

# MÉCANIQUE DES FLUIDES

## Cours de première année

Jean-Bernard CAZALBOU  
Stéphane JAMME





# Sommaire

<b>I</b>	<b>Description et modélisation des écoulements de fluide réel</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Description des écoulements de fluide</b>	<b>9</b>
1.1	La matière fluide . . . . .	9
1.1.1	Le mouvement microscopique . . . . .	9
1.1.2	L'hypothèse de milieu continu et la notion de particule fluide . . . . .	10
1.1.3	Les grandeurs thermodynamiques . . . . .	11
1.1.4	La vitesse macroscopique . . . . .	12
1.1.5	Les grandeurs énergétiques . . . . .	12
1.2	La caractérisation locale du mouvement . . . . .	13
1.2.1	Cinématique des petits mouvements . . . . .	13
1.2.2	Propriétés du champ de vitesse . . . . .	16
1.3	Éléments de description globale du mouvement . . . . .	18
1.3.1	Définitions . . . . .	18
1.3.2	Surfaces et lignes particulières d'un écoulement . . . . .	19
1.3.3	Flux et débits . . . . .	22
1.4	Le point de vue Lagrangien . . . . .	24
1.4.1	Dérivation particulaire . . . . .	25
1.4.2	Le principe de continuité et ses conséquences . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Modélisation</b>	<b>31</b>
2.1	Les principes fondamentaux . . . . .	31
2.1.1	Conservation de la masse . . . . .	31
2.1.2	Bilan de quantité de mouvement . . . . .	32
2.1.3	Bilan d'énergie totale . . . . .	34
2.1.4	Les équations de transport des grandeurs énergétiques . . . . .	36
2.2	Les modèles de comportement . . . . .	37
2.2.1	Le comportement mécanique . . . . .	37
2.2.2	Le comportement thermique . . . . .	38
2.2.3	Le comportement thermodynamique . . . . .	39
2.3	Récapitulation du modèle de Navier-Stokes . . . . .	40
2.3.1	Mise en œuvre : Conditions initiale et aux limites . . . . .	40
2.3.2	Forme générique des équations de transport et signification physique . . . . .	41

<b>3</b>	<b>Propriétés générales du modèle de Navier-Stokes</b>	<b>43</b>
3.1	Caractère dissipatif . . . . .	43
3.2	Dynamique rotationnelle . . . . .	45
3.2.1	L'équation du rotationnel . . . . .	45
3.2.2	Conséquences pratiques . . . . .	48
3.3	La pression : « Action à distance » ou propagation . . . . .	50
3.3.1	L'équation de Poisson pour la pression en écoulement de fluide visqueux incompressible . . . . .	50
3.3.2	Propagation de la pression en écoulement de fluide compressible : La célérité du son . . . . .	53
3.4	Analyse dimensionnelle et conditions de similitude . . . . .	55
3.4.1	Analyse dimensionnelle d'un problème d'aérodynamique externe . . . . .	55
3.4.2	Autres nombres sans dimension . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Les modèles restreints</b>	<b>59</b>
4.1	Le fluide parfait incompressible . . . . .	60
4.2	Le fluide visqueux incompressible . . . . .	60
4.3	Le fluide parfait compressible . . . . .	61
4.4	Conditions de similitude pour les modèles restreints . . . . .	61
4.5	Classification des écoulements en fonction des nombres de Mach et de Reynolds	61
4.5.1	Classification en fonction du nombre de Mach . . . . .	61
4.5.2	Régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds . . . . .	62
<b>II</b>	<b>Écoulements de fluide parfait incompressible</b>	<b>65</b>
<b>5</b>	<b>Généralités sur les écoulements de fluide parfait incompressible</b>	<b>67</b>
5.1	Retour sur les écoulements de fluide barotrope . . . . .	67
5.1.1	Dynamique du fluide visqueux barotrope . . . . .	67
5.1.2	Rotationnel et circulation en écoulement de fluide visqueux barotrope : Les théorèmes de Lagrange et de Kelvin . . . . .	68
5.1.3	Mouvement irrotationnel d'un fluide visqueux barotrope : Formulation forte du théorème de Bernoulli . . . . .	72
5.1.4	Le mouvement permanent d'un fluide non visqueux barotrope : Le théorème de Bernoulli en formulation faible . . . . .	72
5.2	Le fluide parfait incompressible : Définition et propriétés . . . . .	73
5.2.1	Le concept de fluide parfait . . . . .	73
5.2.2	L'hypothèse d'incompressibilité et ses conséquences . . . . .	76
5.2.3	Formes particulières des théorèmes généraux . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Écoulements à potentiel complexe</b>	<b>79</b>
6.1	Hypothèses générales . . . . .	79
6.1.1	Mouvement irrotationnel de fluide incompressible . . . . .	79
6.1.2	Mouvement bidimensionnel plan . . . . .	80
6.2	Potentiel et vitesse complexe . . . . .	81
6.2.1	Potentiels complexes élémentaires . . . . .	82
6.3	Principe de matérialisation et calcul des efforts en écoulement de fluide parfait	84
6.3.1	Principe de matérialisation . . . . .	84

6.3.2	Calcul des efforts sur une ligne de courant fermée : Formules de Blasius	85
6.4	Paradoxe de d'Alembert et effet Magnus en écoulement de fluide parfait . . .	86
6.4.1	Écoulement autour d'un cylindre sans circulation : Le paradoxe de d'Alembert . . . . .	86
6.4.2	Écoulement autour d'un cylindre avec circulation : Effet Magnus . . .	89
<b>7</b>	<b>Aérodynamique des profils minces en écoulement de fluide parfait incompressible</b>	<b>95</b>
7.1	Transformation conforme . . . . .	95
7.1.1	Transformation de Joukovski . . . . .	96
7.1.2	Profils de Joukovski . . . . .	98
7.2	Écoulement autour d'un profil de Joukovski . . . . .	101
7.2.1	Complément : La transformation de Kármán-Trefftz . . . . .	103
7.3	Aérodynamique des profils minces : Quelques résultats importants . . . . .	105
7.3.1	Le coefficient de portance et la courbe $C_z(\alpha)$ . . . . .	105
7.3.2	Complément : Le coefficient de moment et la courbe $C_m(C_z)$ . . . . .	106
7.3.3	Le coefficient de pression et la courbe des $k_p$ . . . . .	109
7.3.4	Note sur les phénomènes de décollement et de décrochage . . . . .	111
7.3.5	Signification physique de la condition de Kutta-Joukovski . . . . .	112
<b>A</b>	<b>Fonction courant scalaire en écoulement bidimensionnel</b>	<b>117</b>
<b>B</b>	<b>Notation indicielle ou notation d'Einstein</b>	<b>119</b>
B.1	Définition . . . . .	119
B.2	Définitions usuelles d'analyse vectorielle . . . . .	119
<b>C</b>	<b>Équations aux perturbations en écoulement de fluide parfait compressible</b>	<b>121</b>
<b>D</b>	<b>Régime d'écoulement incompressible pour un gaz compressible</b>	<b>125</b>
D.1	Parois adiabatiques . . . . .	125
D.2	Parois faiblement chauffées où refroidies . . . . .	127
<b>E</b>	<b>Calcul du moment aérodynamique exercé sur un profil de Joukovski</b>	<b>131</b>
<b>F</b>	<b>Recueil des textes de PC/BE</b>	<b>135</b>



# Notations

## Théorie générale

$\vec{x} = [x_i] = [x, y, z]$	vecteur position en coordonnées cartésiennes
$[\xi, \eta, \zeta]$	coordonnées de Lagrange en repère cartésien
$t$	temps
$P$	pression
$\rho$	masse volumique
$T$	température
$\vec{V} = [U_i] = [U, V, W]$	vecteur vitesse en repère cartésien
$\mathcal{V}^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = \ \vec{V}\ ^2$	carré scalaire du vecteur vitesse
$\vec{F} = [F_i]$	forces extérieures de volume
$\mathcal{F}$	potentiel des forces extérieures de volume
$e = e(T)$	énergie interne par unité de masse
$e_c = \frac{1}{2}\ \vec{V}\ ^2$	énergie cinétique par unité de masse
$e_t = e + e_c$	énergie totale par unité de masse
$h = e + p/\rho$	enthalpie par unité de masse
$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\text{rot } \vec{V}$	vecteur tourbillon
$\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{V}$	rotationnel du vecteur vitesse
$\vartheta = \text{div } \vec{V}$	divergence du vecteur vitesse
$\vec{\psi}$	fonction courant vectorielle ( $\vec{V} = \text{rot } \vec{\psi}$ )
$\phi$	fonction potentiel de vitesse
$\bar{S} = [S_{ij}] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right]$	tenseur des taux de déformation
$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}]$	tenseur des contraintes
$\bar{\tau} = [\tau_{ij}]$	tenseur des contraintes visqueuses
$C_p$	coefficient de chaleur massique à pression constante
$C_v$	coefficient de chaleur massique à volume constant
$\gamma = C_p/C_v$	coefficient isentropique

## Théorie générale (suite)

$R$	constantes des gaz parfaits
$r = R/\mathcal{M}_m = C_p - C_v$	constante de gaz parfait d'un gaz de masse molaire $\mathcal{M}_m$
$\mu$	viscosité dynamique
$\nu = \mu/\rho$	viscosité cinématique
$\lambda$	conductivité thermique
$a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$	diffusivité thermique
$a = \sqrt{\gamma r T}$	célérité du son

## Théorie des potentiels complexes

$z = x + iy$	affixe complexe du point de coordonnées cartésiennes $(x,y)$
$f(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$	potentiel complexe au point $(x,y)$
$w(z) = U(x,y) - iV(x,y)$	vitesse complexe au point $(x,y)$
$\vec{A} = (X_a, Y_a)$	effort aérodynamique exercé sur un contour fermé
$A = X_a + iY_a$	effort complexe exercé sur un contour fermé
$M_{z_0}$	moment aérodynamique exercé autour du point $z_0$ sur un contour fermé

## Aérodynamique des profils minces

$c$	corde du profil
$e, e/c$	épaisseur maximale (maître couple), épaisseur relative du profil
$x_e$	position du maître couple, comptée à partir du bord d'attaque
$f, f/c$	flèche maximale (cambrure), cambrure relative du profil
$x_f$	position de la flèche maximale, comptée à partir du bord d'attaque
$C_z = 2 A  / (\rho c V_0^2)$	coefficient de portance
$V_0$	module de la vitesse à l'infini amont
$P_0$	valeur de la pression à l'infini amont
$\alpha$	angle d'incidence (entre le vecteur vitesse à l'infini amont et le segment bord d'attaque-bord de fuite du profil)
$C_m = -2M / (\rho c^2 V_0^2)$	coefficient de moment de tangage
$k_p = 2(P - P_0) / (\rho V_0^2)$	coefficient de pression

## Aérodynamique des profils minces (suite)

$x_P$  position du centre de poussée, comptée à partir du bord d'attaque

$x_F$  position du foyer aérodynamique, comptée à partir du bord d'attaque



# Introduction

Avec la thermodynamique, la mécanique des fluides permet d'aborder un champ d'applications extrêmement vaste. En effet, dans les cas les plus généraux, le mouvement d'un fluide peut mettre en jeu les trois états de la matière (écoulements multiphasiques, interaction fluide-solide) ainsi qu'un ensemble d'espèces différentes avec ou sans réaction chimique (fluide hétérogène, écoulement réactif). La diversité des échelles mises en jeu vient également étendre le spectre des applications puisque les mêmes bases physiques peuvent servir de support à l'étude de phénomènes aussi différents que les mouvements dans une atmosphère stellaire et l'écoulement dans une microfissure. Il va de soi que l'enseignement dispensé à l'ENSICA ne permettra pas, sans compléments, d'aborder une telle diversité de situations. Cet enseignement est conçu en fonction des principales applications rencontrées dans le domaine aéronautique : l'aérodynamique, la mécanique du vol et la propulsion. Ceci fixe les limites du cours, on s'attachera donc essentiellement à l'étude d'écoulements de fluides

- monophasique ;
- monoconstituant ;
- inerte chimiquement ;
- non magnétique ;
- dans les conditions usuelles (milieu continu, fluide newtonien, équilibre thermodynamique).

