant. Nous venons un exemple ensemble.

Note 3 : pour une adiabatique réversible d'un gaz parfait, $P \sim \frac{\text{cte}}{V^\gamma}$ avec $\gamma > 1$. Pour une isotherme, $P \sim \frac{\text{cte}}{V}$ donc l'adiabatique réversible décroît toujours plus vite.

5) Systèmes ouverts et mécanique des fluides

8

A/ Mécanique des fluides et énergétique

- Rappelons que la mécanique des fluides est une discipline appartenant à la mécanique des milieux continus. À l'échelle microscopique (atomique) la matière est composée d'atomes et molécules, plus ou moins organisés, qui s'entrechoquent, s'agitent, etc. Cette échelle ne peut être décrite que par des lois statistiques. Mais lorsqu'on s'éloigne suffisamment pour considérer des ensembles de molécules avec des grandes populations, on peut effectuer des moyennes statistiques sur ces populations, et définir des grandeurs macroscopiques (plus précisément on parle d'échelle "mésoscopique") telles que la température, l'énergie interne, etc. qui sont en fait l'image de l'agitation des molécules moyennée autour du point où l'on regarde.
- On définit donc la particule fluide comme un ensemble de molécules, assez grand pour que des moyennes statistiques soient réalisées, mais assez petit pour que cette particule soit considérée ponctuelle à l'échelle de l'écoulement. Typiquement, pour un liquide type eau une particule fluide a une taille caractéristique de l'ordre de la dizaine de nanomètres, et pour du gaz à pression ambiante, un micron. Ceci est donc assez petit, pour la plupart des cas, pour que l'espace entier du fluide soit discrétisé en petits éléments (les particules), et qu'à chaque point de l'espace corresponde alors une particule.

Une remarque importante est que la particule fluide étant définie comme un ensemble connu, fixé, de molécules, alors aucune molécule ne peut y rentrer ou en sortir par définition. C'est donc un (très petit) système fermé, de masse constante.

- Il existe alors deux manières strictement analogues de décrire un écoulement.
 - la méthode de description Eulerienne, où à un instant donné, en un point, on regarde quelle est la particule qui passe en ce point. Alors les propriétés de ce point à l'instant donné sont définies comme les propriétés de la particule qui y passe à cet instant précis.
 - la méthode de description Lagrangienne, où chaque particule, ponctuelle, est suivie individuellement au cours de sa trajectoire dans le temps. Cette description s'apparente beaucoup à de la mécanique du point.

- La description Eulérienne, pour donner un exemple classique, si l'on se trouve au dessus d'un pont à regarder une rivière couler, correspond à regarder en un point fixe (par exemple fixer un caillou sous l'eau, fixe) et voir que parfois des feuilles passent au dessus parce qu'elles sont emportées par le courant. A l'inverse la description lagrangienne consiste à voir une feuille emportée par le courant, et la suivre des yeux dans la trajectoire que lui fait prendre l'écoulement.

- Puisque les particules ne peuvent pas être suivies sous une description Eulérienne, la notion de trajectoire n'a pas de sens. On parle alors de ligne de courant, une vision de l'éprit qui est une courbe qui s'appuie, à un instant donné sur la tangente à la vitesse en tout point. C'est complexe et à mon avis hors programme, mais ma façon de comprendre le sens physique à donner à la ligne de courant (ma vision personnelle) est la suivante. Pour moi, à un instant donné, la ligne de courant passant par un point correspond à la trajectoire de la particule qui se trouve en ce point, si jamais l'écoulement continuait à s'écouler de la même façon (régime permanent).

La seule chose qui vous intéressera ici est qu'en régime permanent, les lignes de courant correspondent avec les trajectoires des particules qui sont dessus.

- L'application du principe fondamental de la dynamique à une particule fluide (c'est possible car une particule a été définie avec une masse constante) permet de trouver l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho [\vec{v} \cdot \text{grad}] \vec{v} = -\text{grad}(p) + \vec{F}_v$$

Je ne pense pas que ceci soit au programme, mais c'est simplement pour vous attirer l'œil sur le fait qu'en multipliant par le volume de la particule, on voit bien que :

- $\rho \cdot V \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt}$ = masse volumique \times Volume de la particule $\times \frac{D V_{\text{particule}} / \rho}{Dt}$
= masse particule $\times \frac{D V_{\text{particule}}}{Dt}$
- $\vec{F}_v \cdot V$ = forces volumiques \times Volume particule = forces à distance sur la particule
- $-\text{grad}(p) \cdot dV$: on peut montrer qu'il s'agit des forces de contact.

On voit donc clairement que l'équation d'Euler (ou sa grande sœur ¹⁰ l'équation de Navier Stokes qui ajoute simplement un terme de force de contact dû au cisaillement visqueux) est simplement le PFD de la mécanique des fluides.

• De manière classique dans les cours d'IUT, l'équation de Bernoulli est démontrée en partant de l'équation d'Euler. Pour continuer l'analogie avec la mécanique générale, l'équation de Bernoulli correspond à la conservation de l'énergie mécanique, ou au théorème de l'énergie cinétique. Je vais essayer ici de vous donner ma vision thermodynamique du théorème de Bernoulli.

Sous sa forme la plus classique, le théorème de Bernoulli s'écrit :

Pour un écoulement homogène, permanent (ou stationnaire), incompressible, irrotationnel et parfait, pour deux points A et B quelconques d'une même ligne de courant, la pression P , vitesse V et hauteur h de ces points est liée par :

$$P_A + \rho g h_A + \rho \frac{V_A^2}{2} = P_B + \rho g h_B + \rho \frac{V_B^2}{2}$$

- On parle d'un écoulement homogène, toutes les particules du fluide ont la même masse volumique, constante. Ainsi, pour une particule de masse dm (constante par définition), son volume est $dV = \rho \cdot dm$ et puisque sa masse dm et sa masse volumique ρ sont constantes, toute particule du milieu conserve son volume, ce qui revient à la même chose que de dire que l'écoulement est incompressible.
- L'écoulement est irrotationnel, donc d'une part il n'y a pas d'énergie due à la rotation des particules, et d'autre part on peut montrer qu'il n'y a pas de dissipation due à son mouvement rotatif, puisque celui-ci est nul.
- Ensuite, l'écoulement est stationnaire. On a vu que les lignes de courant correspondent alors à la trajectoire des particules qui s'y trouvent. Ainsi, si A est en amont et B en aval sur la même ligne de courant, la particule ^{la particule} en A passera par B à un instant ultérieur. Or, puisque l'écoulement est stationnaire, les propriétés en A et en B ne dépendent pas du temps. Ainsi, la particule se trouvant en A à l'instant t prendra les propriétés du point B lors qu'elle y arrivera, à l'instant $t + \Delta t$, et ces propriétés de B en $t + \Delta t$ sont les mêmes qu'en t puisque rien ne dépend du temps.

- Finalement, puisque la particule allant de A en B est un système fermé, auquel on peut donc appliquer le 1° principe de la thermodynamique - Pour chaque déplacement infinitésimal le long de sa trajectoire, la particule subit une transformation infinitésimale, on écrit donc

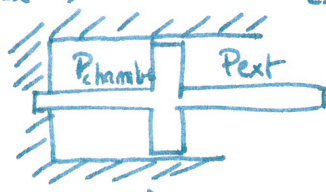
$$dU + dE_c + dE_p = \delta W_{ext} + \delta Q$$

Pour un écoulement parfait, toutes les transformations subies par les particules fluides sont isentropiques, donc adiabatiques ($\delta Q=0$) et réversibles. De plus les variations d'énergie interne y sont nulles.

⚠ On a écrit précédemment que lorsqu'on applique une pression lentement variable sur un piston, la chambre change de volume et le travail fourni, puisque la tige est à l'équilibre $P_{chambre} = P_{ext}$, est $W = -P_{ext} dV$.

En effet pour une surface S de piston :

le PFS appliqué à la tige s'écrit



A part $P_{ext} S = F_{ext \rightarrow tige} = F_{air \rightarrow tige} = P_{chambre} S$

d'où le fait que le travail s'écrit $F_{ext \rightarrow tige} \cdot d\vec{e} = -P_{ext} \cdot S \cdot dl = -P_{ext} dV$

ce signe vient du fait que la pression dans la chambre lutte contre la mise en mouvement de la tige qui tend à réduire son volume.

Sous la forme plus générale ici, le travail des forces de pression pour une transformation quasi-statique s'écrit $\delta W_{ext} = -d(PV)$.

Ici, puisque les particules ont un volume constant (incompressible), $\delta W_{ext} = -VdP$. Ainsi, d'après la remarque en rouge,

$$dE_c + dE_p = -VdP$$

Ainsi, si l'on divise cette expression par V le volume de la particule, que l'on écrit que son énergie potentielle est $mgz = \rho \cdot Vgz$ et que son énergie cinétique est $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho V v^2$, alors :

$$d\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P\right) = 0$$

Ce qui peut s'intégrer entre tous les points de la trajectoire, chacun correspondant à un état de la particule. Il vient donc, entre autres que entre A et B, deux positions de la particule,

$$\Delta_{AB} \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P \right] = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A + P_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B + P_B$$

On retrouve donc l'équation de Bernoulli, qui se comprend comme la conservation de l'énergie (potentielle, cinétique et enthalpie)

volumique des particules le long de leur trajectoire. En notant X la charge, qui est cette énergie volumique des particules, on comprend que lorsque l'écoulement n'est pas parfait il peut y avoir de la dissipation, visqueuse le plus souvent. Donc une particule peut perdre de l'énergie au cours de sa trajectoire. Ainsi, si deux points A et B sont sur une ligne de courant pour un écoulement stationnaire, A en amont de B, alors (les lignes de courant et trajectoires sont confondues) une particule passe en A, puis se rend en B en perdant de l'énergie.

Donc, les propriétés du point A et du point B étant définies en description Eulerienne comme les propriétés des particules en ce point, la charge en A est supérieure à la charge en B :

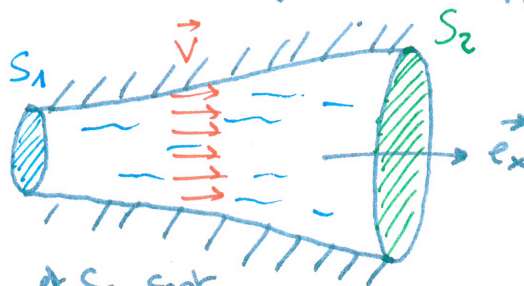
$$X(A) - X(B) = \Delta X_{AB} > 0$$

avec par définition $\Delta X_{AB} = \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2) + (P_A - P_B) + \rho g(z_A - z_B) \geq 0$.

ΔX_{AB} est la perte de charge entre A et B, et l'égalité précédente est stricte si l'écoulement est parfait (non dissipatif), et l'inégalité est stricte sinon.

- Dernier point pratique, lorsqu'un écoulement se fait en jet ou dans une canalisation (donc quand il s'appuie sur une enveloppe), alors :

- Si la vitesse est uniforme sur toute section



- Si les surfaces S1 et S2 sont normales au vecteur vitesse en tout point

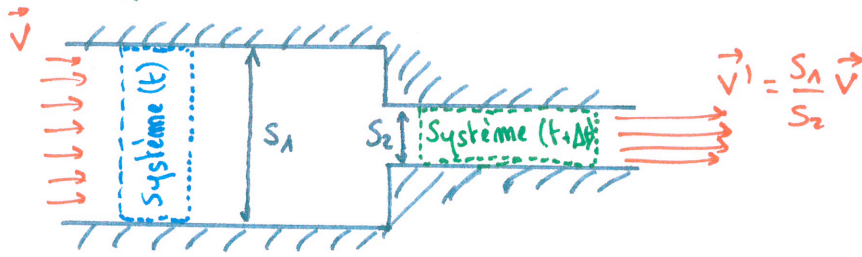
- Si l'écoulement est incompressible, ou stationnaire et homogène.

