Exercice 1

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a, b]^{\mathbb{N}}$.

1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} f(u_n)$.
2. Prouver l'existence de $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} f(u_n)$.
3. Le résultat est-il encore vrai si $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$?

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 \end{pmatrix}$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} A^n$.
2. Calculer $\exp(A)$.

Exercice 3

Résoudre l'équation, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $\exp(X) = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

La famille $\left(\frac{1}{i^j}\right)_{i,j\geq 2}$ est-elle sommable ? Si oui, calculer sa somme.

Exercice 5

La famille $\left(\frac{i+j}{i!j!2^{i+j}}\right)_{i,j\in\mathbb{N}}$ est-elle sommable ? Si oui, calculer sa somme.