L'enseignement intervient en première et deuxième année, il comprend quatre parties :

1. Description et modélisation des écoulements de fluides (1<sup>re</sup> année, S. Jamme).
2. Écoulements de fluide parfait incompressibles (1<sup>re</sup> année, S. Jamme).
3. Écoulements de visqueux incompressibles (2<sup>e</sup> année, L. Joly).
4. Écoulements de fluides compressibles (2<sup>e</sup> année, X. Carbonneau et L. Joly).

La première partie introduit d'abord les variables et fonctions de description locale du mouvement ainsi que des outils de description globale. On aborde ensuite la phase de modélisation où l'application des principes fondamentaux et la modélisation mathématique des comportements mécanique, thermique et thermodynamique permet d'aboutir à un système d'équations fermé, applicable aux écoulements de fluides newtoniens (air, eau ...) dans les conditions usuelles. C'est le modèle le plus général qu'on puisse utiliser pour de tels fluides dans ces conditions, mais il n'est analytiquement soluble que dans un nombre très limité de cas simples. C'est pour cette raison que les trois parties de cours suivantes sont consacrées à l'étude de modèles restreints. Ceux-ci sont applicables quand certaines hypothèses sont vérifiées, et plus faciles à manipuler. Cette notion de modèle restreint renvoie à deux propriétés spécifiques des fluides usuels, il s'agit de la compressibilité et de la viscosité. La première exprime simplement le fait qu'un fluide (plus particulièrement un gaz) répond à

une augmentation de pression par une diminution de son volume spécifique et donc une augmentation de masse volumique. On verra que la propagation du son à vitesse *finie* et, par suite, l'apparition d'ondes de choc est une conséquence directe de cette propriété. La viscosité quant à elle est directement liée au *frottement*, elle est à l'origine de mécanismes dissipatifs et donc au cœur des questions de rendement et de résistance à l'avancement. Un certain nombre de phénomènes importants peuvent être rattachés à l'une ou l'autre de ces propriétés et peuvent par suite être étudiés à l'aide de modèles restreints. L'équilibre des forces sur un avion de transport subsonique en vol horizontal stabilisé (croisière) en donne une bonne illustration. Dans la figure 1, on chiffre globalement cet équilibre : les efforts aérodynamiques (appliqués par le fluide sur l'avion) sont décomposés en portance et résistance à l'avancement (traînée), qui équilibrent respectivement le poids de l'avion et la poussée des moteurs. La portance est un effet qui prend naissance autour des ailes du fait des différences de pression entre *intrados* et *extrados*. Ni la viscosité du fluide ni sa compressibilité ne sont nécessaires pour justifier cet effet, on a là un phénomène qui peut être décrit et chiffré avec un bon degré d'approximation par une théorie de fluide non-visqueux incompressible. Le cas de la traînée est plus complexe, on peut considérer que cet effort regroupe plusieurs contributions :

- une traînée de frottement qui constitue environ 42 % de la traînée totale, elle tire son origine dans le frottement de l'air sur la peau de l'appareil, c'est un phénomène lié à la viscosité du fluide sans influence notable de sa compressibilité ;
- une traînée induite qui constitue environ 32 % de la traînée totale, comme la portance elle provient des différences de pression entre intrados et extrados, ces différences entraînent la création d'un tourbillon de bout d'aile qui peut drainer une énergie considérable, ce phénomène est très bien décrit par un modèle de fluide non-visqueux incompressible ;
- une traînée de compressibilité qui constitue environ 7 % de la traînée totale, ce sont les irréversibilités thermodynamiques liées à l'apparition d'ondes de choc sur la cellule qui en sont responsables, la viscosité peut jouer un rôle mais l'essentiel de l'effet est lié à la compressibilité du fluide.

Le reste de l'effort est constitué

- d'une traînée de forme pour environ 17 % ;
- de traînées parasites pour environ 2 %.

Elles résultent d'interactions complexes entre des effets de pression et de viscosité, on peut en général les décrire avec un modèle de fluide visqueux incompressible.

En conclusion, on retiendra que l'utilisation de modèles restreints permet d'analyser rapidement une configuration d'écoulement et, le cas échéant, de quantifier les différents effets en présence. En général, ceci ne sera pas suffisant pour faire le dimensionnement final d'un dispositif industriel réel. Il faudra pour cela recourir à des méthodes d'extrapolation semi-empiriques, ou au modèle complet pour les cas les plus complexes.

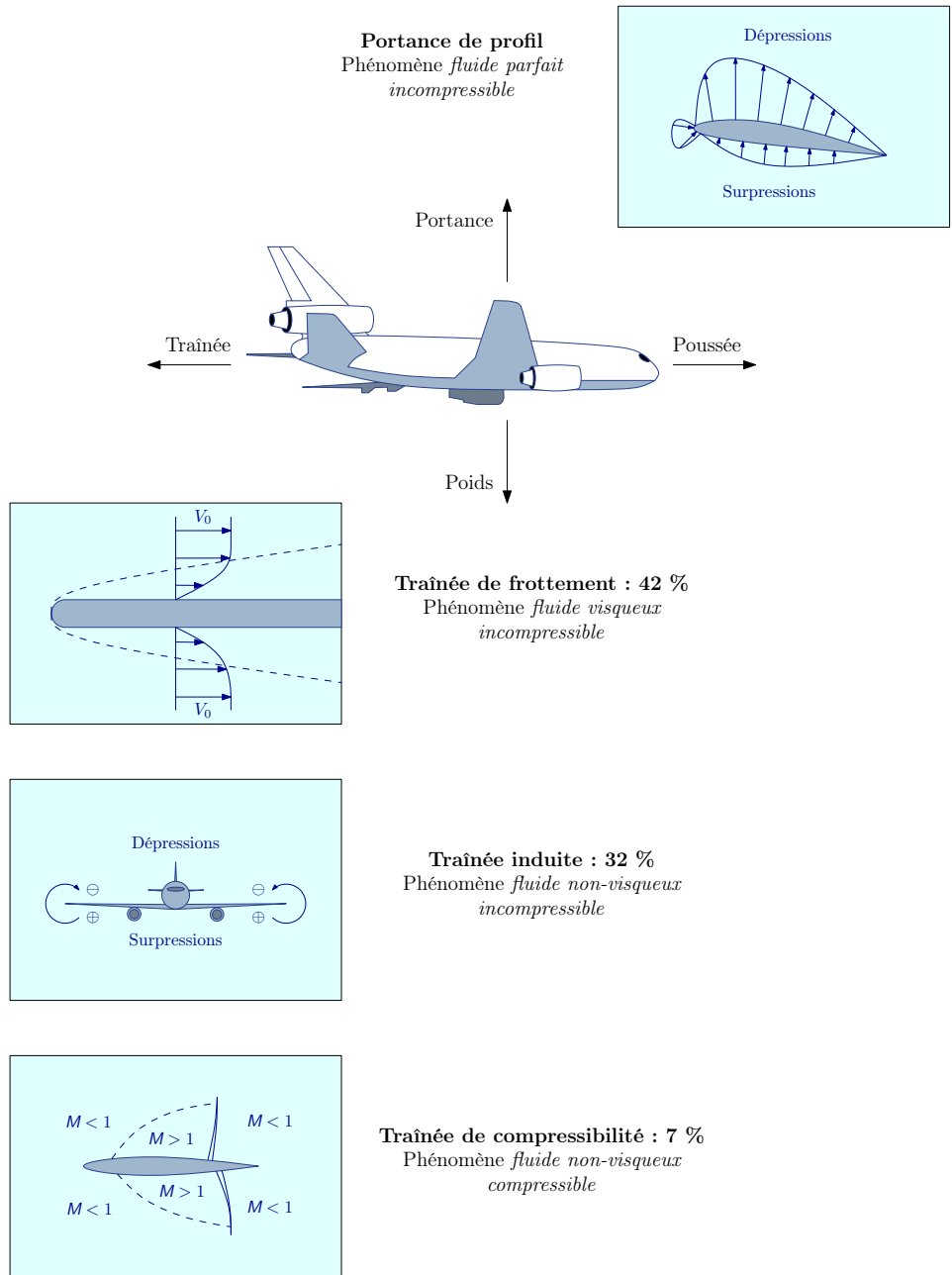


FIGURE 1 – Origine des efforts aérodynamiques s'exerçant sur un avion de transport en croisière subsonique à un nombre de Mach égal à 0,8. (Le nombre de Mach  $M$  est le rapport de la vitesse du fluide dans le repère avion à la célérité du son.)



Première partie

Description et modélisation des  
écoulements de fluide réel



# Chapitre 1

## Description des écoulements de fluide

### 1.1 La matière fluide

#### 1.1.1 Le mouvement microscopique

À l'échelle moléculaire, la matière fluide se présente comme une collection d'éléments matériels (molécules) en mouvement relatif. Ce mouvement est apparemment erratique, les molécules n'interagissant pas entre elles — tout au moins pour les gaz — en dehors de collisions. Au niveau macroscopique, on observe une trace de cette agitation dans le mouvement *Brownien* de petites particules solides en suspension dans un liquide sous l'effet des collisions avec les molécules du liquide qui, elles, ne sont pas visibles. Le mouvement microscopique est caractérisé par des échelles de vitesse et de longueur qui sont :

- le libre parcours moyen entre deux collisions  $l$  ;
- la vitesse quadratique moyenne d'agitation des molécules  $C$ ,

dont on verra quelques valeurs typiques dans les conditions normales de température et de pression dans le tableau 1.1.

L'étude de la matière fluide à ce niveau relève de la *théorie cinétique des gaz*. Ce niveau d'observation n'est pas adapté à l'étude du mouvement dans les applications qui nous intéressent ici et qui relèvent de la *mécanique des milieux continus*.

Gaz	H <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>
$l$ (nm)	176	83	95
$C$ (m/s)	1838	493	461

TABLEAU 1.1 – Valeurs du libre parcours moyen et de la vitesse quadratique moyenne pour quelques gaz usuels dans les conditions normales de température et de pression.

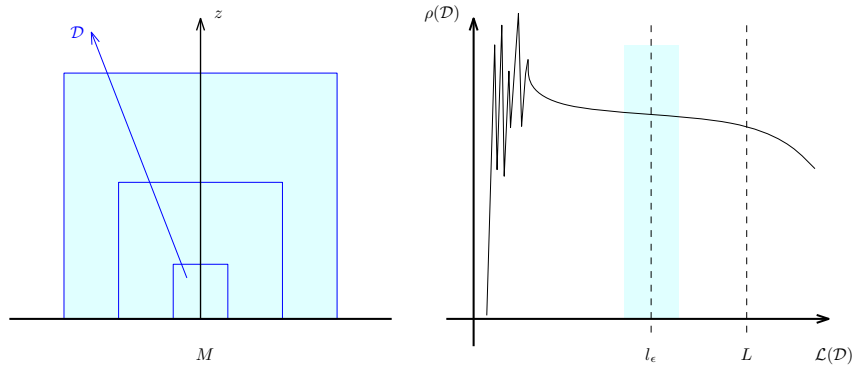


FIGURE 1.1 – Définition de la notion de particule fluide en relation avec celle d'une valeur « locale » de la masse volumique.

