

INTRODUCTION

Le problème de MORDELL-LANG traite de la structure des solutions d'un système polynomial dans un groupe  $\Gamma$  donné et généralise notamment certains énoncés de finitude (conjecture de MORDELL). Les aspects quantitatifs s'appuient principalement sur une inégalité de VOJTA dont nous proposons ici une nouvelle approche. Sauf exception, nous nous placerons dans le cadre le plus élémentaire, celui d'un tore  $A = \mathbb{G}_m^g$  de dimension  $g \geq 1$ .

PREMIÈRE APPROCHE

Pour illustrer le problème, considérons  $U = \{\pm 2^k 3^\ell \mid k, \ell \in \mathbb{Z}\}$  qui est un groupe multiplicatif de rang 2 et posons  $P(x_1, \dots, x_g) = x_1 + \dots + x_g - 1$ . Pour  $g = 2$ , on peut vérifier que l'équation  $P(x) = 0$  a exactement 21 solutions dans  $\Gamma = U^g$  :

$$(9, -8), (4, -3), (3, -2), (2, -1), (3/2, -1/2), (1/2, 1/2),$$

$$(4/3, -1/3), (2/3, 1/3), (3/4, 1/4), (9/8, -1/8), (8/9, 1/9)$$

et leurs symétriques. Vu que  $2^k - 2^k + 1 = 1$ , des solutions dites "dégénérées" en nombre infini apparaissent pour  $g \geq 3$ .

Plus généralement, si  $K$  est un corps de caractéristique 0,  $\Gamma$  un sous-groupe de  $(K^\times)^g$  de rang fini  $r$  et  $a \in (K^\times)^g$ , F. AMOROSO et E. VIADA (2009) ont prouvé que l'équation  $P(ax) = 0$  a au plus  $(8g)^{4g^{g+r+1}}$  solutions non dégénérées dans  $\Gamma$  (telles qu'aucune sous-somme de  $a_1x_1 + \dots + a_gx_g$  n'est nulle), améliorant ainsi d'autres estimations établies antérieurement.

En particulier, si  $K$  est un corps de nombres et  $U$  le sous-groupe de  $K^\times$  formé des éléments de valuation nulle en-dehors d'un ensemble fini de places  $S$  contenant les places archimédiennes, alors  $U$  est de rang  $\#S - 1$  (théorème de DIRICHLET). L'équation obtenue est alors dite **équation aux  $S$ -unités** ( $K = \mathbb{Q}$  et  $S = \{\infty, 2, 3\}$  pour l'exemple ci-dessus).

PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Posons maintenant  $K = \overline{\mathbb{Q}}$  et  $A(\overline{\mathbb{Q}}) = (\overline{\mathbb{Q}}^\times)^g$  le groupe des points algébriques du tore  $A = \mathbb{G}_m^g$ . Si  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^g$  est un sous-groupe tel que  $\mathbb{Z}^g/\Lambda$  est de rang  $b$  sans torsion, le groupe défini par

$$B(\overline{\mathbb{Q}}) = \{x \in A(\overline{\mathbb{Q}}) \mid \forall \lambda \in \Lambda, x_1^{\lambda_1} \dots x_g^{\lambda_g} = 1\} \subset A(\overline{\mathbb{Q}}),$$

irréductible pour la topologie de Zariski, est appelé **sous-tore** de dimension  $b$ .

Fixons d'une part un sous-groupe  $\Gamma \subset A(\overline{\mathbb{Q}})$  de rang fini  $r$  et d'autre part une sous-variété

$$X(\overline{\mathbb{Q}}) = \{x \in A(\overline{\mathbb{Q}}) \mid P_1(x) = \dots = P_t(x) = 0\}$$

définie par une famille  $(P_k)$  de polynômes à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Le **problème de MORDELL-LANG** consiste à trouver une décomposition finie

$$X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma = \bigcup_{i=1}^b (x_i B_i)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$$

où les  $x_i B_i \subset X$  sont des translatés de sous-tores  $B_i$  de  $A$  par des points  $x_i \in X(\overline{\mathbb{Q}})$  et  $b = b(X, r)$ .

L'existence d'une telle décomposition a été démontrée par M. LAURENT (1984). Par quotient le problème se réduit à prouver la finitude des **solutions dites exceptionnelles**, résultat qui peut aussi s'énoncer comme une conséquence. Plus précisément, si  $Z_X$  désigne la réunion des translatés de sous-tores de dimension non nulle inclus dans  $X$  alors

$$(X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma \text{ est fini.}$$

En particulier, pour une courbe  $X$  (irréductible de dimension 1) qui n'est pas la translatée d'un sous-tore,  $Z_X$  est vide et  $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$  est fini.

