

Exercice 1

On pose $I_n = \int_0^{+\infty} n! \left(\prod_{k=1}^n (x+k) \right)^{-1} dx$.

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ I_n est-elle bien définie? Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

Exercice 2

On pose, pour tout $x \in [0, 1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n(1 - \sqrt{x})$.

1. Prouver que $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx$.

2. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

Exercice 3

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt$.

1. Déterminer la limite ℓ de I_n .

2. Déterminer un équivalent de $\ell - I_n$.

3. Prouver que $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$. En déduire un développement asymptotique à trois termes de I_n .

Exercice 4

On note \mathcal{L}^1 l'espace des fonctions réelles intégrables, \mathcal{L}^∞ l'espace des fonctions réelles bornées, que l'on munit respectivement des normes 1 et uniforme. Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on définit sa transformée de Fourier $\widehat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{itx} dt$.

1. Montrer que \widehat{f} est bien définie et continue.

2. Montrer que l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est continue de \mathcal{L}^1 dans \mathcal{L}^∞ .

3. En passant à la transformée de Fourier, déterminer tous les couples (f, λ) où f fonction de classe \mathcal{C}^1 intégrable de limite nulle en l'infini, et $\lambda \in \mathbb{R}$, tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x + \lambda)$.