### 1.1.2 L'hypothèse de milieu continu et la notion de particule fluide

Au niveau macroscopique, la matière semble répartie continûment dans l'espace. Comment réconcilier cette vision avec celle d'un ensemble de molécules séparées par du vide ? C'est en introduisant la notion de *particule fluide* : un volume  $\epsilon$  suffisamment grand pour contenir un nombre important de molécules et suffisamment petit pour, à l'échelle d'observation, pouvoir être considéré comme un « point matériel ».

L'existence de la particule fluide ne va pas de soi, il est nécessaire que les échelles caractéristiques des mouvements microscopique et macroscopique soient parfaitement distinctes. C'est-à-dire, que si  $L$  est une échelle de longueur caractéristique du mouvement moyen, on doit avoir  $l \ll L$  et donc

$$l^3 \ll \epsilon \ll L^3.$$

Le rapport  $Kn = l/L$  est appelée nombre de Knudsen, l'hypothèse de milieu continu s'applique quand le nombre de Knudsen est petit ( $Kn < 10^{-2}$ ). L'hypothèse peut donc être remise en cause si :

- le libre parcours moyen augmente, c'est le cas d'un milieu raréfié (haute atmosphère) ;
- les échelles caractéristiques du mouvement moyen diminuent, par exemple à la traversée d'une onde de choc.

On peut illustrer la notion de particule fluide en construisant une définition de la masse volumique. On imagine un champ d'écoulement figé à l'instant  $t$ . On va considérer un domaine  $\mathcal{D}$  de volume  $\mathcal{V}$  centré autour d'un point  $M$  de cet écoulement. On appellera  $\rho(\mathcal{D})$  le rapport de la masse totale des molécules contenues dans  $\mathcal{D}$  au volume  $\mathcal{V}$ . Imaginons maintenant que le volume  $\mathcal{V}$  est très supérieur à  $L^3$  et qu'il va diminuer jusqu'à devenir de l'ordre de  $l^3$ . Le rapport  $\rho(\mathcal{D})$  évolue conformément au schéma de la figure 1.1. À grande échelle, le rapport fluctue en fonction d'inhomogénéités macroscopiques : la masse volumique est élevée au niveau du sol, faible en altitude. Dans la limite de  $\mathcal{V}$  tendant vers zéro, l'évolution de  $\rho(\mathcal{D})$  révèle la discontinuité de la matière réelle : le rapport pourra être soit très élevé, soit nul s'il « capture » ou non une molécule. Entre ces deux extrêmes, il existe une plage où  $\rho(\mathcal{D})$  est constant : le domaine  $\mathcal{D}$  contient suffisamment de molécules pour que la statistique sur les molécules qui le peuplent soit stable, et il est suffisamment petit pour que  $\rho(\mathcal{D})$  puisse être considérée comme une valeur locale au niveau macroscopique. Dans cette plage,  $\mathcal{D}$  est

du même ordre que  $\epsilon$  et  $\rho(\mathcal{D})$  prend la valeur correspondant au sens commun qu'on donne à la masse volumique. Ainsi, si la particule fluide est peuplée par un nombre  $N$  de molécules de masse  $m_i$ , on retiendra la définition suivante de la masse volumique :

$$\rho = \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^N m_i.$$

### 1.1.3 Les grandeurs thermodynamiques

On suppose maintenant réunies les conditions d'existence de la particule fluide et on admet une hypothèse d'*équilibre thermodynamique local*, ce qui revient schématiquement à considérer que la particule fluide est en équilibre thermique et qu'on pourra ultérieurement lui appliquer localement les lois de la thermodynamique macroscopique. Pour l'heure, on cherchera simplement à montrer que *les grandeurs thermodynamiques habituelles mesurent les conséquences au niveau macroscopique du mouvement d'agitation moléculaire*.

**La pression** On considère un volume parallélépipédique de fluide répondant aux conditions de définition de la particule fluide. Le volume est perméable aux molécules qui peuvent, du fait de leur mouvement d'agitation, entrer et sortir librement par chacune de ses faces. On va voir que cet échange de matière avec l'extérieur s'accompagne nécessairement d'une variation de la quantité de mouvement contenue dans le volume. En effet, si on en isole une face, on va pouvoir comptabiliser les molécules de fluides entrant et sortant par cette face pendant une unité de temps. On notera ainsi

- $N_0$ , le nombre de molécules de masses  $m_{0i}$  et de vitesses  $\vec{v}_{0i}$  *entrantes* ;
- $N_1$ , le nombre de molécules de masses  $m_{1i}$  et de vitesses  $\vec{v}_{1i}$  *sortantes*.

La quantité de mouvement contenue dans le volume va alors être diminuée de celle correspondant aux molécules sortantes et augmentée de celle correspondant aux molécules entrantes, soit :

$$\Delta[\text{QdM}] = \sum_{i=1}^{N_0} m_{0i} \vec{v}_{0i} - \sum_{i=1}^{N_1} m_{1i} \vec{v}_{1i}.$$

En notant, respectivement,  $M_0$  et  $M_1$  les masses totales entrantes et sortantes ;  $\vec{V}_0$  et  $\vec{V}_1$  les vitesses *barycentriques* (pondérées par la masse) correspondant à chacun des deux ensembles de molécules :

$$\vec{V}_0 = \frac{1}{M_0} \sum_{i=1}^{N_0} m_{0i} \vec{v}_{0i} \quad \text{et} \quad \vec{V}_1 = \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} m_{1i} \vec{v}_{1i},$$

on obtient :

$$\Delta[\text{QdM}] = M_0 \vec{V}_0 - M_1 \vec{V}_1$$

À ce stade, on pourra considérer pour des raisons statistiques et moyennant une hypothèse d'isotropie sur le mouvement moléculaire, que la vitesse  $\vec{V}_1$  est orientée selon la normale extérieure à la face considérée et la vitesse  $\vec{V}_0$  selon la normale intérieure. Il en découle que la variation de quantité de mouvement contenue dans la particule fluide est nécessairement non nulle : les deux contributions jouent dans le même sens (normale intérieure). Cette variation n'étant pas repérable au niveau du milieu continu, elle nécessite l'introduction

d'un champ de force extérieure<sup>1</sup> pour être prise en compte à ce niveau : c'est la pression thermodynamique  $P$ , donnée par la théorie cinétique des gaz sous la forme d'une force par unité de surface, et égale à  $\rho C^2/3$  pour un gaz parfait monoatomique.

**La température** Observée au niveau macroscopique, une particule fluide apparemment au repos possède une énergie cinétique « cachée », liée au mouvement d'agitation des molécules qui l'occupent. C'est l'énergie interne, perçue au niveau macroscopique à travers la température du fluide (proportionnalité stricte pour un gaz parfait à propriétés physiques constantes). Pour un gaz parfait monoatomique, la théorie cinétique des gaz donne

$$\frac{3}{2} k_B T = \frac{1}{2} m C^2,$$

où  $k_B$  est appelée constante de Boltzmann et vaut  $1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K. Pour des molécules plus complexes, il convient d'ajouter à l'énergie cinétique liée au déplacement des molécules ( $1/2 m C^2$ ), les énergies cinétiques qui sont liées aux degrés de liberté en rotation et vibration des molécules.

### 1.1.4 La vitesse macroscopique

De la même manière que les grandeurs thermodynamiques ont été définies comme des fonctions à valeurs locales, on peut introduire la vitesse macroscopique  $\vec{V}$ , telle que

$$\vec{V} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{i=N} m_i}.$$

Il s'agit d'une vitesse *barycentrique*. Si le mouvement des molécules est statistiquement isotrope, cette vitesse est nulle et on a la perception — à notre échelle d'observation — que le fluide est immobile. Dans le cas général d'un fluide en mouvement, on peut considérer que la particule fluide est entraînée *en bloc* à la vitesse macroscopique et que, dans le repère mobile correspondant, l'agitation moléculaire retrouve le caractère aléatoire et isotrope qu'on lui prête quand le fluide est apparemment au repos.

### 1.1.5 Les grandeurs énergétiques

Compte tenu de la nature du matériau, on est amené à définir les énergies comme des fonctions à valeurs locales, rapportées à l'unité de volume ou à l'unité de masse. On introduit ainsi :

- $e = e(T)$  pour l'énergie interne par unité de masse ;
- $e_c = \mathcal{V}^2/2$  pour l'énergie cinétique par unité de masse<sup>2</sup> ;
- $e_t = e + e_c$  pour l'énergie totale par unité de masse ;
- $h = e + P/\rho$  pour l'enthalpie par unité de masse,

ainsi que leurs analogues par unité de volume :  $\rho e$ ,  $\rho e_c$ ,  $\rho e_t$  et  $\rho h$ .

À ce stade, on peut noter que la *pression thermodynamique*  $P$  a la dimension d'une énergie par unité de volume, on l'interprète souvent comme une *énergie potentielle de pression*.

1. L'idée d'introduire un champ de force est suggérée par le théorème de la quantité de mouvement, selon lequel la variation de quantité de mouvement d'un système matériel est égale à la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées.

2. On notera  $\mathcal{V}^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = \|\vec{V}\|^2$ , le carré scalaire du vecteur vitesse.

### En résumé

Les grandeurs thermodynamiques (masse volumique, température et pression), la vitesse macroscopique, ainsi que les différentes grandeurs énergétiques qui s'en déduisent sont des fonctions à valeurs locales de l'espace et du temps dans l'approche milieu continu : elles sont définies sur un volume — la particule fluide — qui à ce niveau de description est assimilé à un point matériel.

## 1.2 La caractérisation locale du mouvement

### 1.2.1 Cinématique des petits mouvements

Du point de vue du milieu continu, la matière apparaît maintenant comme *mobile* et *déformable*. Pour quantifier ces notions, on va considérer un volume matériel infinitésimal dont on va suivre l'évolution temporelle en fonction du champ de vitesse qui lui est appliqué.

**Translation** On se limite à une observation dans le plan. Avec les notations de la figure 1.2, le « volume » matériel est limité par un rectangle  $ABDC$  dans le plan  $(x, y)$ . Si le mouvement se réduit à une translation pendant un temps  $dt$ , cela signifie que la vitesse macroscopique est uniforme dans le rectangle et caractérise un déplacement en bloc, d'amplitude  $\vec{V} \times dt$ .

**Rotation** Dans les mêmes conditions que précédemment, si on considère une rotation pure autour du point  $A$  du rectangle  $ABDC$  et d'amplitude  $d\alpha = \omega dt$ , les cotés  $AB$  et  $AC$  tournent de la même valeur  $d\alpha$ . C'est-à-dire, dans la limite d'un volume infinitésimal, de :

- $\frac{\partial V}{\partial x} \times dx \times dt \div dx$  pour  $AB$  ;
- $-\frac{\partial U}{\partial y} \times dy \times dt \div dy$  pour  $AC$ .

On peut donc écrire :

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right).$$

On reconnaît la composante perpendiculaire au plan du vecteur rotationnel de la vitesse. Il n'y a pas de difficulté à généraliser ce résultat dans l'espace à trois dimensions et on retiendra que, localement, les trois composantes de la vitesse de rotation d'un volume de fluide infinitésimal sont caractérisées par le *vecteur tourbillon*, défini par

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V}.$$

**Déformation cubique : contraction-expansion** On s'intéresse maintenant au cas où le volume fluide est simplement contracté ou dilaté, ce qui signifie que sur chacun des cotés du rectangle  $ABDC$  la vitesse est uniforme et orthogonale au coté considéré. On a alors comme étirement pendant un temps  $dt$  :

- $l_x = \frac{\partial U}{\partial x} \times dx \times dt$  pour  $AB$  ;
- $l_y = \frac{\partial V}{\partial y} \times dy \times dt$  pour  $AC$ .

