## Exercice 1

Soit $I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1. Soit $A = \{(x,y) \in I \times I, x < y\}$. Montrer que $A$ est connexe par arcs.
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, supposons l'existence de $\alpha, \beta \in I$ tels que $f'(\alpha) < 0, f'(\beta) > 0$. Soit $\varphi \left\{ \begin{array}{ll} A & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto f(y) - f(x) \end{array} \right.$. Montrer que $0 \in \varphi(A)$.
3. En déduire qu'il existe $\gamma \in I$ tel que $f'(\gamma) = 0$.

## Exercice 2

Montrer qu'il n'existe pas d'injection continue de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{R}$.

## Exercice 3

Soient $A, B$ parties fermées d'un evn E, telles que $A \cup B$ et $A \cap B$ soient connexes par arcs. Montrer que $A, B$ sont connexes par arcs.

## Exercice 4

Montrer que l'épigraphe d'une fonction réelle continue est connexe par arcs.

## Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Supposons qu'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - x_{n+1}| \geq 1$ et $f(x_n) = \frac{1}{n}$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins deux solutions.

## Exercice 6

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[, \mathbb{R})$ solution du problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in ]0, +\infty[, f''(t) = -t|f(t)| \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{array} \right.$. Montrer que $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

## Exercice 7

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, soit $\varphi \left\{ \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(0) \end{array} \right.$. Montrer que $\varphi$ est continue lorsque $E$ est muni de la norme infinie, mais pas lorsqu'il est muni de la norme 1.