→ Alors le débit en S1 est égal au débit en S2 (orienté ici par convention vers la droite donc dans le sens de la vitesse) :

$$Q_{\text{volumique}} = \iint_{S_1} \vec{v} \cdot \vec{e}_x \, dS = v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad \text{en m}^3/\text{s}$$

et $Q_{\text{massique}} = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2$, en kg/s

Le débit est conservé en toute section par conservation de la masse pour un écoulement incompressible : il ne peut pas y avoir de "stockage" de fluide, ce qui entre dans le volume de contrôle représenté doit sortir ailleurs.



La méthodologie des bilans, assez calculatoire, ne me semble plus dans l'esprit du concours. Au cas où je me trompe, sachez que vous serez très guidés dans le cas contraire. L'idée du bilan est que dans un écoulement, par exemple en canalisation, on ne peut pas appliquer les lois classiques qui ne sont définies qu'en système fermé.

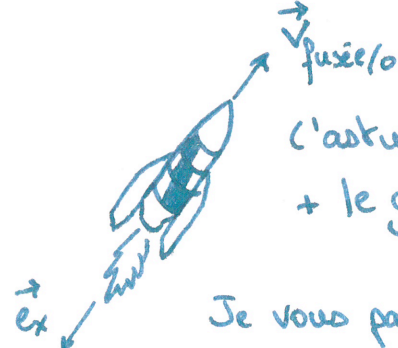
On va donc définir un volume mobile qui englobe une masse constante de fluide et qui la suit dans son mouvement, exactement comme on vient de le faire pour une particule fluide. Ce système est fermé, et on peut donc lui appliquer les lois classiques de la thermodynamique.

Toutefois, bien que je n'en fais pas la démonstration dans ce cours, deux résultats me semblent à connaître par cœur, ils ont déjà été nécessaires pour des sujets d'agreg récents, et peuvent se retrouver facilement grâce aux unités.

c/ Force de poussée d'un fluide

La force de poussée peut se définir comme la résultante des forces de pression sur un système isolé. Derrière ce charabia, se cache la force de propulsion des fusées par exemple. Comment calculer la force de propulsion en sortie de tuyères, qui permet d'envoyer une fusée dans l'espace?

Vous pensez sûrement qu'il suffit d'isoler la fusée et d'appliquer le PFD, c'est naturel mais FAUX! En effet, la fusée décolle parce qu'elle rejette du gaz (comme le recul d'une arme à feu), il faut donc bien effectuer une quantité de mouvement mais attention! Comme la fusée rejette du gaz, sa masse n'est pas constante, ce n'est pas un système fermé, et donc on ne peut pas lui appliquer le principe fondamental de la dynamique.



C'est ce que consiste à isoler pendant deux instants successifs { la fusée + le gaz qu'elle va cracher entre ces deux instants }.

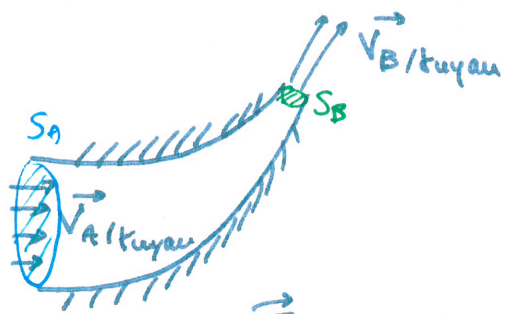
Je vous passe la démonstration, mais l'on trouve que la force de poussée exercée par le gaz sur la fusée, \vec{F}_p , s'exprime en fonction de la vitesse du gaz PAR RAPPORT A LA FUSÉE $\vec{v}_{gaz/fusée} = \vec{v}_{gaz/0} - \vec{v}_{fusée/0}$ et du débit massique de gaz sortant D_M (en kg/s):

$$\vec{F}_p = - D_M \cdot \vec{v}_{gaz/fusée}$$

Physiquement, je vous propose un raisonnement "avec les mains" pour vous en convaincre. Entre deux instants consécutifs t_0 et $t_0 + \Delta t$, la fusée a rejeté une masse $D_M \cdot \Delta t$, avec une vitesse $\vec{v}_{gaz/fusée}$. le principe des actions réciproque dit que la quantité de mouvement cédée au gaz par la fusée est égal à moins la quantité de mouvement cédée à la fusée par le gaz, soit : $- D_M \vec{v}_{gaz/fusée} \cdot \Delta t$.

Et en supposant qu'entre ces deux instants consécutifs, la masse de la fusée a très peu changé ($Masse(t_0 + \Delta t) \approx Masse(t_0)$), on peut lui appliquer le PFD, qui dit que la dérivée / temps de la quantité de mouvement $\frac{d}{dt} (- D_M \cdot \vec{v}_{gaz/fusée} \cdot \Delta t) \approx \frac{1}{\Delta t} (- D_M \vec{v}_{gaz/fusée} \cdot \Delta t) = - D_M \vec{v}_{gaz/fusée}$ est égal à la somme des actions mécaniques extérieurs, ici \vec{F}_p .

Ce résultat est généralisable, par exemple dans le cas où un écoulement incompressible se fait dans une canalisation, on montre que la force exercée par le fluide sur la canalisation, \vec{F}_p , se calcule



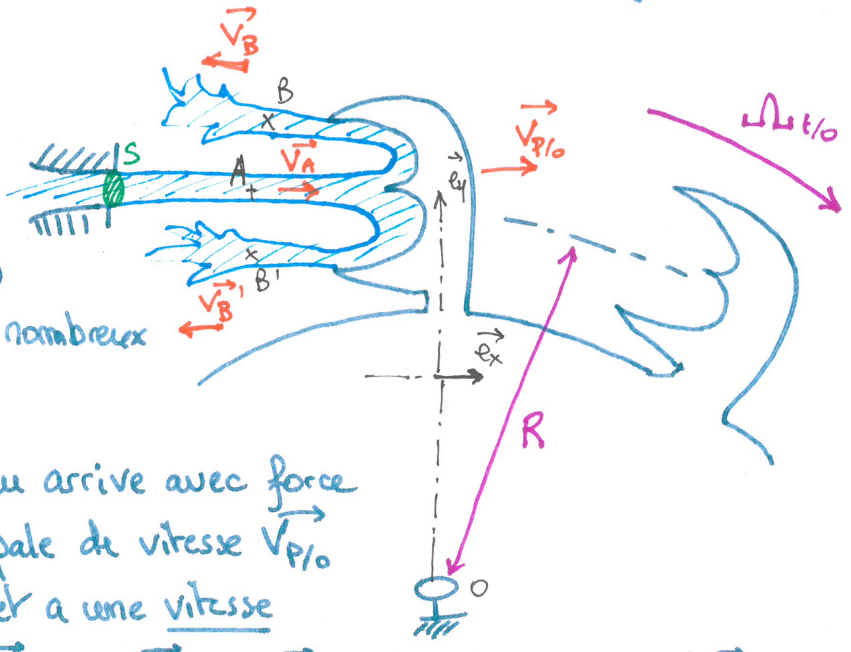
$$\vec{F}_p = D_M (\vec{v}_{B/tuyau} - \vec{v}_{A/tuyau}) \quad (\text{ce qui sort} - \text{ce qui entre})$$

On a, pour écrire cela, utilisé entre autres le fait que pour l'écoulement incompressible, le débit $\rho \cdot v_A \cdot S_A = \rho \cdot v_B \cdot S_B = D_M$ est le même en tout point.

NB 1 : 1^o remarque, on voit que pour un tube de section constante et droit, $v_A S_A = v_B S_B \Rightarrow v_A = v_B$, et puisqu'il est droit, $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ (pas de changement de direction du flux). Donc $\vec{F}_p = \vec{0}$.

NB 2 : 2^o remarque, attention \vec{F}_p ne représente ici que la somme des forces de pression sur les surfaces de la canalisation. La somme des actions mécaniques extérieures peut faire intervenir le poids du liquide contenu, les pressions du fluide sur les surfaces S_A et S_B , etc.

Un dernier exemple, celui de la turbine Pelton, responsable de la conversion hydroélectrique dans de nombreux barrages.



Un jet d'eau arrive avec force sur une pale de vitesse $\vec{v}_{P/0}$

($v_{P/0} = R \omega$). Ce jet a une vitesse relative à la pale $\vec{v}_{A/pale} = \vec{v}_{A/0} - \vec{v}_{P/0} = (D_s/S - R \omega) \vec{e}_x$

où D_s est le débit de sortie du jet, et R le rayon de la turbine, ω sa vitesse de rotation.

Le jet, au contact de la pale, se fait dévier en sens opposé (vers B et B'). On ne sait pas quelles sont les vitesses en B et B', mais on sait que le débit est conservé, donc que $v_A S_A = v_B S_B + v_{B'} S_{B'}$.

En général on suppose que le jet est à peu près symétrique donc que $v_B \approx v_{B'}$ et $S_B \approx S_{B'} \approx S_A/2$, donc $v_A S_A \approx 2 \cdot \frac{1}{2} v_B S_A$ d'où $v_A \approx v_B$.

La force de poussée de l'eau sur l'auget s'écrit donc

$$\begin{aligned} \vec{F}_p &= D_m \left(\underbrace{\frac{1}{2} \vec{v}_{B/auget} + \frac{1}{2} \vec{v}_{B'/auget}}_{\text{ce qui "sort"}} - \underbrace{\vec{v}_{A/auget}}_{\text{ce qui "entre"}} \right) \\ &= D_m (\vec{v}_{B/auget} - \vec{v}_{A/auget}) = D_m \left[\vec{v}_{B/0} - \vec{v}_{auget/0} - (\vec{v}_{A/0} - \vec{v}_{auget/0}) \right] \end{aligned}$$

D'où $\vec{F}_P = D_{\pi} (\vec{V}_{B/0} - \vec{V}_{A/0})$.

→ On peut alors calculer le couple $\vec{C}_P \cdot \vec{R}_P$, en déduire une puissance $C_P \cdot \Omega_{t/0}$ etc... Mais je vais faire beaucoup de remarques et ne pas continuer cet exo puisque la suite n'est pas du programme de ce cours.

Remarque 1: J'ai écrit " $\vec{F}_P = D_{\pi} \cdot (\frac{1}{2} \vec{V}_{B/auget} + \frac{1}{2} \vec{V}_{B'/auget} - \vec{V}_{A/auget})$ ",

en effet le débit en B est $V_B S_B = V_B \frac{S_A}{2} = \frac{1}{2} V_A S_A = \frac{1}{2} V_A S_A$.

Remarque 2: Je n'ai pas écrit $D_{\pi} = \rho D_S$ car c'est faux! En effet, imaginons ^{(+) si point de sortie} _{(-) si point d'entrée}

que le fluide est craché avec un débit D_S lui donnant exactement la même vitesse que l'auget, alors le fluide ne peut pas donner de quantité de mouvement à l'auget et on devrait trouver $\vec{F}_P = \vec{0}$,

or ici $\vec{F}_P = D_{\pi} (\vec{V}_{B/0} - \vec{V}_{A/0})$ avec $(\vec{V}_{B/0} - \vec{V}_{A/0}) \neq \vec{0}$

Donc $D_{\pi} = 0$, c'est donc que $D_{\pi} \neq \rho D_S$. En effet, le débit doit être calculé par rapport à l'objet isolé! Ici $D_{\pi} = \rho S_A V_{A/auget} = \rho S_A (V_{A/0} - R_{\omega t/0})$

Donc la forme la plus générale que je puisse écrire pour la force de poussée est:

$$\vec{F}_P = \sum_{\substack{B \text{ points de} \\ \text{"sortie" de} \\ \text{fluide}}} D_{M(B)/\text{objet}} \cdot \vec{V}_{B/\text{objet}} - \sum_{\substack{A \text{ points} \\ \text{d'"entrée"} \\ \text{de fluide}}} D_{M(A)/\text{objet}} \cdot \vec{V}_{A/\text{objet}}$$

où "B" sont les points d'où du fluide semble "sortir" du système, "A" sont les points où du fluide semble "entrer", D_{M}/objet est le débit massique calculé dans le référentiel de l'objet isolé, calculé en B ou A.

