Exercice 1

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} n! \left(\prod_{k=1}^{n}(x+k)\right)^{-1} \mathrm{d}x$.
Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ I_n est-elle bien définie ? Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Exercice 2

On pose, pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n(x) = x^n(1-\sqrt{x})$.

1. Prouver que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

Exercice 3

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer la limite ℓ de I_n.
2. Déterminer un équivalent de $\ell - I_n$.
3. Prouver que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$. En déduire un développement asymptotique à trois termes de I_n.

Exercice 4

On note $\mathcal{L}^1$ l'espace des fonctions réelles intégrables, $\mathcal{L}^\infty$ l'espace des fonctions réelles bornées, que l'on munit respectivement des normes 1 et uniforme. Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on définit sa transformée de Fourier $\widehat{f} : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\widehat{f}$ est bien définie et continue.
2. Montrer que l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est continue de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathcal{L}^\infty$.
3. En passant à la transformée de Fourier, déterminer tous les couples (f,λ) où f fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable de limite nulle en l'infini, et $\lambda \in \mathbb{R}$, tels que $\forall \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x+\lambda)$.