Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}, z_0, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$. A quelle condition sur $z_0, \cdots, z_n$ la famille $(X - z_0)^n, \cdots, (X - z_n)^n$ forme-t-elle une base de $\mathbb{C}_n[X]$?

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, soit $B \in \mathfrak{M}_{3,n}(\mathbb{R})$. On s'intéresse à l'équation $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathfrak{M}_{3,n}(\mathbb{R})$. Montrer que cette équation admet des solutions si et seulement si les colonnes de B forment une progression arithmétique.

Application : résoudre l'équation

$$AX = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}$. A quelles conditions sur α, A, B, l'équation $\alpha X + \mathrm{tr}(X)A = B$, d'inconnue $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ a-t-elle des solutions ? Résoudre alors l'équation.

Exercice 4

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\widetilde{A}(x) = (a_{i,j} + x)_{1 \leq i,j \leq n}$, et $P(x) = \det(\widetilde{A}(x))$. Montrer que P est une fonction polynomiale de degré au plus 1.

Application : pour $a, b, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, calculer $\begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \cdots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \alpha_n \end{vmatrix}$.