Exercice 1

Soit E espace vectoriel normé, soient A, B parties compactes de E. Montrer que $A + B$ est compact.

Exercice 2

Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de $\| \cdot \|_\infty$, soit φ forme linéaire sur E, vérifiant

$$\forall f \in E, f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0.$$

Montrer que φ est continue.

Exercice 3

Soit E espace normé, soit K compact de E, soit $f : K \to K$ continue vérifiant

$$\forall (x, y) \in K^2, \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|.$$

— Soit $a \in K$. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que $(f^{\varphi(n)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
— Montrer que $(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.
— En déduire que f est bijective.