ÉLARGISSEMENTS

**Contexte abélien** — Nous pouvons transposer le problème dans des schémas en groupe d'autre nature. Pour  $A$  une **variété abélienne**, le problème de MORDELL-LANG devient **conjecture de LANG**, prouvée par G. FALTINGS (1994). Celle-ci contient la célèbre **conjecture de MORDELL** : toute courbe  $X$  projective lisse de genre  $g \geq 2$  sur un corps de nombres  $K$  n'a qu'un nombre fini de points rationnels. G. RÉMOND (2000) a mis en évidence des bornes explicites qu'on peut illustrer par la majoration :

$$\text{Card}\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid F(x, y) = 0\} \leq M^{2^{3D^2}}$$

pour tout polynôme  $F$  de degré  $D$  à coefficients entiers dans  $[-M, M]$ ,  $M \geq 3$  tel que ce cardinal est fini.

Rappelons en effet qu'une telle courbe  $X$  se plonge dans une variété abélienne  $A$  de dimension  $g$  (jacobienne) et n'est pas la translatée d'une sous-variété abélienne de dimension 1 (qui sont des courbes elliptiques). Il suffit donc de prendre  $\Gamma = A(K)$  de type fini (théorème de MORDELL-WEIL). Notons aussi que le problème s'étend au cas des **variétés semi-abéliennes** qui englobe les cas toriques et abéliens.

**Retour aux tores** — Nous pouvons également varier les conditions supplémentaires imposées aux solutions. En remplaçant le groupe  $\Gamma$  par un épaississement

$$\Gamma_\varepsilon = \{xy \mid x \in \Gamma, y \in A(\overline{\mathbb{Q}}), |y| \leq \varepsilon\}$$

on obtient le **problème dit de MORDELL-LANG plus BOGOMOLOV**. Ici  $|\cdot|$  désigne une norme naturelle sur  $E = A(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ , obtenue en prolongeant la hauteur de WEIL (logarithmique) pour le plongement quasi-projectif  $A \hookrightarrow \mathbb{P}^{2g-1}$ . Dans ces conditions B. POONEN (1999) a établi que la décomposition reste valable pour tout  $\varepsilon$  inférieur à un certain  $\varepsilon_0 > 0$ .

Par ailleurs, nous pouvons redéfinir la notion de solution exceptionnelle par une condition du type

$$0 < \text{dist}(x, \Delta) \leq \exp(-\delta|x|)$$

où  $\Delta = \partial A \subset \mathbb{P}^{2g-1}$  désigne la frontière de  $A$ . Le problème se rapproche alors du **théorème d'approximation de ROTH**. Dans le cadre abélien (avec  $|\cdot|$  hauteur de NÉRON-TATE et  $\Gamma = A(K)$ ), G. FALTINGS (1991) a démontré la finitude pour  $\Delta, \delta > 0$  quelconques.

Enfin, la question se porte évidemment sur les aspects quantitatifs que nous allons discuter maintenant. G. RÉMOND (2002) a montré la majoration

$$b(X, r) \leq (\deg(X))^{(r+1)g^2 m^{3m^2}}$$

avec  $m = \dim(X) + 1$ , ainsi que  $\varepsilon_0 = (\deg(X))^{-g^2 m^{3m}}$ . Notons que ces valeurs ne dépendent que des données géométriques (dimensions et degré) et non arithmétiques (hauteurs, corps de définition...).

IDÉES DE LA PREUVE

Nous nous plaçons maintenant dans l'espace vectoriel réel  $F = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  de dimension finie  $r$  muni de la norme  $|\cdot|$  et nous expliquons brièvement comment majorer le nombre de points de  $(X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$  (d'après P. VOJTA, G. FALTINGS et E. BOMBIERI). Supposons  $X$  irréductible de dimension non nulle et associons-lui des seuils  $q, M, N, c, c_1, c_2, c_3 \geq 1$ .