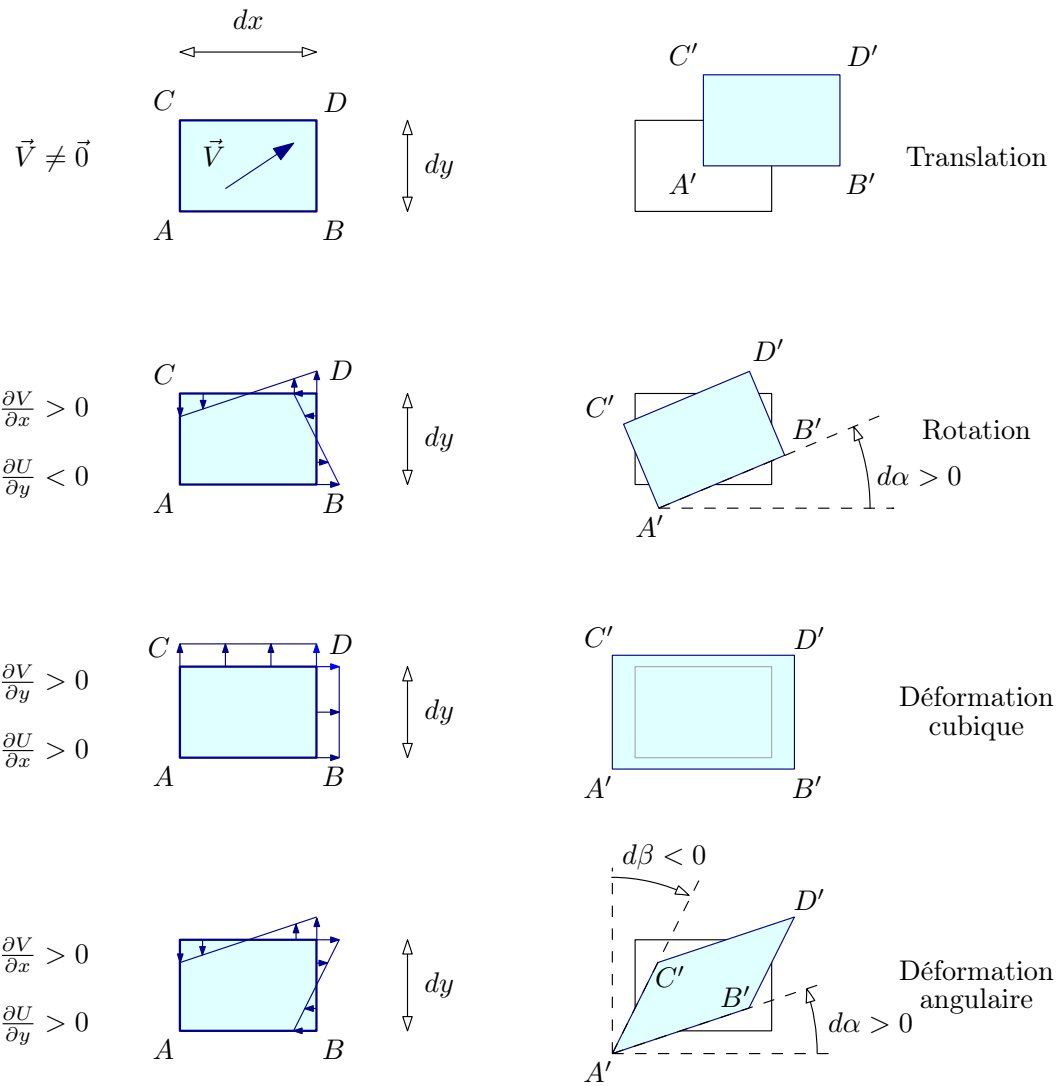


FIGURE 1.2 – Cinématique des petits mouvements décrite à partir d'un volume « infinitésimal » de fluide.

L'augmentation relative de surface par unité de temps du rectangle  $ABDC$  est donc, au premier ordre :

$$\frac{1}{dt} \left( \frac{l_x \times dy + l_y \times dx}{dx \times dy} \right) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}.$$

On reconnaît la divergence de la vitesse dans le plan. Ici aussi le résultat peut se généraliser facilement en trois dimensions et on retiendra que *le taux d'expansion cubique*  $\vartheta$  s'écrit :

$$\vartheta = \operatorname{div} \vec{V}.$$

On note de plus que la divergence du champ de vitesse est égale à la trace de la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse, encore appelé *tenseur des taux de déformation* :

$$\bar{\bar{S}} = [S_{ij}] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right].$$

**Déformation angulaire pure** Le cas que nous allons maintenant envisager est celui où le champ de vitesse provoque des rotations de faces en sens opposés pour les cotés horizontaux et verticaux du rectangle  $ABDC$ . Ainsi, si les cotés  $AB$  et  $CD$  tournent autour de leurs points milieu d'un angle  $d\alpha$ , le volume de la cellule n'est pas affecté, et il en va de même si les cotés  $AC$  et  $BD$  tournent eux aussi autour de leurs points milieu, d'un angle  $d\beta$ . Avec les conventions de la figure 1.2, la valeur de chacun de ces deux angles peut être reliée à l'évolution du champ de vitesse :

- $d\alpha = \frac{\partial V}{\partial x} \times dx \times dt \div dx$  ;
- $d\beta = -\frac{\partial U}{\partial y} \times dy \times dt \div dy$ .

Par suite le taux de variation de l'angle  $\widehat{BAC}$  peut s'écrire

$$\frac{d\widehat{BAC}}{dt} = \frac{d\beta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} = - \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -2 S_{12}.$$

On voit que les termes non diagonaux du tenseur des taux de déformation mesurent les vitesses de déformation angulaire d'un volume infinitésimal de fluide. Si de plus, les angles  $d\alpha$  et  $d\beta$  sont égaux en valeur absolue on en déduit immédiatement que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \text{soit : } \omega_z = 0.$$

On a alors affaire à une *déformation angulaire pure*, libre de toute déformation cubique et de toute rotation.

### En résumé

Assimiler la particule fluide à un point matériel au niveau du milieu continu semble interdire de repérer la rotation et la déformation d'une entité matérielle qui possède à l'origine des dimensions finies non nulles. En réalité, l'information n'est pas perdue et reste accessible à travers les opérateurs différentiels du champs de vitesse. On retiendra donc qu'il est possible de mesurer :

1. la rotation de la particule fluide sur elle-même à l'aide du rotationnel du champ de vitesse macroscopique :

$$\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{V} ;$$

2. les déformations unidirectionnelles par contraction-expansion à l'aide des composantes normales du tenseur des taux de déformations :

$$S_{11} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad S_{22} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{et} \quad S_{33} = \frac{\partial W}{\partial z} ;$$

3. la déformation en volume (déformation cubique) à l'aide de la divergence du champ de vitesse macroscopique :

$$\vartheta = \text{div } \vec{V} = \text{tr } \overline{\overline{S}} ;$$

4. les déformations angulaires à l'aide des composantes non-diagonales du tenseur des taux de déformations (tensions de cisaillement) :

$$S_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad S_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad \text{et} \quad S_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right).$$

La figure 1.3 présente les particularités du mouvement local dans quelques configurations d'écoulement types. L'exemple du tourbillon à circulation constante illustre bien la distinction qu'il convient de faire entre mouvement local et allure générale de l'écoulement : les trajectoires sont circulaires mais sans rotation des particules fluides sur elles-mêmes.

### 1.2.2 Propriétés du champ de vitesse

**Évolution isovolume** L'évolution est dite isovolume si, en tout point du champ et à tout instant, on vérifie

$$\text{div } \vec{V} = 0.$$

L'analyse présentée plus haut montre que, dans ces conditions, une masse fluide donnée conserve le même volume *au cours de son mouvement*. En appliquant ce résultat à la particule fluide on en déduit que la masse volumique est constante sur une trajectoire *bien qu'elle puisse varier entre deux trajectoires*. Un exemple d'évolution isovolume et masse volumique variable est illustré dans la figure 1.4. On retiendra que si le fluide est incompressible, l'évolution est nécessairement isovolume, mais que la réciproque n'est pas vraie.

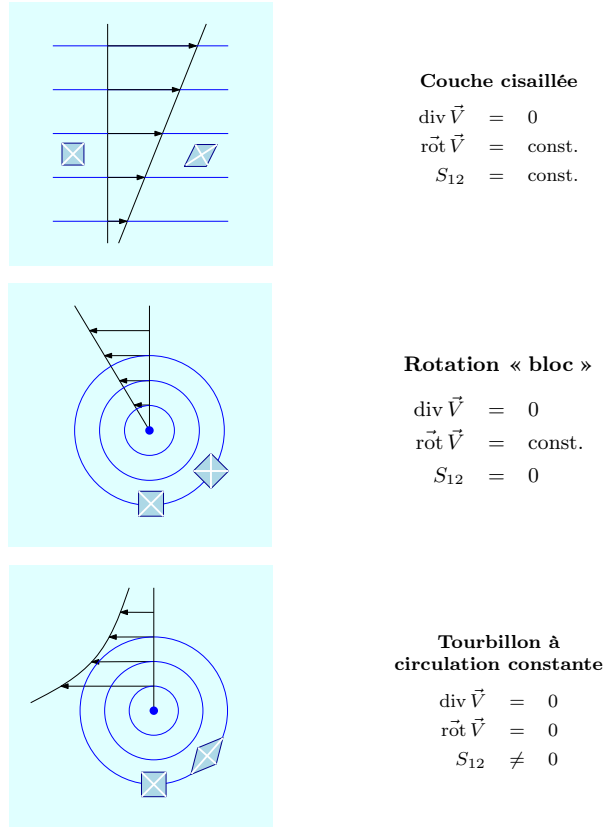


FIGURE 1.3 – Configurations d'écoulements typiques et caractéristiques locales du mouvement.

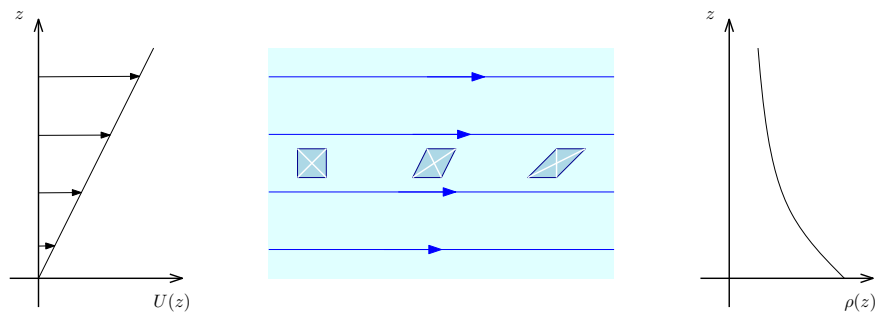


FIGURE 1.4 – Atmosphère stratifiée en vitesse et en densité. La masse volumique varie en  $z$ , mais l'évolution est isovolume : la valeur du volume infinitésimal de fluide se conserve dans le mouvement.

Si le champ de vitesse est sans divergence, on dit qu'il est *solénoïdal* et un résultat général est qu'il existe un champ  $\vec{\psi}$  tel que :

$$\vec{V} = \text{rot } \vec{\psi}$$

Le vecteur  $\vec{\psi}$  est un potentiel vecteur du champ de vitesse, il n'est pas défini de manière unique par la relation ci-dessus puisque, si  $f$  est une fonction quelconque suffisamment dérivable de l'espace, alors

$$\text{rot}(\vec{\psi} + \text{grad } f) = \text{rot } \vec{\psi} = \vec{V}.$$

Ceci montre que le vecteur  $\vec{\psi}$  est défini au gradient d'une fonction arbitraire près. On pourra par suite préciser cette définition et simplifier le problème en introduisant la condition supplémentaire<sup>3</sup> :

$$\text{div } \vec{\psi} = 0.$$

Le vecteur  $\vec{\psi}$  ainsi défini est appelé *fonction courant vectorielle*.