D/Bilan enthalpique en canalisation

En partie A/ on a montré que pour un écoulement permanent, incompressible irrotationnel et parfait, une particule fluide conserve son énergie au cours de sa trajectoire dans le temps, énergie qui vaut $[P + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2}] \times \text{Vol}$
pression → P ; énergie cinétique volumique $\rho \frac{v^2}{2}$; énergie potentielle volumique $\rho g z$; Volume de la particule

On écrit cette énergie $PV + mgz + \rho \frac{V^2}{2}$

(17)

Le long d'une ligne de courant, entre 2 points A et B, on a dit que l'équation de Bernoulli traduit la conservation de cette énergie. Mais s'il y a un composant hydraulique entre A et B qui donne de la puissance à la particule (pompe, chauffage) ou qui lui en prend (turbine, circuit de refroidissement), que ce soit sous forme de travail ou de chaleur, alors l'énergie en A et en B n'est plus la même.

Si A est en amont de la source d'énergie et B en aval,

$$\left[PV + mgz + \rho \frac{V^2}{2} \right]_B - \left[PV + mgz + \rho \frac{V^2}{2} \right]_A = W_{\text{ext, regu}} + Q_{\text{regu}}$$

Or on a vu que pour un écoulement parfait les variations d'énergie interne sont nulles donc $u_B - u_A = 0$

$$\Rightarrow H_B - H_A = (u_B + P_B v_B) - (u_A + P_A v_A) = \Delta(PV)$$

On voit donc que pour chaque particule, le 1^{er} principe de la thermodynamique s'écrit

$$\left[H + E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}} \right]_B - \left[H + E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}} \right]_A = W_{\text{ext, regu}} + Q_{\text{regu}} \quad (*)$$

On peut écrire l'énergie totale de la particule comme $m_{\text{part}} \cdot e_{\text{tot}} = E_{\text{tot}}$ avec m_{part} la masse de la particule, et e_{tot} son énergie massique totale

$$e_{\text{tot}} = h + e_{\text{pot}} + e_{\text{cin}} = \frac{P}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} \quad (\text{en J/kg})$$

enthalpie massique énergie potentielle massique énergie cinétique massique

Il passe N particules par unité de temps dans le système (N fixé car l'écoulement est incompressible).

$$N \text{ particules/sec} = \frac{1}{m_{\text{part}}} \times D_m \quad (**)$$

masse/particule débit massique, masse/s.

On s'en serait douté, fixer un nombre de particules traversant le système par seconde revient à imposer un débit.

L'équation (*) (1^{er} principe de la thermo appliqué à une particule) nous dit que, en multipliant par N particules/sec

$$N_{\text{particules/sec}} \cdot (E_{\text{tot}}(B) - E_{\text{tot}}(A)) = N_{\text{particules/sec}} \times (W_{\text{ext, regu}} + Q_{\text{regu}})$$

par particule par particule

Ainsi en écrivant que $E_{\text{tot}} = m_{\text{part}} \cdot e_{\text{tot}} = m_{\text{part}} (h + e_{\text{pot}} + e_{\text{cin}})$ il vient

$$N_{\text{particules/sec}} \cdot (E_{\text{tot}}(B) - E_{\text{tot}}(A)) = D_M (e_{\text{tot}}(B) - e_{\text{tot}}(A))$$

↑ on utilise l'expression (**)

et d'autre part, $N_{\text{particules/sec}} \times \left(\begin{matrix} W_{\text{ext regu}} \\ \text{par particule} \end{matrix} + \begin{matrix} Q_{\text{regue}} \\ \text{par particule} \end{matrix} \right)$

$$= W_{\text{regu par seconde}} + Q_{\text{regue par seconde}}$$

$$= \frac{\delta W_{\text{regu}}}{\delta t} + \frac{\delta Q_{\text{regue}}}{\delta t}$$

$$= P_{\text{regue}}^i + \Phi_{\text{regue}}$$

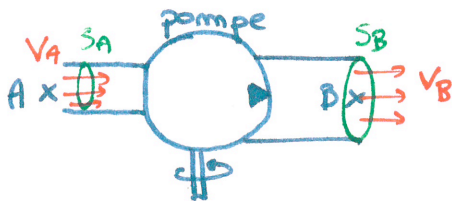
On note P_{regue}^i la puissance mécanique interne regue, c'est-à-dire la puissance communiquée au sein du fluide, ex par une pompe, une hélice, etc. Et l'on note Φ_{regue} la puissance calorifique regue.

avec A en amont de la source, B en aval

$$\text{On a donc } D_M [(h + e_{\text{pot}} + e_{\text{cin}})_B - (h + e_{\text{pot}} + e_{\text{cin}})_A] = P_{\text{regue}}^i + Q_{\text{regue}}$$

Encore une fois, comme pour le C/, la démonstration se veut pédagogique et pas rigoureuse. L'objectif n'est pas que vous sachiez d'où vient cette formule, mais que vous la compreniez. Grosso modo, le message est qu'un volume de fluide qu'on isole voit son énergie augmenter (ou diminuer) lorsqu'il traverse la source (ou le puits) d'énergie. ⚠ On parle de puissances regues par le fluide.

Dans la quasi totalité des cas où vous aurez à utiliser cette formule les variations d'énergie potentielle et d'énergie cinétique sont nulles, sauf contre-indication de l'énoncé. Mais attention, si par exemple



- la conservation du débit donne $V_A S_A = V_B S_B$
- la tuyauterie est horizontale $\rightarrow e_p(B) = e_p(A)$
- On suppose qu'il n'y a pas de chauffage dans la pompe : $Q_{\text{regue}} = 0$.

l'équation donne donc $P_{\text{regue}}^i = P_{\text{fournie par la pompe}} = D_M [h(B) + e_{\text{cin}}(B) - e_{\text{cin}}(A) - h(A)]$

$$e_{cin}(B) - e_{cin}(A) = \frac{1}{2} (V_B^2 - V_A^2) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{S_B^2}{S_A^2}\right) V_B^2$$

Et comme l'enthalpie $H = U + PV$ d'une particule divisée par sa masse m_{part}

$$donne \quad h = u + P \cdot \frac{V}{m_{part}} = u + \frac{P}{\rho}$$

↑ volume de la particule
ρ ← masse volumique

et comme la variation d'énergie libre est nulle en écoulement parfait,

$$h(B) - h(A) = \frac{P_B}{\rho} - \frac{P_A}{\rho} = \frac{\Delta P}{\rho}$$

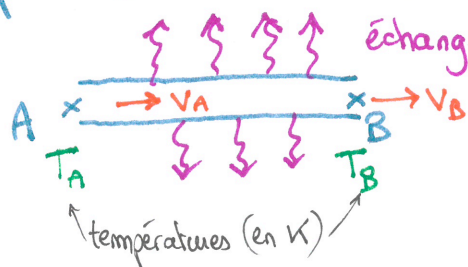
$$Donc \quad P_{fournie \text{ par la pompe}} = \rho \cdot D_v \left[\frac{P_B - P_A}{\rho} + \Delta e_{cin} \right] = D_v \Delta P + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{S_B^2}{S_A^2}\right] V_B^2$$

On voit que si $S_A = S_B$ ce second terme dû à la variation d'énergie cinétique causée par la variation de section est nul, et l'on retrouve la forme classique

$$P_{pompe} = D_v \cdot \Delta P$$

↑ débit volumique différence de pression aval - amont. à connaître!

Un autre résultat provenant de cette équation et à connaître par cœur concerne les échanges thermiques (cela nous sera utile à la prochaine partie II de ce cours).



- Supposons l'échangeur thermique horizontal, alors $e_p(A) = e_p(B)$
- la section en A = la section en B, alors $V_A = V_B$ par conservation du débit, donc $e_c(A) = e_c(B)$

- Il n'y a pas de composant interne au fluide lui fournissant ou prélevant du travail: $P_{regu} = 0$

• Alors on peut écrire:

$$D_M (h_B - h_A) = Q_{regue}$$

(ΔQ_{regue} peut être négative si le fluide baisse en température, cédant de la chaleur à l'extérieur).

Et en utilisant la capacité thermique massique, ou chaleur massique, du fluide, $c_{m,p}$ (en $J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$) on exprime $\Delta h = c_{m,p} \cdot \Delta T$,

$$d'où \quad D_M (T_B - T_A) c_{m,p} = Q_{regue} \quad \text{à connaître!}$$

NB: on vérifie bien que $Q_{regue} > 0 \Leftrightarrow T_B > T_A$.

Bien, désormais vous devez maîtriser les bases, mais ceci ne vous aide pas à répondre aux exigences du jury. Nous allons aborder une fonction d'état plus complexe : l'entropie. Ensuite, nous aborderons ce qui me semble primordial : les machines thermiques.

1) Entropie

Avec les mains, l'entropie correspond physiquement à une quantification du chaos. J'entends par là que plus les particules/molécules sont mobiles et bougent, plus l'entropie est élevée. Entre autres, l'agitation thermique participe au chaos, et augmente avec la température, et en général l'entropie en fait donc de même. Mais pas toujours, car la température n'est pas la seule source d'entropie.

A/ Second principe de la thermodynamique

Quand le premier principe peut être vu comme un principe de conservation (de l'énergie d'un système fermé), le second principe est vu comme un principe d'évolution.

Il stipule que, pour un système quelconque passant d'un état A à un état B, la différence d'entropie entre les deux états, ΔS_{AB} (ou dS_{AB} si la transformation est infinitésimale) est égale à la somme de l'entropie échangée \mathcal{Y}_e (respectivement $\delta\mathcal{Y}_e$) et de l'entropie créée \mathcal{Y}_c (respectivement $\delta\mathcal{Y}_c$).

$$\Delta S_{AB} = \mathcal{Y}_e + \mathcal{Y}_c \quad \text{ou} \quad dS_{AB} = \delta\mathcal{Y}_e + \delta\mathcal{Y}_c \quad \text{second principe}$$

L'entropie est une fonction d'état, le terme d'échange \mathcal{Y}_e correspond aux échanges de chaleur et de matière (donc $\mathcal{Y}_e = 0$ si la transformation est adiabatique pour un système fermé) et le terme de création \mathcal{Y}_c correspond à la création d'irréversibilité, d'entropie (nul pour une transformation réversible, donc tout le temps pour nous en agreg). Le terme d'échange vaut toujours $\delta\mathcal{Y}_e = \frac{\delta Q}{T}$.

$$\text{Pour une transformation réversible, } \mathcal{Y}_c = 0 \text{ et } dS = \delta\mathcal{Y}_e = \frac{\delta Q_{\text{réversible}}}{T}$$

(Des causes d'irréversibilité pourraient être des gradients de concentration, des effets non linéaires comme des hystérésis dans le cycle, des frottements...).

NOTE: Pour une transformation adiabatique et réversible, $\mathcal{Y}_c = 0$ (réversibilité), pour un système fermé, $\mathcal{Y}_e = 0$ (fermé, adiabatique \rightarrow pas d'échange), $\Delta S = 0$.

\rightarrow Une transformation isentropique ($S = \text{constante}$) est une transformation adiabatique et réversible d'un système fermé. Ainsi, les hypothèses pour appliquer la loi de Laplace ($PV^\gamma = \text{constante}$) se ramènent à : transformation isentropique d'un gaz parfait.

