Exercice 1

Soit $f \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} y^2 \sin(x/y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$.

Prouver que f est continue. Déterminer le plus grand sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est $\mathcal{C}^1$. f est-elle $\mathcal{C}^2$ sur Ω ?

Exercice 2

Soit $f \left\{ \begin{array}{l} [0,1]^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x - y + x^3 + y^3 \end{array} \right.$. Prouver que g possède un minimum et un maximum, les déterminer.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3, f(x+t, y+t) = f(x,y)$. Donner une équation aux dérivées partielles vérifiée par f. La résoudre en utilisant le changement de variables $u = x+y, v = x-y$ et conclure.

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, soit $b \in \mathbb{R}^n$, soit $c \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\varphi \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (Ax, x) + (b, x) + c \end{array} \right.$. Prouver que φ est différentiable en tout point, calculer sa différentielle.
2. Soit $\psi \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \exp(\varphi(x)) \end{array} \right.$. Prouver que ψ est différentiable, calculer sa différentielle en 0.

Exercice 5

On considère une urne contenant k boules bleues, n boules blanches et une boule rouge. On tire des boules avec remise jusqu'à trouver une boule bleue, auquel cas on arrête l'expérience. On note X le nombre de fois où l'on a tiré la boule rouge. Calculer $P(X=0)$ et $E[X]$.

Exercice 6

Prouver qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) - f(x) = \arctan(x)$. En donner un développement en série entière en 0 et préciser le rayon de convergence.