**Écoulement irrotationnel** L'écoulement est dit irrotationnel si, en tout point du champ et à tout instant, il vérifie

$$\text{rot } \vec{V} = 0.$$

Dans ces conditions, on dit que  $\vec{V}$  dérive d'un potentiel, et il existe une *fonction potentiel de vitesse*  $\phi$ , définie à une constante additive près, telle que

$$\vec{V} = \text{grad } \phi.$$

L'équation d'une surface équipotentielle, repérée dans l'écoulement à un instant donné, peut être donnée sous forme différentielle :

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz = 0,$$

soit :

$$\text{grad } \phi \cdot d\vec{x} = \vec{V} \cdot d\vec{x} = 0$$

ce qui montre qu'à tout instant le vecteur vitesse est orthogonal aux surfaces équipotentielles.

## 1.3 Éléments de description globale du mouvement

### 1.3.1 Définitions

**Écoulement stationnaire ou permanent** On dit que l'écoulement est stationnaire ou permanent si, en tout point et à tout instant, les fonctions de description de l'écoulement ne dépendent pas du temps, c.-à-d. que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

quelle que soit la fonction  $f$  considérée.

3. Ceci revient à ne retenir que la partie solénoïdale (sans divergence) dans la décomposition de Helmholtz du champ de vecteur  $\vec{\psi}$ , ceci est toujours possible si ce dernier est suffisamment dérivable.

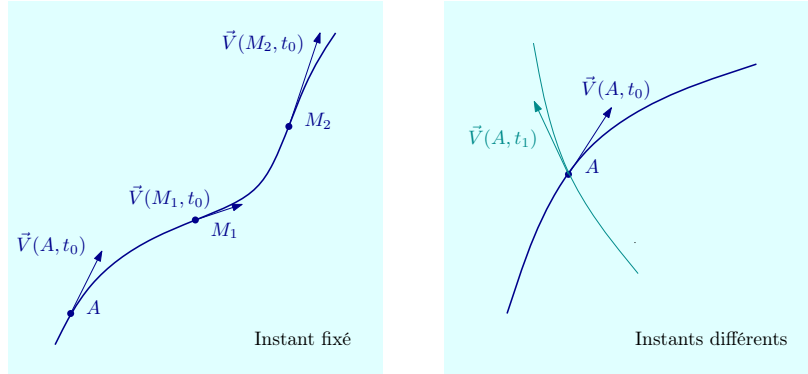


FIGURE 1.5 – Ligne de courant : courbe définie par la donnée du point  $A$  et de l'instant d'observation  $t_0$ .

**Écoulement bidimensionnel** On dit qu'un écoulement est bidimensionnel si le champ de vitesse est invariant par translation le long d'une direction fixe. Si on choisit le repère cartésien  $(O, x, y, z)$  de sorte que la direction d'invariance soit l'axe  $Oz$ , on aura

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = 0 \quad \text{ou, de manière équivalente,} \quad \vec{V} = \vec{V}(x, y, t).$$

**Écoulement axisymétrique ou à symétrie de révolution** On dit qu'un écoulement est axisymétrique si le champ de vitesse est invariant par rotation autour d'un axe fixe. Si on définit un système de coordonnées polaires  $(O, r, \theta, z)$  de sorte que le champ de vitesse soit invariant par rotation autour de l'axe polaire, on aura

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{ou, de manière équivalente,} \quad \vec{V} = \vec{V}(r, z, t).$$

**Écoulement plan** On dit qu'un écoulement est plan si, en tout point et à tout instant, le vecteur vitesse est contenu dans un plan fixe. Si on choisit le repère  $(O, x, y, z)$  de sorte que le vecteur vitesse soit contenu dans le plan  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ , on aura

$$\forall(x, y, z, t), \quad W(x, y, z, t) = 0.$$

### 1.3.2 Surfaces et lignes particulières d'un écoulement

**Lignes de courant** La courbe passant par un point  $A$  et tangente au vecteur vitesse en chacun de ses points à un instant donné  $t_0$  est appelée *ligne de courant*. Elle est parfaitement définie par la donnée de  $A$  et de  $t_0$ . Cette définition est illustrée sur la figure 1.5. Si  $M(x, y, z)$  appartient à la ligne de courant, on aura :

$$d\vec{OM} \wedge \vec{V}(x, y, z, t_0) = 0,$$

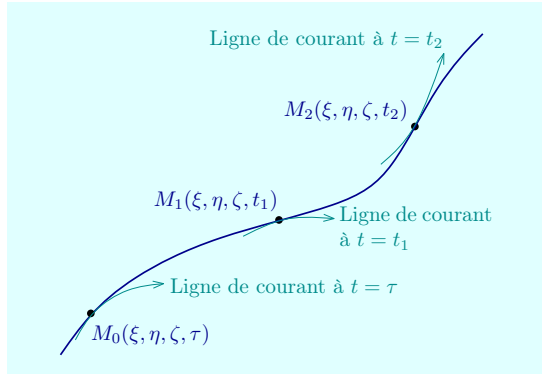


FIGURE 1.6 – Trajectoire : courbe définie par la donnée d'un point et d'un instant de référence.

et les équations différentielles correspondantes :

$$\frac{dx}{U(x, y, z, t_0)} = \frac{dy}{V(x, y, z, t_0)} = \frac{dz}{W(x, y, z, t_0)}.$$

Un *tube de courant* est défini par la donnée d'un contour fermé  $\mathcal{C}$  et d'un temps  $t$ , c'est la surface définie par l'ensemble des lignes de courant passant par un point de  $\mathcal{C}$  à l'instant  $t_0$ . À chaque instant, c'est une surface imperméable.

Si l'évolution du fluide est isovolume, on a vu précédemment qu'il existait une fonction  $\vec{\psi}$  telle que  $\vec{V} = \text{rot } \vec{\psi}$ . Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel-plan, la fonction vectorielle  $\vec{\psi}$  se réduit à sa composante  $\psi$  normale au plan (cf. annexe A), et on a

$$U(x, y, t) = \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y} \quad \text{et} \quad V(x, y, t) = -\frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x},$$

si l'écoulement a lieu dans le plan  $(x, y)$ . En reportant ces expressions dans l'équation différentielle d'une ligne de courant, on obtient

$$\frac{dx}{\partial \psi / \partial y} = -\frac{dy}{\partial \psi / \partial x}$$

soit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

qui, à l'instant  $t$ , représente la variation  $d\psi$  le long d'une ligne de courant. On montre ainsi, que dans un *écoulement bidimensionnel-plan en évolution isovolume*, la fonction courant est constante le long d'une ligne de courant, d'où son nom.

**Trajectoires** La courbe définie par les positions successives d'une même particule fluide est appelée *trajectoire* (cf. figure 1.6). Elle est uniquement définie par la position  $(x_A, y_A, z_A)$  de la particule considérée à un instant donné  $(t_0)$ . Ses équations différentielles peuvent être

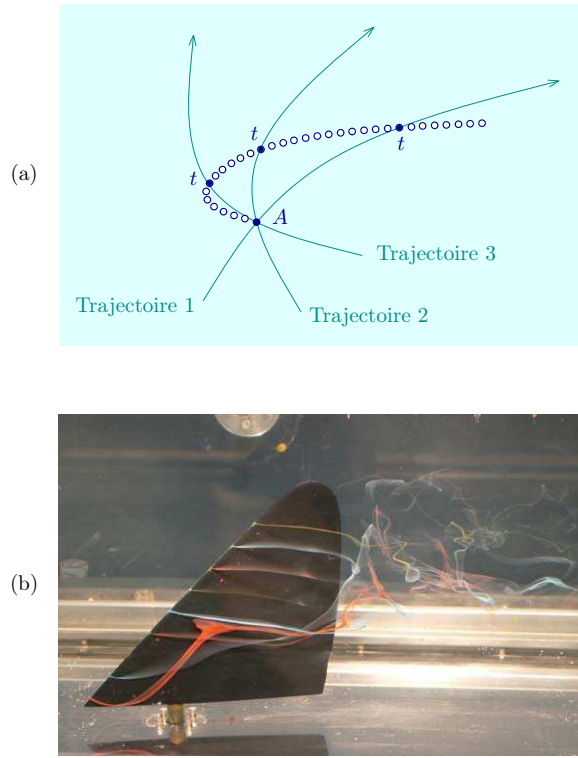


FIGURE 1.7 – Ligne d’émission : (a) construction ; (b) visualisation par traceurs colorés en cuve à eau (photo ISAE).

données sous forme paramétrique — le paramètre étant le temps — sous la forme :

$$\begin{aligned} dx &= U(x, y, z, t) \times dt \\ dy &= V(x, y, z, t) \times dt \\ dz &= W(x, y, z, t) \times dt \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_A \\ y(t_0) = y_A \\ z(t_0) = z_A \end{cases} .$$

**Ligne d’émission** La courbe constituée par les positions, à un instant donné  $t$ , de toutes les particules fluides qui sont passées précédemment par un point fixe  $A$  est appelée ligne d’émission. Elle est parfaitement définie par la donnée de  $A$  et  $t$ . Cette définition est illustrée sur la figure 1.7(a). La notion de ligne d’émission est étroitement liée à certaines méthodes expérimentales de visualisation d’écoulement. Comme on peut le voir sur la figure 1.7(b), quand un traceur (ici des colorants dans un écoulement d’eau) est injecté continûment en un point fixe du champ, la répartition du traceur à un instant donné marque une ligne d’émission.

**Cas particulier du régime permanent** En régime permanent ( $\partial \vec{V} / \partial t = 0$ ), ligne d’émission, ligne de courant et trajectoire passant par un même point sont confondues.

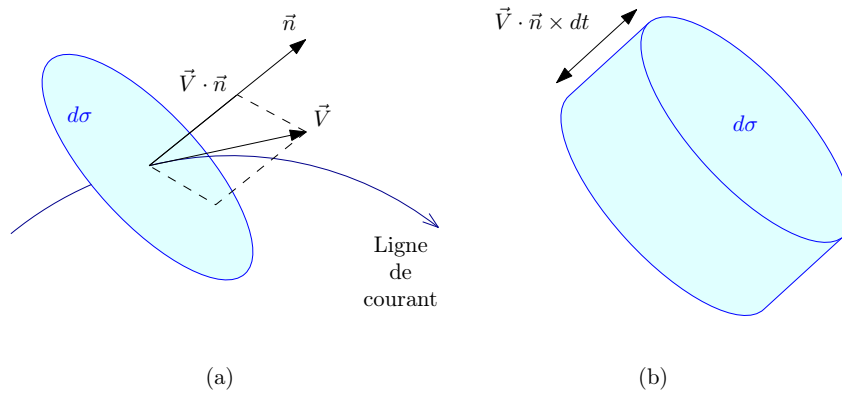


FIGURE 1.8 – Définition d'un flux d'advection élémentaire : (a) références et notations, (b) visualisation du volume de fluide ayant traversé la surface  $d\sigma$  pendant un temps  $dt$ .

