Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire usuel. On identifiera les polynômes et les fonctions polynomiales. On définit $u : E \to E$ par $\forall P \in E, \forall x \in \mathbb{R}, u(P)(x) = \displaystyle\int_0^1 (x+t)^n P(t)\mathrm{d}t$. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme symétrique de E, calculer sa trace.

Exercice 2

1. Montrer que pour toute matrice $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(xB) \in O_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(\Omega A) \leq \mathrm{tr}(A)$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPMP$ ait tous ses termes diagonaux égaux.

Exercice 4

Soit E espace euclidien, soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in E, f(x) = \|u(x)\|^2 - (u(x), x)^2$. f est-elle minorée, majorée ? Déterminer ses bornes sup et inf si elles existent.

Exercice 5

Soit E espace euclidien, soient F, G sous-espaces de E. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, puis que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 6

Déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients dans $\mathbb{Z}$.