B / Identités thermodynamiques

Je ne peux évidemment pas tout aborder dans ce cours, et vous n'avez sûrement pas le temps. Je ne démontrerais pas les deux formules qui suivent, et je ne sais pas encore si nous nous en serviront (sachez toutefois que pour les démonstrations, vous les trouverez dans n'importe quel livre de physique de CPGE). Sachez toutefois qu'il existe deux lois, appelées identités thermodynamiques, qui lient les variations d'entropie d'une part aux variations d'énergie interne, et d'autre part aux variations d'enthalpie.

$$\begin{cases} ds = \frac{du}{T} + \frac{p}{T} dv & (1) \\ ds = \frac{dh}{T} - \frac{v}{T} dp & (2) \end{cases}$$

identités thermodynamiques.

Un exemple très classique d'utilisation de ces lois est la transformation d'un gaz parfait. Les lois de Joule donnent $du = c_v \cdot dT$ et $dh = c_p \cdot dT$ pour un gaz parfait, et $pV = nRT$

donc

$$\begin{cases} ds = c_v \cdot \frac{dT}{T} + nR \cdot \frac{dv}{v} \\ ds = c_p \cdot \frac{dT}{T} + nR \cdot \frac{dp}{p} \end{cases}$$

or, la loi de Mayer nous a permis d'établir au I(3) D.

$$\begin{cases} nR = (\gamma - 1) \cdot c_v \\ nR = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c_p = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) c_p \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} ds = c_v \cdot \left[\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \cdot \frac{dv}{v} \right] \\ ds = c_p \cdot \left[\frac{dT}{T} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{dp}{p} \right] \end{cases} \text{ avec } c_p = \gamma \cdot c_v \text{ par définition de l'indice } \gamma.$$

$$\rightarrow ds = c_v \left[\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dv}{v} \right] = c_v \left[\gamma \cdot \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \cdot \frac{dp}{p} \right].$$

qui s'intègre en $\Delta s_{AB} = c_v \cdot \left[\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + (\gamma - 1) \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \right].$

→ En général, pour savoir quelle forme choisir, utilisez (1) la première si la transformation est isochore, et (2) la seconde si la transformation est isobare.

2) Changement d'état d'un corps pur.

On parle "d'état" d'un corps (= une matière) pour désigner sous quelle "forme" il se trouve physiquement sous les conditions thermodynamiques auxquelles il est soumis. Pour de l'eau par exemple, à basse température, en fonction de la pression, on pourra la trouver sous forme de glace (solide amorphe, comme le verre, pas de structure cristalline) ou de flocons de neige - A pression atmosphérique, pour $0^\circ\text{C} < \text{Température} < 100^\circ\text{C}$ l'eau sera liquide, puis sous forme de vapeur pour $T > 100^\circ\text{C}$.

Pour les corps purs, on distingue en général que trois états :

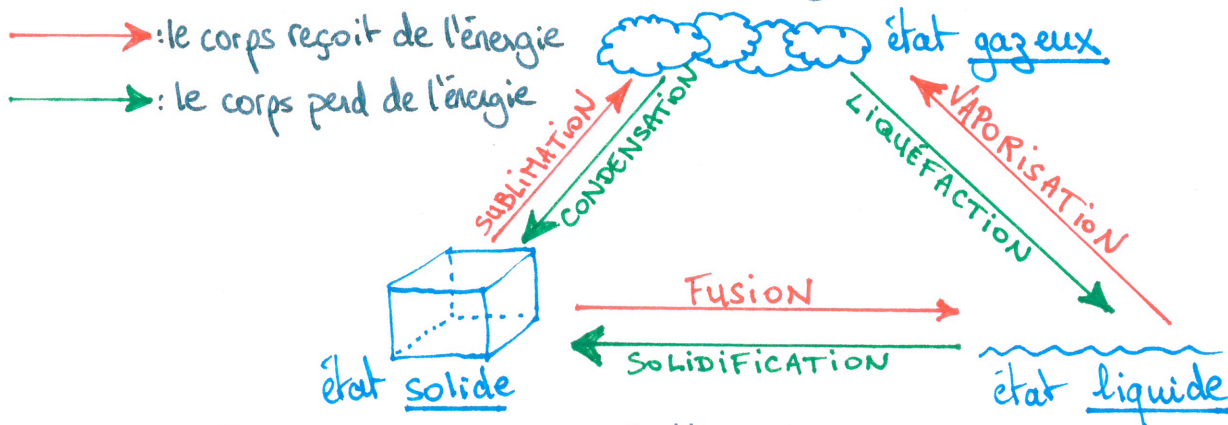
Solide Liquide Gazeux

→ entropie

Remarque : plus l'état est organisé au niveau microscopique, plus l'entropie est faible (chaos). Donc au vu de l'entropie massique, pour un même corps : $\Delta_{\text{cristal}} < \Delta_{\text{solide amorphe}} < \Delta_{\text{liquide}} < \Delta_{\text{vapeur}}$

A/ Chaleur latente de changement d'état.

Pour passer d'un état à un autre, la matière subit un changement d'état, qui pour une pression donnée se produit à une température précise (à pression atmosphérique, l'eau gèle à 0°C et s'évapore à 100°C). Voici la liste des changements d'état classiques :



Du point de vue énergétique (enthalpie), à même pression un corps pur a plus d'énergie sous forme gaz que sous forme liquide, et plus sous forme liquide que sous forme solide. Exemple de l'eau : il faut fournir de l'énergie avec un réchaud pour l'amener à ébullition et la vaporiser.

- À une pression donnée, le changement d'état se produit à une certaine température mais pas de façon instantanée. Pour l'eau dans une casserole, on peut la maintenir à 100°C plusieurs minutes avant que l'eau ne soit totalement vaporisée. Ce temps correspond à une énergie. Puisque le réchaud débite une certaine puissance thermique ϕ (supposée constante dans le temps) à la casserole, le temps τ nécessaire pour vaporiser toute l'eau comprise dans cette dernière est

$$\tau = \frac{Q}{\phi} = \frac{m \cdot q}{\phi}$$

où $Q = m \cdot q$ est l'énergie sous forme de chaleur qu'il faut fournir au liquide pour le vaporiser, on parle de chaleur latente de changement d'état. Et q est la chaleur massique latente de changement d'état, qui correspond à l'énergie à fournir pour faire changer d'état 1kg de matière.

- La transformation thermodynamique de changement d'état se passe à température (et à pression) constante(s). Si l'on note l_{ce} la chaleur massique latente de changement d'état, parfois aussi appelée enthalpie de changement d'état, alors la chaleur reçue par le corps lors du changement d'état est:

$$Q_{\text{changement d'état}} = l_{ce} \cdot m$$

↑
masse de corps pur.

La transformation est réversible, donc

$$\Delta S_{\text{changement d'état}} = \frac{dQ}{T} + dS_e = \frac{Q_{\text{changement d'état}}}{T_{\text{changement d'état}}}$$

(réversible)

donc
$$\Delta S_{\text{changement d'état}} = \frac{l_{ce} \cdot m}{T_{\text{changement d'état}}}$$

- Une dernière remarque, très importante, est que la chaleur latente de changement d'état est l'opposé de la chaleur latente de changement d'état inverse (car transformation réversible). C'est-à-dire:

$$l_{\text{sublimation}} = -l_{\text{condensation}} \quad / \quad l_{\text{fusion}} = -l_{\text{solidification}} \quad / \quad l_{\text{vaporisation}} = -l_{\text{liquéfaction}}$$

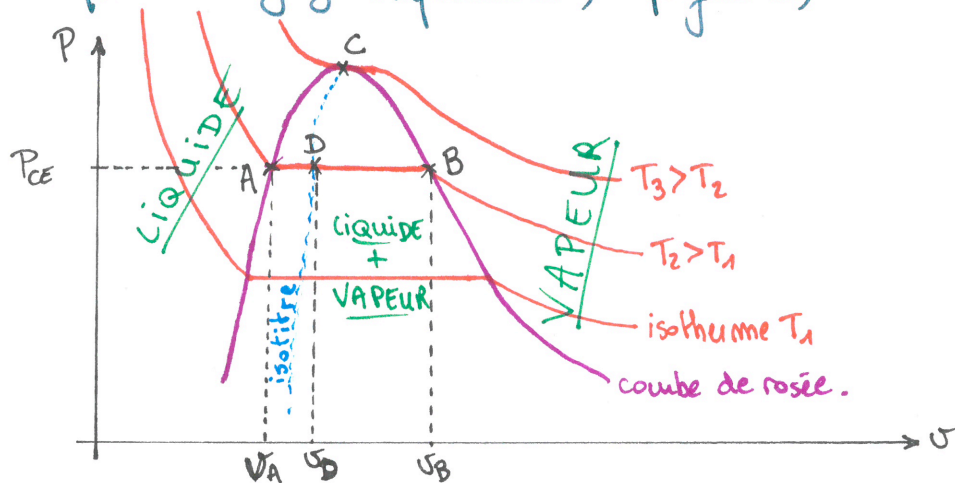
>0 <0 >0 <0 >0 <0

NB: la masse totale du corps pur se conserve (système fermé) lors du changement d'état.

B/ Diagramme P-V et courbe de rosée

Afin d'adopter une notation plus générale, on tracera à l'avenir des diagrammes P- ν où $\nu = \frac{1}{\rho}$ est le volume massique (inverse de la masse volumique), qui tomberait à l'agreg assez probablement - Tout ce qui a été dit sur le diagramme P- ν reste vrai (énergie, cycles, transformations) mais attention aux unités, il faudra multiplier par la masse.

En thermodynamique de l'ingénieur, on s'intéresse particulièrement au changement d'état liquide \leftrightarrow gaz (vaporisation, liquéfaction).



* La courbe de rosée : représente la limite entre l'état {liquide} (à gauche), l'état {liquide + vapeur} (sous la cloche, le changement d'état est "en cours") et l'état {vapeur} (à droite).

La partie gauche (avant C) est très pentue, elle est parfois modélisée comme verticale.

* Les isothermes : sont des courbes montrant la variation de pression en fonction du volume à une température donnée. À l'état liquide (à gauche de la courbe de rosée) ces droites sont quasi verticales car les liquides sont très peu compressibles : il faut une pression très grande pour faire varier faiblement le volume massique (ou la masse volumique). À l'état gazeux (à droite de la courbe de rosée), elles sont sous forme d'hyperboles et peu décroissantes, car il faut peu de pression pour faire varier le volume d'un gaz. Rappel : pour une isotherme (ici) d'un gaz parfait : $P\nu = \frac{R}{M} T$ donc ce sont des hyperboles, cqfd.

Dans la courbe de rosée, ces courbes isothermes sont des plateaux : à une température de changement d'état (T_2 par exemple) correspond une pression constante de changement d'état (P_{CE}).

★ Le point C, au sommet de la cloche de la courbe de rosée, est un point très particulier appelé point critique de changement d'état. Le corps est alors à la fois liquide et gazeux.

★ Lors du changement d'état (entre A et B) à pression et température constantes, la pression est appelée pression de vapeur saturante (ou parfois pression de liquide saturant).

- En A, le corps est totalement à l'état liquide, et entame son changement d'état. Son état est alors dit "liquide saturant" (c'est un mélange de vapeur et de liquide saturé en liquide).
- En B, le corps est totalement à l'état gazeux, et entame son changement d'état inverse. Son état est alors dit "vapeur saturante" (c'est un mélange vapeur + liquide saturé en vapeur).
- Entre A et B, en D, le corps est un mélange de vapeur et de liquide.