### 1.3.3 Flux et débits

**Flux généralisé** On considère la surface élémentaire  $d\sigma$  de normale  $\vec{n}$  représentée sur la figure 1.8(a). Si elle est traversée par le fluide à la vitesse  $\vec{V}$ , la figure 1.8(b) montre que le volume fluide la traversant pendant un temps  $dt$  est égal à  $\vec{V} \cdot \vec{n} dt \times d\sigma$ . Si on considère maintenant une fonction de l'écoulement  $q(x, y, z, t)$  — grandeur rapportée à l'unité de volume — le montant  $dq$  de cette grandeur passant à travers la surface  $d\sigma$  par unité de temps est appelé *flux élémentaire d'advection* de  $q$ . Il s'écrit

$$dq = q \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

et, plus généralement, le montant  $Q$  de cette grandeur traversant une surface  $\mathcal{S}$  de dimension finie pourra s'exprimer sous la forme :

$$Q = \iint_{\mathcal{S}} q \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Dans le cas où  $\mathcal{S}$  est une surface fermée,  $\vec{n}$  sera par convention la normale extérieure de sorte qu'un flux sortant soit compté positivement. Le vecteur  $q\vec{V}$  est appelé *densité*<sup>4</sup> de flux d'advection de la grandeur  $q$ .

**Débit volume** En prenant  $q = 1$ , on revient au volume de fluide qui traverse la surface  $\mathcal{S}$  pendant l'unité de temps. C'est le débit volume, souvent noté  $Q_v$ .

**Débit masse** En prenant  $q = \rho$ , on obtient le débit masse, c'est-à-dire la masse de fluide qui traverse la surface  $\mathcal{S}$  pendant l'unité de temps.

**Débit volume et fonction courant** Dans le cas d'une évolution isovolume, on a vu qu'il existait une fonction courant vectorielle  $\vec{\psi}$  tel que  $\vec{V} = \text{rot } \vec{\psi}$ . Le débit volume à travers une

4. C'est-à-dire *par unité de surface*.

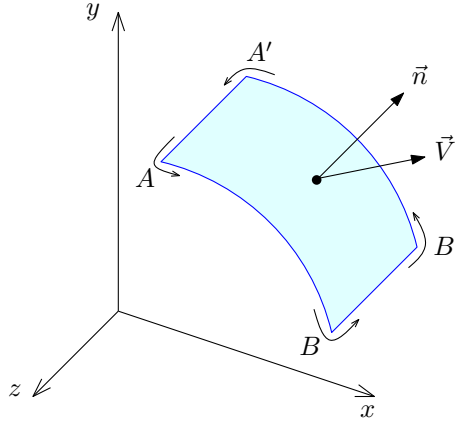


FIGURE 1.9 – Débit volume et fonction courant : la fonction courant prend une valeur constante  $\psi_A$  sur le segment  $AA'$  et une valeur constante  $\psi_B$  sur le segment  $BB'$ , l'arc  $A'B'$  correspond à la translation de l'arc  $AB$  d'une unité de longueur selon  $z$ .

surface  $\mathcal{S}$  peut donc s'écrire :

$$Q_v = \iint_{\mathcal{S}} \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{\psi} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

En appliquant la formule de Stokes, il vient :

$$Q_v = \int_{\partial\mathcal{S}} \vec{\psi} \cdot \vec{dl}$$

Si maintenant on se place dans le cas d'un écoulement *bidimensionnel-plan*, on va considérer une surface limitée par la courbe  $ABB'A'$ , elle-même constituée par l'arc  $AB$  dans le plan  $(x, y)$  et l'arc  $A'B'$  parallèle dans un plan translaté d'une unité dans le sens des  $z$  négatifs (cf. figure 1.9). En écoulement bidimensionnel-plan, la fonction courant vectorielle se réduit à sa seule composante ( $\psi$ ) suivant  $z$  (cf. annexe A) et on peut écrire l'expression du débit *par unité de longueur suivant  $z$*  sous la forme

$$Q_v = \int_{AB} \psi \vec{k} \cdot \vec{dl} + \int_{BB'} \psi \vec{k} \cdot \vec{dl} + \int_{B'A'} \psi \vec{k} \cdot \vec{dl} + \int_{A'A} \psi \vec{k} \cdot \vec{dl}.$$

Les intégrales sur  $AB$  et  $B'A'$  sont toutes deux nulles tandis que  $\psi$  est constant sur  $AA'$  et  $BB'$ , respectivement égal à  $\psi_A$  et  $\psi_B$ , d'où :

$$Q_v = \psi_A - \psi_B$$

On voit :

- (i) que le résultat est indépendant du trajet entre  $A$  et  $B$  ;
- (ii) que le résultat serait inchangé si on déplaçait les points  $A$  et  $B$  sur leurs lignes de courant respectives.

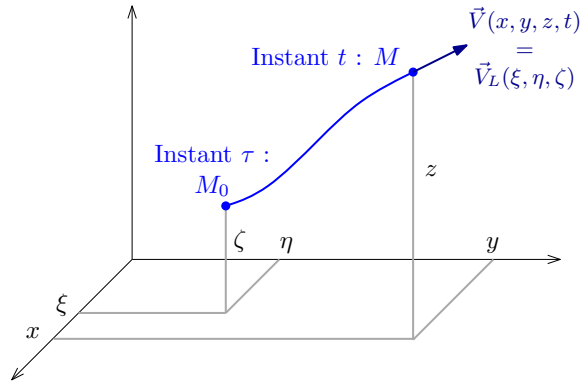


FIGURE 1.10 – Définition des variables de Lagrange  $(\xi, \eta, \zeta)$  :  $\tau$  est l'instant de référence,  $(x, y, z)$  sont les variables d'Euler. Noter que les valeurs de la fonction Eulérienne ( $\vec{V}$ ) et de son homologue Lagrangienne ( $\vec{V}_L$ ) sont égales au point  $M$  à l'instant  $t$ , ce sont les dépendances fonctionnelles qui diffèrent puisqu'elles ne s'appliquent pas aux mêmes variables.

## 1.4 Le point de vue Lagrangien

Jusqu'à présent, on a considéré que le fluide et son mouvement étaient décrits par des fonctions des variables espace et temps repérées de manière « naturelle » :  $f(x, y, z, t)$  représente la valeur de la fonction  $f$  au point  $M(x, y, z)$  à l'instant  $t$ . C'est la vision *Eulérienne* du mouvement et les variables  $(x, y, z, t)$  sont appelées *variables d'Euler*. Cette vision est associée à la notion de *point de contrôle* : en observant un point  $M$  fixe dans l'espace, on considère à des temps différents des particules fluides différentes. Ceci constitue la limitation principale de cette approche, dans la mesure où les principes de la mécanique s'appliquent le plus souvent à une masse donnée en mouvement. Pour contourner cette limitation, on introduit les *variables de Lagrange*, associées à la notion de *point matériel*. Elles repèrent l'état cinématique et thermodynamique d'une particule fluide, à un *instant donné, sur sa trajectoire*. Pour les définir, on fixe un instant de référence  $\tau$ , et la valeur de la fonction considérée en un point  $M(x, y, z)$  à l'instant  $t$  ne dépend que

- du temps  $t$  ;
- du point  $M_0(\xi, \eta, \zeta)$  où se trouvait la même particule à l'instant de référence (cf. figure 1.10).

$(\xi, \eta, \zeta, t)$  sont appelées *variables de Lagrange*. La valeur  $f_L(\xi, \eta, \zeta, t)$  est la valeur de la grandeur  $f$  au point, *quel qu'il soit*, où se trouve à l'instant  $t$  la particule qui était en  $M_0$  à  $t = \tau$  et on peut écrire :

$$M_0 \vec{M} = \int_{\tau}^t \vec{V}_L(\xi, \eta, \zeta, \alpha) d\alpha$$

où  $\xi, \eta$  et  $\zeta$  ne varient pas dans l'intégrale puisque  $\vec{V}_L$  réfère toujours à la même masse fluide.

Les notions de point de contrôle et de point matériel se généralisent de manière immédiate à celles de *volume de contrôle* et de *volume matériel*.

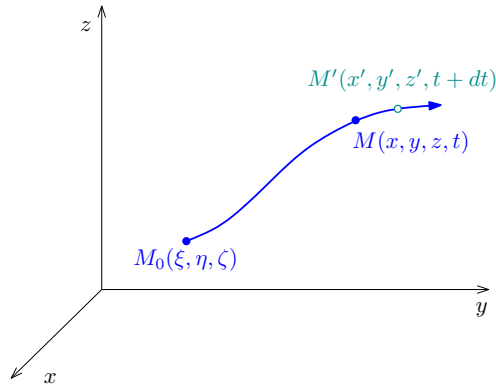


FIGURE 1.11 – Dérivée particulière :  $\frac{df}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(M') - f(M)}{dt}$ , variation de la grandeur  $f$  au cours du mouvement.

### 1.4.1 Dérivation particulière

**Définition** La dérivée particulière<sup>5</sup> d'une grandeur exprime la variation par rapport au temps de cette grandeur en suivant un point matériel en mouvement. Elle n'est rien d'autre que la dérivée partielle par rapport au temps de la fonction exprimée en variables de Lagrange quand  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$  sont fixées (cf. figure 1.11). On la note  $d/dt$  et on écrira<sup>6</sup>

$$\frac{df}{dt} = \left. \frac{\partial f_L}{\partial t} \right|_{\xi, \eta, \zeta}.$$

On peut effectuer le changement de variables permettant de se ramener dans une représentation Eulérienne :

$$\left. \frac{\partial f_L}{\partial t} \right|_{\xi, \eta, \zeta} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{\xi, \eta, \zeta} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{\xi, \eta, \zeta} + \frac{\partial f}{\partial z} \times \left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{\xi, \eta, \zeta} + \frac{\partial f}{\partial t} \times \left. \frac{\partial t}{\partial t} \right|_{\xi, \eta, \zeta}.$$

On reconnaît les composantes de vitesse et on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial x} + V \frac{\partial f}{\partial y} + W \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} f. \end{aligned}$$

**Remarque** La dérivée particulière se manipule de la même manière qu'une dérivée ordinaire. Ainsi, si  $a$  est une constante,  $f$  et  $g$  deux fonctions de l'espace et du temps, on peut écrire

$$\frac{d}{dt}(af) = a \frac{df}{dt}$$

5. Également appelée dérivée matérielle, dérivée totale ou encore dérivée Lagrangienne.

6. Noter la différence d'écriture entre la variation particulière  $df$  et une différentielle ordinaire  $df$  : la différentielle est la variation de la grandeur  $f$  entre deux points infiniment proches  $M$  et  $M'$ , la variation particulière s'y identifie si et seulement si les deux points appartiennent à une même trajectoire.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(fg) &= f \times \frac{dg}{dt} + g \times \frac{df}{dt} \\ \frac{d}{dt}(f+g) &= \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt}\end{aligned}$$

**Dérivée particulière d'une fonction vectorielle** Si on considère maintenant un champ de vecteur  $\vec{A}(x, y, z, t)$ , il n'y a pas de difficulté à montrer que la dérivée particulière de ce vecteur peut s'écrire

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + U \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + V \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + W \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}.$$

Cas particulier : l'accélération La dérivée particulière de la vitesse correspond à l'accélération du point matériel. On peut montrer qu'elle se met sous la forme

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\mathcal{V}^2}{2} + \text{rot} \vec{V} \wedge \vec{V},$$

à partir de la relation générale d'analyse vectorielle :

$$\text{grad} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \wedge \text{rot} \vec{B} + \vec{B} \wedge \text{rot} \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}.$$

Remarque En écoulement permanent, la dérivée *partielle* du vecteur vitesse par rapport au temps est nulle en tout point et à tout instant. Il ne faudra pas en déduire que l'accélération l'est aussi. En effet, dans ce cas, on aura

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \text{grad} \frac{\mathcal{V}^2}{2} + \text{rot} \vec{V} \wedge \vec{V},$$

qui est généralement non nulle.