**Points de grande hauteur** — L'idée consiste à recouvrir  $F \setminus \{0\}$  par une famille finie de cônes (au plus  $(9c_1)^r$ ) dans lesquels deux points quelconques vérifient

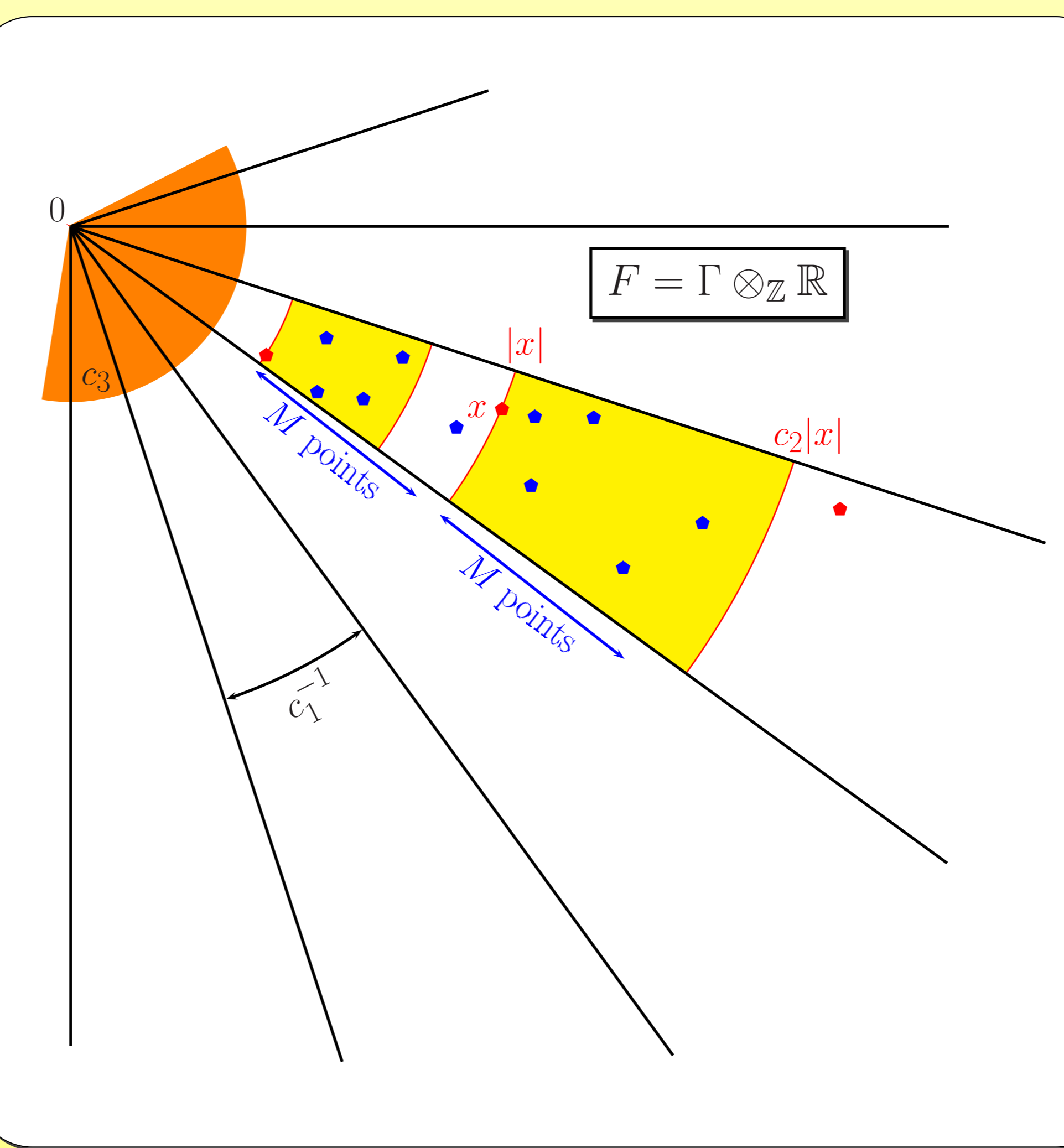
$$|(x \otimes |x|^{-1}) - (y \otimes |y|^{-1})| \leq c_1^{-1}.$$

Un premier résultat appelé **inégalité de MUMFORD** permet d'extraire de toute famille de points de notre ensemble contenue dans l'un de ces cônes une sous-famille suffisamment espacée :

$$c_3 \leq |x_0| \leq |x_1| \leq \dots \implies c_3 \leq |x_0| \leq c_2^{-1}|x_M| \leq c_2^{-2}|x_{2M}| \leq \dots$$

Celle-ci se combine à un second résultat appelé **inégalité de VOJTA** qui se rapproche d'une démonstration de transcendance et permet de majorer le cardinal  $n$  de cette sous-famille par  $m - 1 = \dim(X)$ . En effet si  $n \geq m$  :