★ Le titre massique en vapeur correspond pendant un changement d'état (donc le corps est un mélange de gaz et de liquide) à la proportion de vapeur dans le mélange. Par exemple, en un point D entre A et B, le titre massique en vapeur $x = \frac{AD}{AB} \leq 1, x = \frac{\text{masse de vapeur}}{\text{masse totale du mélange}}$

Remarque : au point de liquide saturant (A), $x = 0$, et au point de vapeur saturante, B, $x = 1$. Donc $0 \leq x \leq 1$. Certains utilisent le titre massique en liquide $(1-x)$.

L'enthalpie en D est exprimée en fonction de l'enthalpie $h_{liq}(P_{ce}, T_2)$ du liquide à la pression de changement d'état et à la température de changement d'état, et de $h_{vap}(P_{ce}, T_2)$ l'enthalpie de la vapeur pour ces mêmes valeurs,

$$h_D(P_{ce}, T_2) = x \cdot h_{vap}(P_{ce}, T_2) + (1-x) \cdot h_{liq}(P_{ce}, T_2)$$

loi des mélanges

De même pour les énergie interne massique et entropie massique :

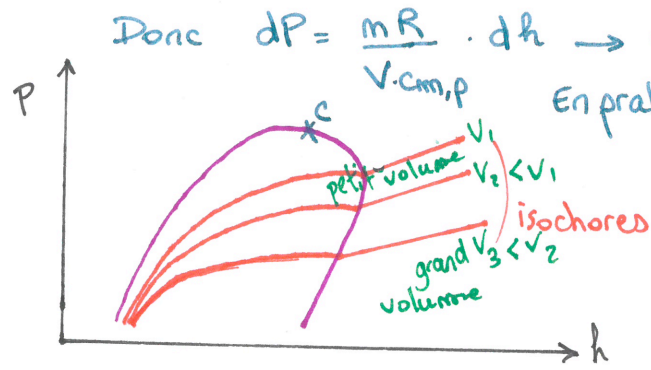
$$\begin{cases} u_D(P_{ce}, T_2) = x \cdot u_{vap}(P_{ce}, T_2) + (1-x) \cdot u_{liq}(P_{ce}, T_2) \\ s_D(P_{ce}, T_2) = x \cdot s_{vap}(P_{ce}, T_2) + (1-x) \cdot s_{liq}(P_{ce}, T_2) \end{cases}$$

Rappel : avec en notant h_{vapo} la chaleur latente massique de vaporisation, $h_{vap}(P_{ce}, T_2) - h_{liq}(P_{ce}, T_2) = \Delta h_{vaporisation} = h_{vapo} > 0$.

$$s_{vap}(P_{ce}, T_2) - s_{liq}(P_{ce}, T_2) = \Delta s_{vaporisation} = \frac{\Delta h_{vaporisation}}{T_2} = \frac{h_{vapo}}{T_2} > 0$$

★ Une courbe isotitre dans la courbe de rosée est une courbe assurant le même

★ Pour une transformation isochoire : les courbes $P(h)$ à l'état diphasique (vapeur + liquide, pendant le changement d'état) sont croissantes. Lorsque de la chaleur est apportée au mélange liquide-vapeur à volume constant, la pression augmente. Mais après le passage en état de vapeur les courbes subissent une brisure de pente et deviennent presque des droites. En effet, pour un gaz parfait (modèle de la vapeur), $PV = nRT \rightarrow V \cdot dP = nRdT$ et $dh = c_{m,p} \cdot dT$

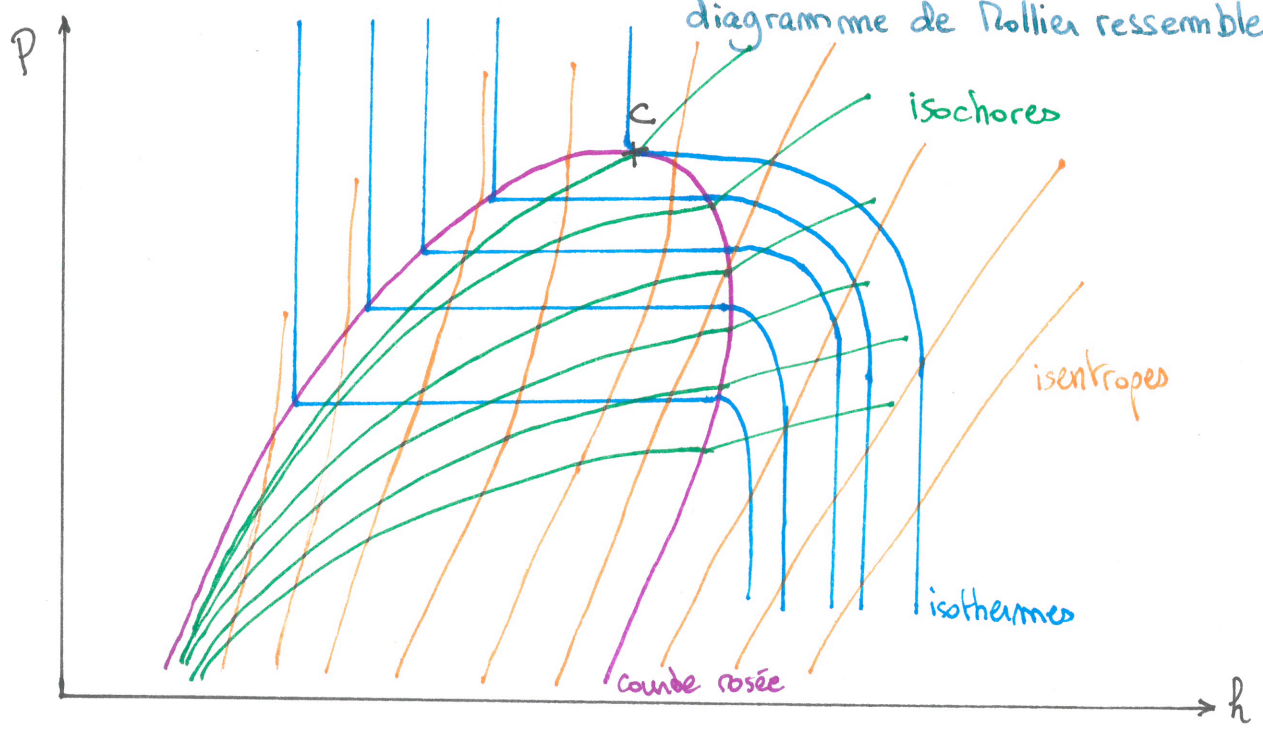


En pratique ce n'est pas exactement une droite car le modèle de gaz parfait est faux pour la vapeur. \hat{c} capacité thermique.

★ Pour une transformation isentropique : les courbes à entropie constante (donc adiabatiques - pas d'échange de chaleur avec l'extérieur - et réversibles) sont croissantes. Lorsqu'on comprime le corps, l'enthalpie (l'énergie) augmente, en l'absence de pertes (isentropique).

NB : la compressibilité est d'autant plus grande que la teneur en vapeur dans le mélange est haute. Une compression à même ΔP sera plus coûteuse énergétiquement pour une vapeur (car il faut beaucoup de déplacement) que pour un liquide. C'est contre-intuitif.

★ Pour un corps pur donné (par exemple classiquement du Fréon), le diagramme de P-h ressemblera à :



D/ Diagramme T-S (diagramme entropique)

Le diagramme de Mollier (dit aussi diagramme des frigoristes) est employé dans le référentiel STi2D et en BTS. En IUT (GMP par exemple), les étudiants utilisent plutôt le diagramme T-s (température, entropie massique). Je fais le choix de ne pas le couvrir dans ce cours, mais si cela vous intéresse, vous trouverez une présentation de ce diagramme dans le cours en ligne d'Olivier Cleynen, chapitre VIII.

3) Machines thermiques et frigorifiques.

A/ Conventions de transfert d'énergie

J'appellerai dans ce cours "machine réceptrice" une machine du type moteur, dans laquelle on injecte de la puissance sous forme thermique pour récupérer une puissance mécanique. Et les "machines frigorifiques" auront pour convention le sens de transfert de puissance inverse.

★ Pour une machine réceptrice : le principe de Thomson-Kelvin

nous apprend qu' "on ne peut réaliser une machine motrice avec une seule source de chaleur". (Machine réceptrice = machine motrice).

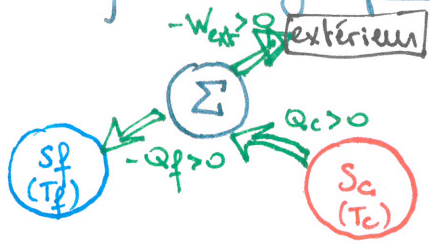
En effet, toute machine qui échange avec une source de chaleur subit lors de cet échange une transformation à température constante :

<p>au niveau d'une source de chaleur, $dS = \delta q^c + \delta q^e = \delta q^c + \frac{\delta Q}{T_{source}} \leq \frac{\delta Q}{T_{source}}$</p> <p>avec T_{source} température de la source, supposée constante.</p>	<p>↑ variation d'entropie</p> <p>↑ entropie créée ≥ 0</p> <p>↑ entropie échangée avec la source.</p>
---	--

Or, une machine thermique (quelle qu'elle soit) fonctionne en faisant faire des cycles thermodynamiques à un fluide. Très important, au cours d'un cycle, les variables d'état changent, mais puisqu'un cycle est quelque chose de "répétable", les variables d'état à la fin d'un cycle sont égales à celles au début du cycle. Donc puisque les fonctions d'état U, H, S ne dépendent que des variables d'état (donc de l'état dans lequel se trouve le système, et pas du cycle qu'il a suivi pour en arriver là), alors entre le début et la fin

d'un cycle thermodynamique, $\Delta U_{cycle} = 0 ; \Delta H_{cycle} = 0 ; \Delta S_{cycle} = 0$

Si l'on note Σ la machine motrice, S_f une source froide de température constante T_f et S_c une source chaude de température constante $T_c > T_f$, alors le schéma des transferts d'énergie par cycle est:



La machine prend de l'énergie à la source chaude, en donne à la source froide, sous forme de chaleur, et fournit du travail à l'extérieur.

→ Au cours de chaque cycle, les échanges d'énergie reçue par le système sont : $W_{ext} + Q_f + Q_c$: énergie reçue par cycle par le système.

Or $\Delta U_{cycle} = 0$ (car cycle \Rightarrow état d'origine = état final).

Donc le premier principe de la thermodynamique donne $W_{ext} + Q_f + Q_c = \Delta U = 0$

D'autre part, le deuxième principe de la thermodynamique donne : $\Delta S_{cycle} = 0 = \underbrace{S_{cycle}^c + S_{cycle}^e}_{\Delta S_{cycle}^c} = \underbrace{S_{cycle}^c}_{\Delta S_{cycle}^c} + \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \geq \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c}$

donc $\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \leq 0$ avec égalité stricte si, et seulement si $S_{cycle}^c = 0$ si, et seulement si échanges et transformations réversibles.

Remarque : S'il n'y a qu'une seule source de chaleur, S_c , alors $\Delta S_{cycle} = 0 = S_{cycle}^c + \frac{Q_c}{T_c}$ donc $\frac{Q_c}{T_c} \leq 0$, or le 1^{er} principe donne $W_{ext} + Q_c = \Delta U_{cycle} = 0 \Rightarrow W_{ext} = -Q_c = 0$
↳ = ssi réversible
on retrouve le principe de énoncé précédemment.

→ Pour les machines réceptrices (ou motrices) on s'intéressera au rendement η défini comme le rapport de la puissance mécanique fournie par le système sur la puissance thermique effective reçue. Si l'on note N le nombre de cycles thermodynamiques effectués par unité de temps, alors

$$\eta = \frac{P_{méca \text{ fournie}}}{\Phi_{thermique \text{ reçue effective}}} = \frac{-W_{cycle} \cdot N}{Q_{reçue} \cdot N} = \frac{-W_{ext}}{Q_c} = \eta (< 1)$$

En pratique le rendement ne peut pas atteindre 1, il est limité à un rendement maximum dit rendement de Carnot :

- le premier principe de la thermodynamique donne $\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = Q_c + Q_f + W$
donc $\eta = -\frac{W_{\text{ext}}}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$.