**Dérivée particulière d'une intégrale de volume** On s'intéresse maintenant à la variation particulière de la quantité  $f$  intégrée sur un volume matériel fini  $\mathcal{D}$ , soit :

$$\mathcal{I} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} f(x, y, z, t) dx dy dz.$$

On ne peut pas transférer la dérivée particulière sous l'intégrale car le volume  $\mathcal{D}$  se déplace et se déforme en fonction du temps. Il est possible cependant, en passant en variables de Lagrange, de se ramener à un volume invariant en temps : celui qu'occupait le fluide à l'instant de référence c.-à-d.  $\mathcal{D}(\tau)$ . On obtient ainsi une nouvelle expression de l'intégrale :

$$\mathcal{I} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(\tau)} f_L(\xi, \eta, \zeta, t) \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta,$$

où figure le Jacobien du changement de variable :

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial x / \partial \eta & \partial x / \partial \zeta \\ \partial y / \partial \xi & \partial y / \partial \eta & \partial y / \partial \zeta \\ \partial z / \partial \xi & \partial z / \partial \eta & \partial z / \partial \zeta \end{vmatrix}.$$

On peut maintenant faire entrer la dérivation particulière sous l'intégrale pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \iiint_{\mathcal{D}(\tau)} \frac{df_L}{dt} \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta \\ &+ \iiint_{\mathcal{D}(\tau)} f_L \frac{d}{dt} \left( \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right) d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

En revenant aux variables d'Euler, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{df}{dt} dx dy dz \\ &+ \iiint_{\mathcal{D}(t)} f \frac{d}{dt} \left( \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right) \times \frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x, y, z)} dx dy dz, \end{aligned}$$

or les règles de dérivation des Jacobiens permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right) &= \frac{D(dx/dt, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} + \frac{D(x, dy/dt, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} + \frac{D(x, y, dz/dt)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \\ &= \frac{D(U, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} + \frac{D(x, V, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} + \frac{D(x, y, W)}{D(\xi, \eta, \zeta)}, \end{aligned}$$

et donc :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right) \times \frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x, y, z)} = \frac{D(U, y, z)}{D(x, y, z)} + \frac{D(x, V, z)}{D(x, y, z)} + \frac{D(x, y, W)}{D(x, y, z)},$$

qui n'est autre que la divergence de  $\vec{V}$ . On retiendra donc que

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} f dx dy dz = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left( \frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \vec{V} \right) dx dy dz.$$

En explicitant la dérivée particulière sous l'intégrale, on obtient l'expression équivalente :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} f dx dy dz = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{V}) \right) dx dy dz.$$

### 1.4.2 Le principe de continuité et ses conséquences

Si on applique les résultats obtenus précédemment avec  $f = \rho$ , la dérivée particulière correspond à la variation de la masse contenue dans le volume matériel  $\mathcal{D}$  au cours de son mouvement. Par définition du volume matériel, cette masse est constante au cours du mouvement, c'est le principe de continuité. On obtient ainsi :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho dx dy dz = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \right) dx dy dz = 0.$$

L'intégrale est nulle quel que soit  $\mathcal{D}$ , on peut donc en déduire que l'intégrande l'est également en tout point de l'espace. On obtient ainsi *l'équation de continuité* :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0,$$

qu'on peut aussi écrire — en développant la divergence — sous la forme :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0.$$

Sous cette forme, il apparaît clairement qu'en évolution isovolume, la dérivée particulaire de la masse volumique est nulle et donc que  $\rho$  est constante le long d'une trajectoire.

**Une première conséquence du principe de continuité : le théorème de Reynolds**

Ce résultat permet de simplifier grandement l'expression de la dérivée particulaire d'une intégrale de volume quand la fonction intégrée est une grandeur par unité de volume, c.-à-d. de la forme  $\rho f$ . On peut en effet écrire que

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho f \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left( \frac{d\rho f}{dt} + \rho f \operatorname{div} \vec{V} \right) dx \, dy \, dz,$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho f \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{df}{dt} \, dx \, dy \, dz \\ &+ \iiint_{\mathcal{D}(t)} f \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} \right) dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

La deuxième intégrale est nulle d'après le principe de continuité, on peut donc énoncer le théorème de Reynolds sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho f \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{df}{dt} \, dx \, dy \, dz.$$

**Une deuxième conséquence du principe de continuité : la forme conservative**

Un autre résultat intéressant concerne la *variation particulaire par unité de volume* de la grandeur  $f$  :

$$\rho \frac{df}{dt}.$$

Par définition de la dérivée particulaire, on peut écrire que

$$\rho \frac{df}{dt} = \rho \frac{\partial f}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \vec{\operatorname{grad}} f,$$

soit :

$$\rho \frac{df}{dt} = \frac{\partial \rho f}{\partial t} - f \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho f \vec{V}) - f \operatorname{div} (\rho \vec{V}).$$

Ici encore, l'application du principe de continuité permet d'aboutir à une formulation simple :

$$\rho \frac{df}{dt} = \frac{\partial \rho f}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho f \vec{V}),$$

appelée *forme conservative*. Cette dénomination vient de la forme en divergence des termes de variation spatiale : les propriétés de la divergence font que, quand ces termes sont intégrés

sur un volume « étanche », le résultat net est nul<sup>7</sup>. Ce terme ne produit donc pas de variation du montant total (intégré sur le volume étanche) de la quantité considérée, et exprime simplement un transfert spatial — sans gain ni perte — au sein du volume occupé par le fluide.

---

7. L'intégrale de volume de la divergence se ramène à une intégrale de surface du flux.



# Chapitre 2

## Modélisation

### 2.1 Les principes fondamentaux

#### 2.1.1 Conservation de la masse

**Forme locale : l'équation de continuité** Le principe de conservation de la masse se traduit par l'équation de continuité présentée dans le chapitre précédent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{V}.$$

**Formulation globale en écoulement permanent** En écoulement permanent, l'équation de continuité se simplifie sous la forme

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0.$$

On peut l'intégrer sur le volume  $\mathcal{D}$  limité par un tube de courant et deux de ses sections  $\mathcal{A}_e$  et  $\mathcal{A}_s$  (cf. figure 2.1), pour obtenir

$$\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\mathcal{A}_e + \mathcal{A}_s + \Sigma} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0,$$

où  $\Sigma$  est la portion de tube de courant limitée par les deux sections  $\mathcal{A}_e$  et  $\mathcal{A}_s$ . Par définition,  $\vec{V} \cdot \vec{n}$  est identiquement nul sur  $\Sigma$  et on obtient :

$$\iint_{\mathcal{A}_e} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\sigma + \iint_{\mathcal{A}_s} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0.$$

On reconnaît dans la première intégrale, l'opposé du débit masse entrant dans le domaine  $\mathcal{D}$  par la surface  $\mathcal{A}_e$ , et dans la seconde le débit masse sortant du domaine par la surface  $\mathcal{A}_s$ . L'équation obtenue matérialise donc le fait que le débit masse reste constant à travers toute section d'un tube de courant.

En introduisant maintenant les masses volumique moyennées dans chacune des deux sections

$$\rho_e = \frac{\iint_{\mathcal{A}_e} \rho \, d\sigma}{S_e}, \quad \rho_s = \frac{\iint_{\mathcal{A}_s} \rho \, d\sigma}{S_s};$$

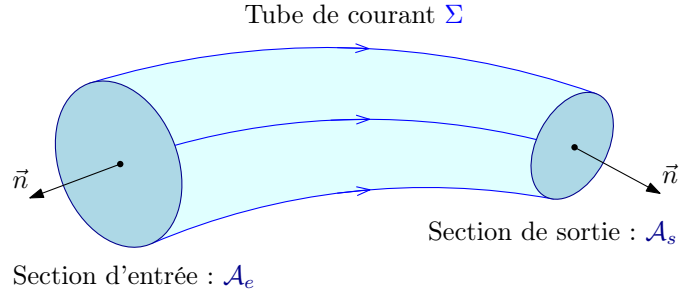


FIGURE 2.1 – Conservation du débit-masse dans un tube de courant.

les vitesses moyennes débitantes définies comme

$$V_e = -\frac{\iint_{\mathcal{A}_e} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\sigma}{\rho_e S_e}, \quad V_s = \frac{\iint_{\mathcal{A}_s} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\sigma}{\rho_s S_s};$$

où  $S_e$  et  $S_s$  sont les valeurs algébriques des sections d'entrée et de sortie :

$$S_e = \iint_{\mathcal{A}_e} d\sigma, \quad S_s = \iint_{\mathcal{A}_s} d\sigma;$$

on obtient la relation couramment utilisée en hydraulique :

$$\boxed{\rho_e S_e V_e = \rho_s S_s V_s.}$$

## 2.1.2 Bilan de quantité de mouvement

**Formulation locale : les équations de la dynamique** Le théorème de la quantité de mouvement appliqué à un système matériel fermé indique que la variation de quantité de mouvement de ce système est égale à la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées. Dans notre contexte, il convient de l'appliquer à un *volume matériel*  $\mathcal{D}(t)$  en mouvement. La variation de quantité de mouvement par unité de temps s'exprime alors par

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \vec{V} \, dx \, dy \, dz.$$

Dans les forces appliquées au domaine, on compte d'abord des forces extérieures de volume qui font partie des données du problème (la pesanteur par exemple), on les rapportera à l'unité de masse et on les notera  $\vec{F}$ . Il y a ensuite des forces de surface qui résultent de l'action du fluide environnant sur le domaine  $\mathcal{D}$ . Celles-ci sont déterminées à partir du tenseur des contraintes déjà introduit en élasticité, dont on rappellera la définition et les propriétés ci-dessous.

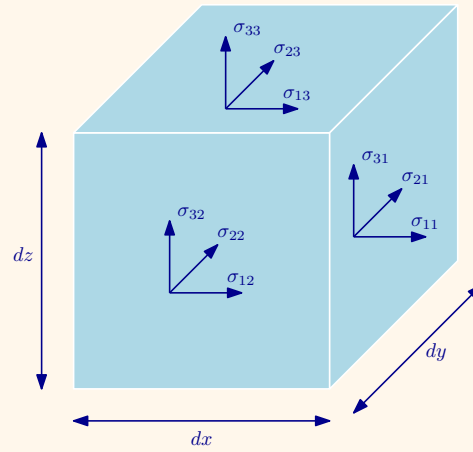
### Tenseur des contraintes

La contrainte  $\sigma_{ij}$  est l'effort par unité de surface exercé par le fluide environnant dans la direction  $x_i$  sur une facette de normale  $x_j$ .  $\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}]$  est le tenseur des contraintes. Ce tenseur possède des propriétés remarquables :

- il est symétrique,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  ;
- l'effort exercé au point  $M$  dans la direction  $x_i$  sur une surface unité de normale  $\vec{n}$  non alignée avec l'un des axes de coordonnée s'écrit

$$T_i(M, \vec{n}) = \sigma_{ij} n_j,$$

en utilisant la notation indicielle (ou notation d'Einstein, cf. annexe B).



Les forces extérieures appliquées au domaine  $\mathcal{D}$  vont donc pouvoir être explicitées sous la forme d'une intégrale de volume et d'une intégrale sur la surface  $\mathcal{S}$  contenant  $\mathcal{D}$ . En projection sur  $x_i$ , on obtient

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho F_i dx dy dz + \iint_{\mathcal{S}(t)} T_i(M, \vec{n}) d\sigma.$$

Et l'application du théorème de la quantité de mouvement en projection sur  $x_i$  donne

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho U_i dx dy dz = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho F_i dx dy dz + \iint_{\mathcal{S}(t)} \sigma_{ij} n_j d\sigma.$$

En explicitant la dérivée particulaire de l'intégrale de volume à l'aide du théorème de Reynolds et en appliquant le théorème de la divergence<sup>1</sup> à l'intégrale de surface, on aboutit à

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{dU_i}{dt} dx dy dz = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho F_i dx dy dz + \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dx dy dz.$$

1. En notation indicielle, la divergence d'un vecteur  $\vec{A}$  s'écrit :  $\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$ .

