Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $\mu_u = \sum_{k=0}^{s} a_k X^k$ son polynôme minimal. On définit $p = \min\{j \in \mathbb{N}, a_j \neq 0\}$.

1. Montrer que si $p = 0$, alors u est inversible.
2. On suppose $p \geq 1$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$.

Exercice 2

Soit E espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit p projecteur sur E.
On définit $\Phi \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ u & \mapsto & \frac{1}{2}(p \circ u + u \circ p) \end{array} \right.$. Montrer que Φ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 3

Déterminer toutes les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$\forall M \in GL_n(\mathbb{C}), AM = MA \Rightarrow \det(A + M) = \det(M)$$

Exercice 4

Soient $A, B \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $A \wedge B = 1$ et B scindé à racines simples. On définit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ par : $\varphi(P)$ est le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que φ est bien définie et que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Quelles sont les valeurs propres de φ ? Est-elle diagonalisable ?

Exercice 5

Soit $\Phi \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & X^n P(1/X) \end{array} \right.$.
Montrer que Φ est bien définie, que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et qu'elle est diagonalisable.