- le second principe donne $\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \leq 0$ ^{= ssi réversible} donc $\frac{Q_f}{Q_c} \leq -\frac{T_f}{T_c}$

d'où $\eta = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} \leq 1 - \frac{T_f}{T_c} < 1$, donc $\eta \leq \eta_{\text{Carnot}}$ avec $\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$
^{= ssi réversible} $\eta \leq \eta_{\text{Carnot}}$ avec $\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$
^{= ssi réversible.}

★ Pour une machine frigorifique (ou absorbant la puissance mécanique).
 Avec les notations précédentes,



Contrairement au cas précédent où l'on laissait la chaleur transiter naturellement depuis le chaud vers le froid, ici on utilise une énergie mécanique sous forme de travail pour forcer la source froide à donner de la chaleur au système, qui la rejette dans la source chaude.

Pour un frigo ou un climatiseur par exemple, l'intérieur est la source froide, l'extérieur la source chaude, et l'on pompe de la chaleur à la source froide pour diminuer encore sa température.

Remarque : une pompe à chaleur fonctionne sur le même schéma d'échanges énergétiques. Mais elle présente l'avantage d'être réversible : la source chaude peut indifféremment être l'intérieur ou l'extérieur. Elle permet donc de refroidir l'intérieur (source froide) en été, et de le réchauffer (source froide = extérieur) en hiver.

→ Pour les machines frigorifiques, on s'intéressera à l'efficacité e définie comme le rapport de la puissance thermique utile sur la puissance mécanique fournie au système. Avec N le nombre de cycles par unité de temps,

$$e = \frac{P_{\text{thermique utile}}}{P_{\text{méca reçue par système}}} = \frac{Q_{\text{resue utile}} \cdot N}{W_{\text{cycle}} \cdot N} = + \frac{Q_{\text{utile}}}{W_{\text{ext}}} = e$$

J'insiste sur la notation chaleur utile, car

- pour une climatisation, un frigo ou une pompe à chaleur en mode refroidissement de l'intérieur, la chaleur utile est la chaleur Q_f échangée avec la source froide.

- pour une pompe à chaleur en mode chauffage de l'intérieur, la chaleur utile est la chaleur $-Q_c$ échangée avec la source chaude (maison).

• Pour un frigo ou une climatisation, le 1^{er} principe de la thermodynamique s'écrit $W_{ext} + Q_c + Q_f = 0$, donc $e = \frac{Q_f}{W_{ext}} = \frac{Q_f}{-Q_c - Q_f} = -\frac{1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}}$

C'efficacité ne peut pas être infinie, elle est majorée par e_{max} , en effet le 2^{ème} principe de la thermodynamique s'écrit $\Delta S_{cycle} = 0 = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f}$

Donc $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$ donc $\frac{Q_c}{Q_f} \leq -\frac{T_c}{T_f}$,
 \uparrow ssi réversible

D'où $e = -\frac{1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}} \leq -\frac{1}{1 - \frac{T_c}{T_f}} = \frac{T_f}{T_c - T_f} = e_{max}$

• Pour une pompe à chaleur en mode chauffage, le 1^{er} principe de la thermodynamique donne $e = -\frac{Q_c}{W_{ext}} = \frac{Q_c}{Q_c + Q_f} = \frac{1}{1 + \frac{Q_f}{Q_c}}$

Le second principe donne $\frac{Q_c}{T_c} \geq -\frac{Q_f}{T_f}$ donc $\frac{Q_f}{Q_c} \leq -\frac{T_f}{T_c}$.
 \uparrow ssi réversible

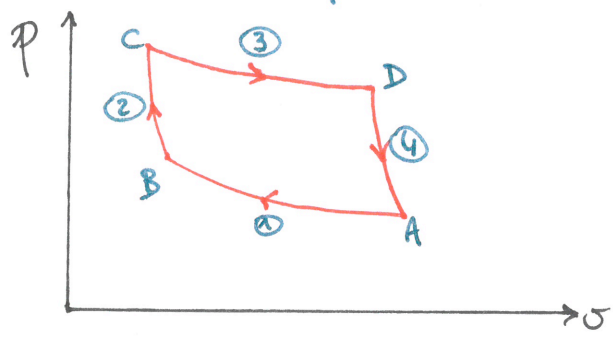
D'où $e = \frac{1}{1 + \frac{Q_f}{Q_c}} \leq \frac{1}{1 - \frac{T_f}{T_c}} = \frac{T_c}{T_c - T_f} = e_{max}$

Ordres de grandeur : en général, pour les frigos ou les climatisations, les efficacités sont entre 10 (très moyen) et 20, de ce que j'ai vu jusqu'ici.

3/ Exemple d'une machine réceptrice : la machine de Carnot

Le cycle de Carnot permet, depuis deux sources de chaleur (une chaude, une froide, moteur dittherme) de faire subir à un fluide un cycle thermodynamique en quatre étapes réversibles : ① on comprime le gaz de manière lente, entre A et B, la compression est donc supposée isotherme. ② on comprime alors violemment le gaz, tellement vite qu'aucun échange de chaleur n'a le temps de se produire. Cette seconde compression est donc adiabatique (et puis qu'elle est réversible, elle est isentropique = adiabatique et réversible).

③ Le gaz peut alors se détendre lentement (détente réversible isotherme), et
 ④ enfin il se détend brutalement jusqu'à sa pression initiale, et revient à l'état A.
Rmq: En général la pression initiale correspond à la pression atmosphérique. Vient alors une étape dite de refoulement: une détente isobare qui revient à vider l'air compris dans une chambre, et réinjecter de l'air nouveau.



- lors des ^{compression} détente isothermes, le gaz supposé parfait est décrit par $PV = \frac{R}{n} T_0$
 $\rightarrow P = \frac{cste}{V}$.
↑ constante pour une isotherme
- lors des ^{compression} détente isentropique, le gaz supposé parfait est décrit par $PV^\gamma = cste'$
 $\rightarrow P = \frac{cste'}{V^\gamma}$.

Le fluide (gaz, qui ne change pas d'état) travaille pendant toutes les étapes du cycle (W_1 et $W_2 > 0$, lors d'une compression on fournit du travail au gaz, W_3 et $W_4 < 0$, lors d'une détente, le gaz fournit du travail vers l'extérieur). Mais il n'échange de la chaleur que lors des étapes isothermes (③ échange avec la source chaude, ① échange avec la source froide), puis que les étapes ② et ④ sont adiabatiques \rightarrow pas d'échange de chaleur avec l'extérieur.

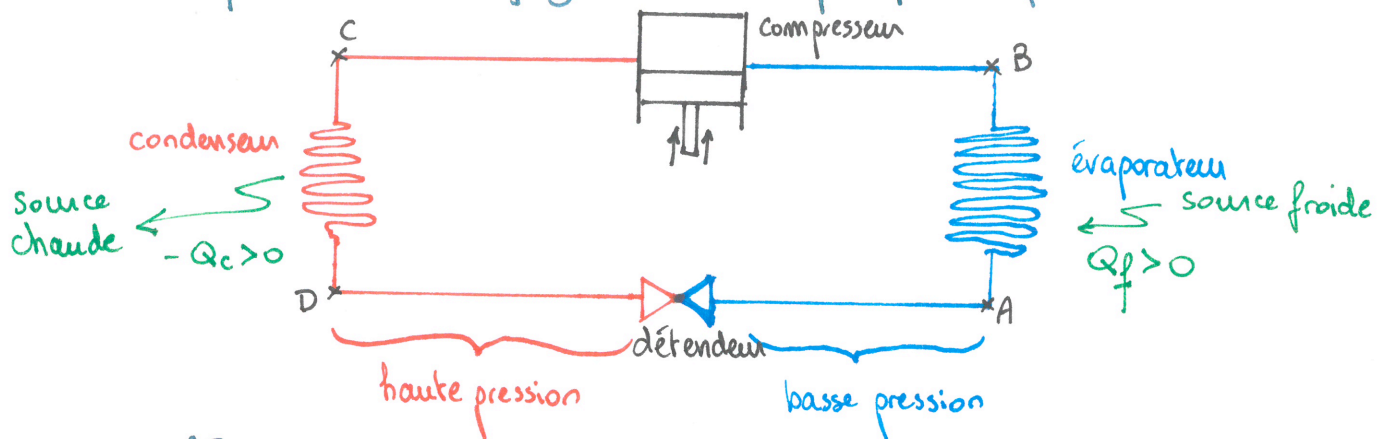
On peut montrer que le rendement de ce cycle est $\eta = \eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$, c'est donc le cas d'égalité dans l'inégalité de Carnot: ce cycle est celui qui offre le plus haut rendement théorique possible puisque toutes les étapes sont réversibles (aucune perte, aucune dissipation), et c'est le seul à atteindre la limite du rendement de Carnot.

Pour les cycles réels (celui-ci est évidemment impossible à mettre en œuvre techniquement, il y a toujours des frottements), $\eta < \eta_{Carnot}$.

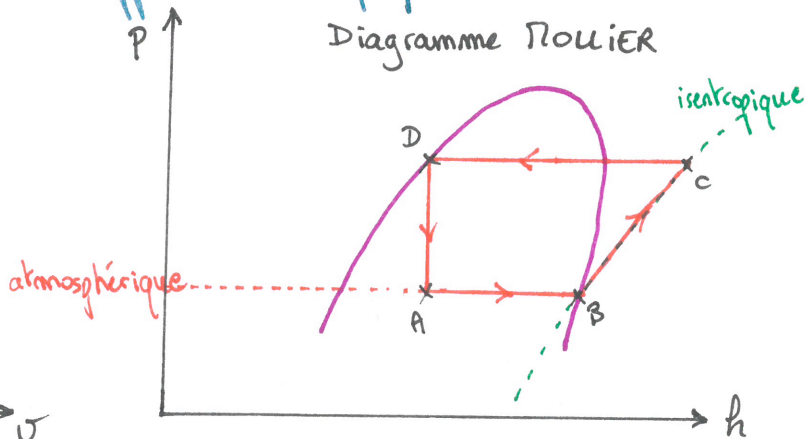
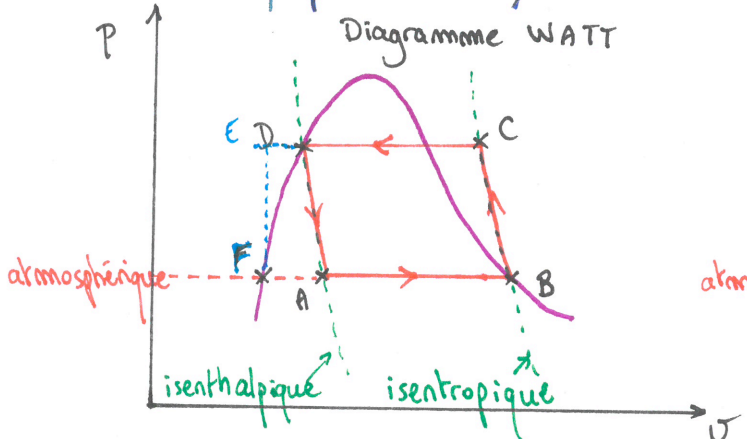
Pour s'entraîner: Je vous recommande de traiter les exercices classiques du moteur Stirling, qui revient à la mode avec les énergies solaires/thermiques, le moteur Diesel à injection (classique, est déjà tombé plusieurs fois en examen lors d'études de moteurs) et en dernier le moteur à essence, dit Beau de Rochas - Bon travail à vous.