- On construit un faisceau inversible sur  $(X \setminus Z_X)^m$  et une section globale représentable par des polynômes de petite hauteur (Lemme de SIEGEL).
- Grâce aux différents seuils, on minore l'ordre d'annulation de celle-ci au point  $x = (x_0, x_M, \dots, x_{(m-1)M})$ , puis on construit une sous-variété irréductible  $Y_i \subset X$  de dimension  $m - 2$ , de degré et hauteur contrôlés contenant l'un des  $x_i$  (Théorème du produit de FALTINGS).
- On réitère le procédé en remplaçant le facteur  $(X \setminus Z_X)$  par  $(Y_i \setminus Z_{Y_i})$ , et ainsi de suite... On aboutit à  $Y_i = \{x_i\}$  pour un certain  $i$  et à une contradiction du type  $c_3 \leq |x_i| \leq h(Y_i) \leq c_3/2$  pour  $c_3$  assez grand.



**Points de petite hauteur** — Précisons d'abord que, parmi les seuils que nous choisissons, seul  $c_3$  dépend de la hauteur de  $X$  en plus de la dimension et du degré. Pour éliminer cette dépendance, nous supposons que le nombre de points de norme inférieure à  $c_3$  est supérieur à  $N$ . Nous pouvons alors en déduire que ces mêmes points se concentrent dans une boule de rayon  $c$ . Sachant que pour tout  $y \in \Gamma$

$$\text{Card}\{x \in (X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \mid |xy^{-1}| \leq q^{-1}\} \leq q,$$

nous recouvrons cette boule par au plus  $(7qc)^r$  boules de rayon  $q^{-1}$ .

**Conclusion** — Le nombre total de points est donc majoré par

$$\text{Card}[(X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma] \leq (9c_1)^r (m - 1)M + \max(N, (7qc)^r q).$$

Le raisonnement s'accompagnant d'une récurrence sur la dimension de  $X$ , les quantités  $M, N$  dépendent essentiellement du résultat aux rangs inférieurs. En outre, une puissante majoration pour  $q$  a été établie par F. AMOROSO et E. VIADA (2009). Ainsi l'efficacité de la méthode dépend surtout des seuils  $c, c_k$  dont le rôle est de contrôler les variétés  $Y_i$ .

MÉTHODE PAR ÉPUISEMENT

Pour  $n = m = 4$ , reprenons l'inégalité de VOJTA et dressons un tableau des dimensions des variétés  $Y_i(e)$  construites à chaque étape  $e$  :

$e$	$Y_0$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$
0	3	3	3	3
1	3	3	2	3
2	3	3	2	2
3	2	3	2	2
4	1	3	2	2
5	1	3	2	1
6	1	2	2	1
7	1	2	2	0

D'une ligne à la suivante, la dimension de l'une des variétés, sélectionnée de façon aléatoire, chute d'un cran et le nombre total d'étapes nécessaires est compris entre  $m - 1$  et  $(m - 1)^2$ .

L'idée de la méthode par épuisement consiste à **uniformiser la chute de la dimension** en appliquant le procédé à un nombre global de variétés plus important et en éliminant au fur et à mesure les variétés dont la dimension ne chute pas. Cela permet d'optimiser le nombre d'étapes et de limiter l'utilisation du théorème du produit afin de contrôler bien plus efficacement les variétés  $Y_i$  (et leur degré en particulier).

$e$	$Y_0$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
0	3	3	3	3	3	3	3
1	2		2	2	2		
2	1		1				
3			0				

Supposons par exemple  $m = 4$  et  $n = 7 = (m - 1)m/2 + 1$ . En considérant toutes les sous-familles formées de 4 points et en leur appliquant le procédé (alinéas 1 et 2), nous construisons au moins  $4 = (m - 2)(m - 1)/2 + 1$  sous-variétés de dimension 2 et sélectionnons ainsi 4 points. Nous réitérons ensuite l'opération sur cette sous-famille en remplaçant  $m$  par  $m - 1$ , et ainsi de suite... Notons que la condition d'espacement vérifiée par la famille globale l'est automatiquement pour toute sous-famille.

Sous cette forme, la conclusion de l'inégalité de VOJTA est donc légèrement plus faible, mais les hypothèses (les seuils) sont en revanche nettement meilleurs. Appliquée au problème de MORDELL-LANG, elle permet d'abaisser la dépendance en  $m$  et d'obtenir

$$b(X, r) \leq (2^{6g^3} \deg(X))^{3g(m+1)^{4m}(r+1)}.$$