Exercice 1

Soit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On pose, pour tout $\theta \in \mathbb{R}, D_n(\theta) = \det(A_n + 2\cos(\theta) I_n)$. Calculer $D_n(\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire les valeurs propres de A_n. A_n est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Déterminer toutes les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = A^3 - 3A^2$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Exercice 3

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et diagonalisable, soit $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}, B^p = A$. Montrer que B est diagonalisable. La conclusion reste-t-elle vraie si A non inversible ?

Exercice 4

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA + A^2 = I_n$. Montrer que A inversible, si et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de A. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f \circ f = -Id_E$.

1. Montrer que $\dim(E)$ est paire.
2. On pose $\dim(E) = 2n$. Montrer que f se diagonalise par blocs en une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}$, où $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Expliciter A.