C/ Exemple d'une machine frigorifique

Le fréon dans un frigo subit un cycle que l'on peut schématiser ainsi :



- AB : en A (pression atmosphérique) le fluide est vaporisé dans l'évaporateur. Il change d'état et "prend" l'équivalent de sa chaleur latente de changement d'état à la source froide. En A, le corps est diphasique : mélange liquide + vapeur.
- BC : Il est alors comprimé rapidement (c'est un gaz, ^{en sortie de compresseur, en B} 100% à l'état de vapeur) dans le compresseur. La compression est rapide donc supposée adiabatique et on la suppose réversible. Elle est donc isentropique.
- CD : La vapeur est condensée et retourne à l'état liquide. Elle cède alors l'énergie latente de changement d'état à la source chaude.
- DA : Enfin, le liquide (100%) qui sort du condenseur est détendu, sa pression diminue et revient à pression atmosphérique. La détente, quant à elle, est supposée isenthalpique.



Remarque : comme on n'étudie que des fonctions d'état, qui ne dépendent pas du "chemin suivi" pour aller d'un état à l'autre, il est courant (et il faudrait le faire si la question est posée) de séparer la détente isenthalpique DA en une transformation isobare DE puis une détente isochore EF et enfin une transformation (changement d'état) FA. On aurait alors :

$$\Delta S_{DA} = \Delta S_{DE} + \Delta S_{EF} + \Delta S_{FA}; \quad \Delta H_{DA} = 0 = \Delta H_{DE} + \Delta H_{EF} + \Delta H_{FA}, \dots$$

Pour s'entraîner : Je vous recommande vivement de traiter un sujet entre le climatiseur ou la machine frigorifique, complet (calcul d'efficacité). Cela vous fera travailler tout le 1^{er} cours également.

Pour approfondir, vous pouvez traiter des exercices sur les pompes à chaleur.

Pour les exercices, vous en trouverez en annexe, mais je vous conseille de traiter aussi (voire plutôt) ceux du cours en ligne d'Olivier Cleynen (ariadacepo). Bon courage pour les écrits et les oraux!

Janis BERNARD.

Ouf! cette partie est beaucoup plus simple que les deux précédentes, et est complètement distincte. Vous allez pouvoir souffler.

1) Échanges de chaleur

La chaleur peut être échangée entre deux systèmes de trois façons différentes :

- par conduction : c'est la voie la plus lente en général. Lorsque deux corps ont des niveaux énergétiques thermiques (comprendre "températures") différents, l'énergie se propage sous forme de chaleur en passant au travers du milieu qui les sépare.

Ex : lorsque vous approchez votre main d'une casserole, par le côté, pour sentir si elle est chaude sans la toucher (en faisant votre main à un centimètre), c'est la conduction à travers l'air qui chauffe votre main.

- par convection : il s'agit du transfert thermique par mouvement de particules fluides entre des zones de niveaux énergétiques différents.

Dans les technologies applicatives, on compte deux types de "convections" différentes : * la convection naturelle : au dessus d'une flamme ou d'un radiateur, il y a des recirculations d'air. En effet, l'air chauffé par

la source voit sa masse volumique réduite (l'air décroît avec la température car le gaz se dilate : volume \uparrow , masse constante $\rightarrow \rho \downarrow$) donc les zones chauffées remontent pour assurer l'équilibre, emmenant de la chaleur avec elles.

* la convection forcée : on ajoute une source de flux de fluide.

Par exemple, les chauffages constituent d'une résistance placée devant un ventilateur.

- par rayonnement : transfert thermique qui n'a pas besoin de "porteurs de calories" (particules, substance). La chaleur est transmise par ondes électro-magnétiques ayant pour origine l'agitation thermique superficielle du corps émetteur.

Ex : Entre le soleil et la Terre il y a du vide. Il ne peut donc pas y avoir de conduction (nécessite un corps pour transmettre la chaleur) ni de convection (nécessite un fluide porteur). Toute la chaleur reçue par le soleil a été rayonnée.

- Notez qu'il est également possible d'échanger de la chaleur par changement de phase : la chaleur latente (une pression, une température donnée) est l'énergie nécessaire pour faire passer une unité de masse d'un état à un autre. En cas de changement d'état / de phase, une chaleur est émise (positivement ou négativement).

2) Conduction

La conduction est le mode de transfert de chaleur le plus aisé à décrire mathématiquement. Je suis sûr que vous l'avez déjà vu et revu dans vos études antérieures. Je dégage ici le plus important. Sachez toutefois que ces démonstrations sont à connaître, je pense que c'est exigible en coordonnées cartésiennes au moins!

A/ Flux

Avant d'attaquer les équations de la conduction à proprement parler, il faut définir une grandeur qui nous sera utile jusqu'à la fin de cette partie, la notion de flux.

- Le flux total: lorsque de la chaleur passe d'un corps à un autre, c'est une énergie qui est transférée. La quantité d'énergie par seconde est logiquement en Watts, et si Q est l'énergie, par exemple, reçue par un corps, alors ce corps fournit à l'extérieur une puissance $\phi = \frac{dQ}{dt}$, autrement nommée flux total.

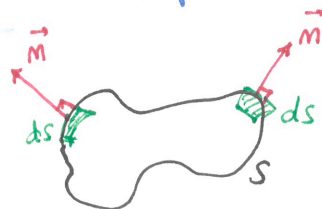
Pour faire une analogie avec un réservoir d'eau (la masse d'eau correspond ici à de l'énergie), le débit entrant $Q_{flow} = \frac{dVolume}{dt}$ correspondrait au flux total.

- La densité de flux: Nous le verrons par la suite, le flux total ne nous intéresse pas beaucoup dans les dimensionnements. En effet, en reprenant l'analogie du réservoir d'eau, imaginons que celui-ci soit déversé dans deux canaux, un large et un très étroit. Alors le débit dans le petit canal est faible comparé à celui dans le grand canal. Il convient donc de définir un flux par canal et non un flux total dans les deux canaux. Si l'on raisonne maintenant sur un cas continu et non discret, le flux de chaleur peut par endroits passer facilement, par d'autres (isolants) très difficilement. On définit alors la densité de flux thermique au point M ,

$\vec{\Phi}_s(M, t) \equiv \frac{d\phi}{ds}(M, t)$: vous pensez "oui, mais ϕ ne dépend que du temps, pas de l'emplacement!". Certes, mais ds dépend du point (ds est un élément de surface).

→ Vous pouvez définir n'importe quelle surface S fermée englobant la source de chaleur, vous avez alors $\phi = \iint_S \vec{\Phi}_s \cdot d\vec{s}$, où $d\vec{s} = \vec{n} \cdot ds$ est le vecteur de norme : un élément de surface, et dirigé par le vecteur \vec{n} unitaire, normale sortante à la surface, au point considéré.

(plus proprement, $\phi(t) = \iint_S \vec{\Phi}_s(M, t) \cdot d\vec{s}(M, t)$).

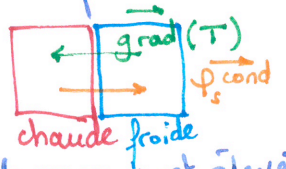


Cette dernière formule est la véritable façon de définir la densité surfacique de flux thermique. Vous notez que ce flux est un vecteur et non un scalaire. En effet, la chaleur peut être vu comme un écoulement de calories (chaque calorie correspondant à une particule dotée d'une énergie thermique), et le flux serait alors relatif à la vitesse locale des calories : plus elles vont vite, plus le flux est élevé, c'est le côté scalaire, mais l'orientation du vecteur vitesse joue aussi un rôle. On voit bien en dessinant un contour fermé que si $\vec{\Phi} \cdot d\vec{s}$ est nul, c'est peut être parce que les calories se déplacent parallèlement à la surface, ^{donc perpendiculairement à sa normale} et donc qu'aucune ne sort, donc cette part de flux, aussi rapide soit-elle, ne joue aucun rôle dans Φ le gain/la perte totale d'énergie.

B/ Loi de Fourier et équation différentielle de la conduction

La loi de Fourier est une loi initialement expérimentale mais qui coule de source, qui nous raconte que la densité surfacique de flux de conduction, $\vec{\Phi}_s^{cond}$ est proportionnelle au gradient de température, et est orienté en sens inverse à ce gradient.

Imaginons deux particules microscopiques accolées, l'une est plus chaude que l'autre :



le gradient de température pointe vers les maximums locaux de température, et est d'autant plus grand que les écarts locaux sont élevés, alors que le flux cherche à uniformiser la température.

→ Donc il existe un facteur positif, dit "conductivité thermique" λ , tel que

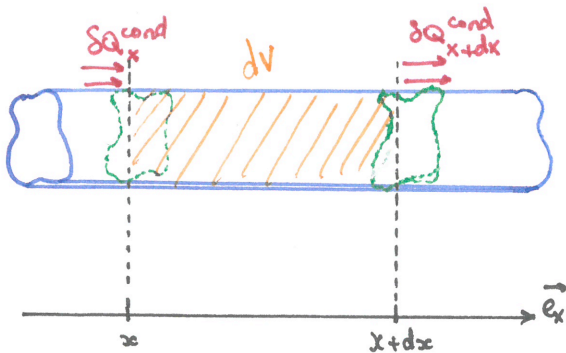
$$\vec{\Phi}_s^{cond} = -\lambda \cdot \vec{grad}(T)$$
 Loi de Fourier avec $\begin{cases} [\Phi] \text{ en } W/m^2 \\ [\lambda] \text{ en } W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1} \end{cases}$

Imaginons désormais un matériau solide indéformable, homogène, isotrope, de dilatation volumique négligeable (son volume ne varie pas lorsque l'on change la température), de grandeurs caractéristiques physiques constantes. On suppose qu'il existe dans ce matériau des sources internes de chaleur distribuées uniformément, définies par leur puissance volumique locale en tout point : $S(M, t)$.

→ Nous allons à la page suivante démontrer l'équation de la conduction :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T + \frac{S}{\rho \cdot c_{m,P}}$$
 équation de la conduction avec $\begin{cases} a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_{m,P}} \text{ diffusivité thermique} \\ (\rho = \text{masse volumique}) \end{cases}$

Notez qu'il est selon moi important que vous sachiez démontrer cette formule, au moins sous le terme source. Je pense qu'il y a des risques pour qu'on vous la demande en cartésien uni-axial, voire peut-être en coordonnées cylindriques (si vous voulez la démonstration en cylindrique on la trouve sur internet, ou vous pouvez me demander par mail).



Notons dV la portion de volume comprise entre les tranches x et $x+dx$. Supposons que la section ne dépende pas de x , et soit constante, notée A . On suppose également que la température ne varie qu'avec x .

⚠ En démonstration en cartésien, A est constant, si la démo est en cylindrique ou sphérique, dV est le volume compris entre deux cylindres coaxiaux de rayons r et $r+dr$ (respectivement deux sphères concentriques), et l'aire des deux cylindres (respectivement sphères) est différente! piège!

A/ Nous allons écrire la conservation de l'énergie dans ce volume fermé dV :

La variation d'énergie ne se fait que par transfert de chaleur, et le δQ_{total} est la somme de la chaleur reçue par conduction et de la chaleur créée par les sources internes.

$$\delta Q_{total} = \delta Q_{conduction} + \delta Q_{source}$$

* D'une part, $\delta Q_{total}^{conduction} = \delta Q_x^{cond} + \delta Q_{x+dx}^{cond}$

En un x fixé, on a vu que $\delta Q = \phi \cdot dt$ avec $\phi = \iint_A \vec{\Phi}^{cond} \cdot d\vec{s}$ avec $d\vec{s}$ orientée par la normale. donc $\delta Q_x^{cond} = \left(\iint_{A_x} \vec{\Phi}_x^{cond} \cdot d\vec{s} \right) dt$ avec $d\vec{s} = dt \cdot x \cdot (+\vec{e}_x)$ on parle de chaleur reçue donc la normale doit pointer vers le volume.

et $\delta Q_{x+dx}^{cond} = \left(\iint_{A_{x+dx}} \vec{\Phi}_{x+dx}^{cond} \cdot d\vec{s} \right) dt$ avec $d\vec{s}$ porté cette fois par $-\vec{e}_x$ (chaleur reçue)

d'où $\delta Q_{total}^{conduction} = A \cdot dt \cdot (\Phi_x^{cond} - \Phi_{x+dx}^{cond})$.

Rappel : pour deux points proches, le développement de Taylor s'écrit $\Phi_{x+dx}^{cond} = \Phi_x^{cond} + \frac{\partial \Phi_x^{cond}}{\partial x} dx$ au premier ordre.

Ainsi : $\delta Q_{total}^{conduction} = A \cdot dt \cdot \left(- \frac{\partial \Phi_x^{cond}}{\partial x} \right) \cdot dx$

* D'autre part, $\delta Q_{source} = S \cdot dV \cdot dt$ (S : puissance volumique des sources internes).

avec $dV = A \cdot dx$, donc $\delta Q_{total} = A \cdot dt \cdot \left[- \frac{\partial \Phi_x^{cond}}{\partial x} + S \right] dx$

B/ Puisque tous les échanges sont sous forme de chaleur, la transformation est réversible

On se souvient qu'alors $dH = \delta Q_{rev}^{total}$ entre deux temps successifs.

$dH = H(t+dt) - H(t) = \frac{\partial H}{\partial t} \cdot dt$ avec $\partial H = C_p \cdot \partial T$ et $C_p = dm \cdot c_{m,p} = \rho \cdot dV \cdot c_{m,p}$

d'où $\delta Q_{total} = \rho \cdot A \cdot dx \cdot c_{m,p} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt = \rho \cdot A \cdot dx \cdot c_{m,p}$

C/ On égalise et on simplifie par $A \cdot dx \cdot dt$, et on obtient: $S - \frac{\partial \Phi_x^{cond}}{\partial x} = \rho \cdot c_{m,p} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$

D/ Finalement, on utilise la loi de Fourier :

$$\frac{\partial \Phi_x^{cond}}{\partial x} = -\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\lambda \cdot \Delta T$$

Finalement, on obtient l'équation de la conduction: $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_{m,p}} \Delta T + \frac{S}{\rho \cdot c_{m,p}}$

Ceci se généralise, par superposition, aux trois dimensions de l'espace cartésien, où ΔT est alors le Laplacien de la grandeur scalaire T.

C/ Résistance thermique

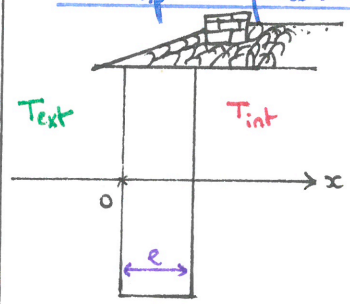
Voilà LA notion qui à mon avis a le plus de chances de tomber à l'écrit. On raisonne ici avec une analogie à l'électronique:



{ potentiel : ohm : $\Delta V = R \cdot I$ ↔ { température : analogie $\Delta T = R_{th} \cdot \Phi$
{ courant ↔ { $\Phi = \iint \vec{\Phi} \cdot d\vec{S}$

On cherche alors une résistance thermique telle que $\Delta T = R_{th} \cdot \Phi$ avec $[R_{th}] = \frac{K}{W}$.

L'exemple le plus simple et que vous devez connaître par cœur est celui d'un mur unique:



Soit un mur d'épaisseur e, de surface S, séparant "dehors" (de température T_{ext}) de "dedans" (T_{int}), et dont la conductivité thermique est λ . Le problème est considéré uniaxial selon x, et stationnaire (il n'y a pas d'évolution temporelle de la température).

→ l'équation de la conduction, sans sources internes, s'écrit alors simplement $\Delta T = 0$

Soit $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$, donc $T(x) = A \cdot x + B$. Les conditions limites* s'écrivent $\begin{cases} T(0) = T_{ext} \\ T(e) = T_{int} \end{cases}$

donc $B = 0$ et $A = \frac{T_{int} - T_{ext}}{e}$, donc $T(x) = (T_{int} - T_{ext}) \cdot \frac{x}{e}$

→ Or, $\vec{\Phi}^{cond} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x = -\lambda A \cdot \vec{e}_x = -\frac{\lambda}{e} \cdot (T_{int} - T_{ext}) \cdot \vec{e}_x$

→ Donc $\Phi = \iint_S \vec{\Phi}^{cond} \cdot d\vec{S}$ avec $d\vec{S}$ orienté suivant $-\vec{e}_x$ (du chaud vers le froid si jamais vous ne savez pas dans quel sens l'orienter).

c'est-à-dire $\Phi = \frac{\lambda \cdot S}{e} \cdot (T_{int} - T_{ext})$, et ainsi $R_{th} = \frac{e}{\lambda \cdot S}$ pour un mur.

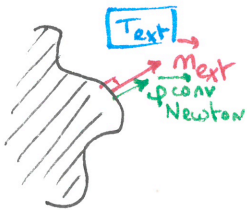
NOTE: Si deux murs sont collés l'un à l'autre, la résistance équivalente est celle de deux résistances en série (car le flux les parcourt l'une puis l'autre). Si deux murs sont côte à côte, séparant l'extérieur du même intérieur, les résistances sont en parallèle.

* $T = T_{imposée}$ est une condition limite de Dirichlet, alors que $\Phi = \Phi_{imposé} = \frac{\partial T}{\partial x}$ est une condition de Neumann. Possible seulement si convection!

3) Convection A/ Loi de Newton

Vaste et complexe sujet, la convection peut généralement être modélisée par une loi simplifiée qui se ramènera à une condition limite de Neuman (flux surfacique $\vec{\Phi}_{total}$ imposé). Vous n'aurez jamais d'exercice de convection pure je pense, par contre de la conducto-convection oui ($\vec{\Phi}_{total} = \vec{\Phi}_{cond} + \vec{\Phi}_{conv}$).

Une loi encore plus simple et que je vais vous demander d'apprendre est celle de Newton (expérimentale), qui approxime le flux convectif à la surface d'un corps



par :
$$\vec{\Phi}_{conv}^{Newton} = h \cdot (T_{corps} - T_{ext}) \cdot \vec{m}_{ext}$$

avec h coefficient de conducto-convection de Newton, ou coefficient de transfert thermique.

Autrement dit la densité efficace de flux thermique sortant d'un corps plongé dans un fluide est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le fluide, et est portée par la normale sortante à la surface du corps.

Note 1: le facteur h est lié au couple fluide - solide. Il dépend de la rugosité du corps, de la vitesse moyenne du fluide, etc. On le trouve en abaques h = fonction (T_{fluide})

Note 2: Attention à la direction, si la normale est sortante, c'est T_{corps} - T_{ext} et non le contraire. Pensez que si le corps est plus chaud que le fluide, le flux doit être dirigé vers l'extérieur (T_{corps} - T_{ext} > 0).

Note 3: Il n'y a que de la conduction dans le corps, donc $\vec{\Phi}_{total} = \vec{\Phi}_{cond}$, et à la surface, le modèle de Newton compte pour la conduction et la convection $\vec{\Phi}_{total} = \vec{\Phi}_{Newton}$. La condition limite est un raccord entre ces flux.

Note 4: si vous tombez sur des géométries type cylindre / sphère, la façon de faire est la suivante: calculez ϕ sur la périphérie du corps. ϕ est une constante qui ne dépend pas du rayon. Donc si $\vec{\Phi}_{cond}$ dans le corps est radial, $\vec{\Phi} \cdot d\vec{S} = \phi \cdot dS$ (que vous prenez des sphères concentriques ou des cylindres coaxiaux, \vec{e}_r et $\vec{\Phi}$ seront colinéaires). Alors $\phi \propto \Phi \cdot S$ avec $S \propto r^2$ pour une sphère et $S \propto r$ pour un cylindre, donc $\phi \propto \frac{1}{r^2}$ pour une sphère et $\phi \propto \frac{1}{r}$ pour un cylindre. A vous de trouver le facteur de proportionnalité avec une condition limite.

B/ Résistance thermique

(41)

La loi de Newton a l'avantage de nous permettre d'exprimer la résistance thermique facilement (elle se met alors en série de la résistance de conduction).

On reprend l'exo classique du mur.

Cette fois il y a de la convection côté extérieur et intérieur. On note :

- T_{ext} la température à $x \rightarrow -\infty$.
- T_{pe} la température de la paroi à $x=0$, le côté mur extérieur.
- T_{pi} la température de la paroi intérieure à $x=e$.
- T_{int} la température de l'intérieur, $x \rightarrow +\infty$.

On note h_{ext} le coefficient de conducto-convection de l'air extérieur et h_{int} à l'intérieur. On se place en régime permanent (sans source, donc la température croît linéairement à l'intérieur du mur, et la résistance thermique est connue).

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Newton donne : en } x=0 \quad \vec{\phi}_{ext} &= -h_{ext} (T_{pe} - T_{ext}) \cdot \vec{e}_x \\ \text{en } x=e \quad \vec{\phi}_{int} &= h_{int} (T_{pi} - T_{int}) \cdot \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{On a calculé tout à l'heure que dans le mur, } \vec{\phi}^{cond} = -\frac{\lambda}{e} (T_{pi} - T_{pe}) \cdot \vec{e}_x$$

\rightarrow On sait que partout le flux total $\phi = \vec{\phi}_{ext} \cdot S \cdot (-\vec{e}_x) = \vec{\phi}^{cond} \cdot S \cdot (\vec{e}_x) = \vec{\phi}_{int} \cdot S \cdot (\vec{e}_x)$ est conservé. Or la section reste constante et le calcul intégral est simple car nous supposons le problème unidimensionnel.

$$\text{On obtient } S \cdot h_{ext} \cdot (T_{pe} - T_{ext}) = S \frac{\lambda}{e} \cdot (T_{pi} - T_{pe}) = h_{int} \cdot (T_{int} - T_{pi}) S$$

$$\text{On en déduit } \begin{cases} T_{pe} = \frac{e \cdot h_{ext} \cdot h_{int} \cdot T_{ext} + (h_{ext} \cdot T_{ext} + h_{int} \cdot T_{int}) \cdot \lambda}{\lambda \cdot (h_{ext} + h_{int}) + e \cdot h_{int} \cdot h_{ext}} \\ T_{pi} = \frac{e \cdot h_{ext} \cdot h_{int} \cdot T_{int} + (h_{ext} \cdot T_{ext} + h_{int} \cdot T_{int}) \cdot \lambda}{\lambda \cdot (h_{ext} + h_{int}) + e \cdot h_{int} \cdot h_{ext}} \end{cases}$$

Désolé ce calcul n'avait aucun intérêt. On remarque que $T_{pe} - T_{ext} = \frac{1}{S \cdot h_{ext}} \phi$ (depuis la formule encadrée en rouge) et $T_{int} - T_{pi} = \frac{1}{S \cdot h_{int}} \phi$.

Donc, une résistance de convection, pour le mur unidimensionnel, est

$$R_{th} = \frac{1}{h \cdot S} \quad \text{Et la résistance totale du mur est } R_{mur} = \left[\frac{1}{h_{ext} \cdot S} + \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h_{int} \cdot S} \right]$$

La suite classique est le double vitrage, qui n'est ni plus ni moins que deux "R_{mur}" en série séparés par une couche d'air conductrice. Donc

$$R_{double\ vitrage} = R_{mur} + R_{air}^{conduction} + R_{mur} \quad (\text{où "mur" désigne une vitre})$$

* Rémo technique: quand vous ne savez pas comment orienter \vec{dS} pour calculer ϕ , il faut qu'il pointe du chaud vers le froid.