Cette relation est valable quel que soit le volume  $\mathcal{D}$ , elle se transpose donc aux intégrandes et on obtient l'expression finale du bilan de quantité de mouvement sous forme locale :

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{avec } i = 1, 2, 3.$$

Les trois équations scalaires résumées dans cette écriture sont appelées *équations de la dynamique*.

**Formulation globale en écoulement permanent : théorème d'Euler** Intégrons l'équation de transport de la quantité de mouvement en projection sur  $x_i$  sur un volume matériel  $\mathcal{D}(t)$  limité par la surface  $\mathcal{S}(t)$  :

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{dU_i}{dt} dx dy dz = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho F_i dx dy dz + \iint_{\mathcal{S}(t)} T_i(M, \vec{n}) d\sigma.$$

Si on explicite la dérivée particulière sous forme conservative, on obtient en tenant compte de l'hypothèse d'écoulement permanent :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j) dx dy dz = \iiint_{\mathcal{D}} \rho F_i dx dy dz + \iint_{\mathcal{S}} T_i(M, \vec{n}) d\sigma,$$

soit :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} (\rho U_i \vec{V}) dx dy dz = \iiint_{\mathcal{D}} \rho F_i dx dy dz + \iint_{\mathcal{S}} T_i(M, \vec{n}) d\sigma,$$

et en appliquant le théorème de la divergence au premier membre :

$$\iint_{\mathcal{S}} \rho U_i \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_{\mathcal{D}} \rho F_i dx dy dz + \iint_{\mathcal{S}} T_i(M, \vec{n}) d\sigma.$$

En revenant à l'expression vectorielle, on obtient l'expression finale du théorème d'Euler :

$$\iint_{\mathcal{S}} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_{\mathcal{D}} \rho \vec{F} dx dy dz + \iint_{\mathcal{S}} \vec{T}(M, \vec{n}) d\sigma,$$

qui exprime qu'en écoulement permanent, le flux de quantité de mouvement à travers une surface fermée  $\mathcal{S}$  est égal à l'ensemble des forces appliquées au fluide contenu dans  $\mathcal{S}$ . En pratique, le théorème d'Euler permet de calculer des efforts globaux sans en connaître la répartition détaillée.

### 2.1.3 Bilan d'énergie totale

Le premier principe de la thermodynamique appliqué à un système matériel fermé indique que la variation d'énergie totale du système est égale à la quantité de chaleur échangée avec l'extérieur, augmentée du travail des forces extérieures. Si on l'applique au volume matériel  $\mathcal{D}(t)$ , on obtient l'expression de la variation d'énergie totale par unité de temps sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho e_t dx dy dz.$$

On tiendra compte des échanges de chaleur en introduisant le vecteur *densité de flux de chaleur*  $\vec{q}$ , défini en considérant que la quantité échangée à travers une surface élémentaire  $d\sigma$  de normale  $\vec{n}$  pendant un temps  $dt$  s'écrit

$$dQ = -\vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

La variation  $dQ$  est comptée positivement quand le système reçoit de la chaleur, d'où le signe négatif au second membre quand c'est la normale extérieure à  $\mathcal{D}(t)$  qui est considérée. S'agissant du travail des forces, on devra prendre en compte les forces extérieures de volume et de surface consignées dans le bilan de quantité de mouvement. On dispose alors de tous les termes du bilan et on peut écrire le premier principe sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho e_t dx dy dz &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \vec{V} \cdot \vec{F} dx dy dz \\ &+ \iint_{\mathcal{S}(t)} \vec{V} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) d\sigma \\ &- \iint_{\mathcal{S}(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma. \end{aligned}$$

La première intégrale de surface s'explicita à l'aide du tenseur des contraintes :

$$\iint_{\mathcal{S}(t)} U_i T_i(M, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\mathcal{S}(t)} U_i \sigma_{ij} n_j d\sigma ;$$

soit encore, si on note  $\vec{A} = [U_i \sigma_{i1}, U_i \sigma_{i2}, U_i \sigma_{i3}]$  :

$$\iint_{\mathcal{S}(t)} \vec{A} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Elle peut alors être transformée en intégrale de volume par application du théorème de la divergence. Donc, en explicitant la dérivée particulière de l'intégrale de volume, et en appliquant le théorème de la divergence aux deux intégrales de surface, on obtient l'expression finale du premier principe sous forme intégrée :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{de_t}{dt} dx dy dz &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \vec{V} \cdot \vec{F} dx dy dz \\ &+ \iiint_{\mathcal{D}(t)} \text{div } \vec{A} d\sigma \\ &- \iiint_{\mathcal{D}(t)} \text{div } \vec{q} d\sigma. \end{aligned}$$

L'expression locale en découle directement :

$$\boxed{\rho \frac{de_t}{dt} = \rho U_i F_i + \frac{\partial U_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}.}$$

### 2.1.4 Les équations de transport des grandeurs énergétiques

**Énergie cinétique** L'équation de cette grandeur peut être obtenue directement à partir de celle de la quantité de mouvement au moyen d'une simple multiplication scalaire par le vecteur vitesse :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} = \rho \frac{dU_i}{dt} U_i = \rho U_i F_i + U_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j},$$

soit :

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{U_i U_i}{2} \right) = \rho U_i F_i + U_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}.$$

**Énergie interne** Cette grandeur est obtenue à partir de l'énergie totale en lui soustrayant l'énergie cinétique  $e_c = U_i U_i / 2$ , on obtient ainsi l'équation de transport correspondante sous la forme :

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}.$$

**Enthalpie** On déduit facilement l'équation de transport de l'enthalpie à partir des équations obtenues précédemment :

$$\rho \frac{dh}{dt} = \rho \left( \frac{de}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{dP}{dt} - \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt},$$

ou encore, en utilisant l'équation de continuité :

$$\rho \frac{dh}{dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{dP}{dt} + P \operatorname{div} \vec{V}.$$

**Entropie** La relation de Gibbs permet de relier la variation d'entropie d'un système, au cours de son évolution, aux variations d'énergie interne  $\delta E$  et de volume  $\delta \mathcal{V}$  :

$$T \delta S = \delta E + P \delta \mathcal{V}.$$

Appliquée à un volume infinitésimal de fluide (en équilibre thermique local), entre deux instants infiniment proches, et en rapportant toutes les grandeurs à l'unité de masse, cette relation pourra se récrire sous la forme :

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + P \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{de}{dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}.$$

Les variations particulières d'énergie interne et de masse volumique étant connues, on peut écrire :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + P \frac{\partial U_i}{\partial x_i}.$$

## 2.2 Les modèles de comportement

Les équations obtenues dans le paragraphe précédent résultent de la seule application des principes fondamentaux de la mécanique et de la thermodynamique. À aucun moment, la nature du « matériau » considéré, n'a été prise en compte. Ceci ne sera possible qu'en spécifiant la « réponse » de ce matériau aux sollicitations de nature thermique ou mécanique qui lui sont appliquées. C'est à travers les expressions des flux et contraintes que l'on va pouvoir particulariser les équations de conservation à la physique d'un fluide donné.

### 2.2.1 Le comportement mécanique

La modélisation du comportement mécanique du fluide repose sur la schématisation du tenseur des contraintes. Il s'agit de postuler une relation fonctionnelle entre ce tenseur et les fonctions de description de l'écoulement introduites précédemment. Ceci se fait sur une base empirique en tenant compte d'observations expérimentales.

Pour les fluides usuels, on introduit le modèle de fluide visqueux newtonien à partir des considérations suivantes.

1. Au repos ou pour tout mouvement solidifiant,  $\sigma_{ij}$  est égal à  $-P\delta_{ij}$ .
2. En mouvement, les contraintes sont proportionnelles aux vitesses (taux) de déformation de sorte que le tenseur des contraintes est une fonction affine du tenseur des taux de déformations.
3. D'une manière générale, il n'existe pas de direction privilégiée dans le fluide, de sorte que la relation entre tenseur des contraintes et tenseur des taux de déformation est isotrope.

Compte tenu de ces éléments, on peut montrer que le tenseur des contraintes se met nécessairement sous la forme :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu S_{ij} + \mu' \operatorname{div} \vec{V} \delta_{ij}.$$

$\mu$  et  $\mu'$  sont les deux coefficients de viscosité qui ne dépendent que de l'état thermodynamique du fluide. Le premier est appelé *viscosité dynamique*. Pour simplifier les écritures on introduit le tenseur des contraintes visqueuses :

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \mu' \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \delta_{ij},$$

et donc :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}.$$

Si maintenant on décompose  $\sigma_{ij}$  en déviateur (trace nulle) et partie sphérique (matrice diagonale à coefficients constants), on obtient

$$\sigma_{ij} = \underbrace{\sigma_{ij} - \frac{\sigma_{ll}}{3}\delta_{ij}}_{\text{déviateur}} + \underbrace{\frac{\sigma_{ll}}{3}\delta_{ij}}_{\text{partie sphérique}},$$

que l'on peut encore développer sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \underbrace{\tau_{ij} - \frac{\tau_{ll}}{3}\delta_{ij}}_{\text{déviateur}} - \underbrace{\left( P - \frac{2\mu + 3\mu'}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right)}_{\text{partie sphérique}} \delta_{ij}.$$

	Liquide	Gaz
Température	$\mu \searrow$ quand $T \nearrow$ Loi de Walther $\mu = \mu_0 (T/T_0)^m$	$\mu \nearrow$ quand $T \nearrow$ Loi de Sutherland $\frac{\mu}{\mu_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0} \frac{1 + C/T_0}{1 + C/T}}$
Pression	$\mu \nearrow$ quand $P \nearrow$ $\frac{\mu}{\mu_0} = a^{(P/P_0 - 1)^m}$	$\mu = \text{cte}$

TABLEAU 2.1 – Loi d'évolution de la viscosité dynamique en fonction de l'état thermodynamique du fluide.

La partie sphérique fait apparaître le terme

$$P' = P - \frac{2\mu + 3\mu'}{3} \text{div } \vec{V},$$

interprétable comme une *pression mécanique*. L'hypothèse de Stokes postule qu'elle est, en toute circonstance, égale à la pression thermodynamique. Ceci conduit à relier la valeur du second coefficient de viscosité à celle de la viscosité dynamique par la relation  $\mu' = -2\mu/3$ . On admettra cette hypothèse dans la suite, le modèle résultant est celui de *Newton-Stokes* et il prend la forme :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu \text{div } \vec{V} \delta_{ij}$$

Comme on l'a noté plus haut, la valeur de  $\mu$  ne dépend que de l'état thermodynamique du fluide. En pratique, les lois de variations *empiriques* utilisées pour les liquides et les gaz usuels sont données dans le tableau 2.1. Dans le cas de l'air, les valeurs des constantes de la loi de Sutherland sont les suivantes :

$$\mu_0 = 1,711 \cdot 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m} \times \text{s}), \quad C = 113 \text{ K}, \quad T_0 = 273,15 \text{ K}$$

On introduit également la *viscosité cinématique* :  $\nu = \mu/\rho$ . Les valeurs de  $\rho$ ,  $\mu$  et  $\nu$  pour l'air et l'eau sont données, dans les conditions normales de température et de pression, dans le tableau 2.2.

## 2.2.2 Le comportement thermique

Le comportement thermique du fluide est déterminé à travers la modélisation du vecteur densité de flux. Ici, on ne considère que des transferts de type conductif et, en observant que dans un fluide usuel le transfert de chaleur s'opère en sens inverse du gradient de température (du plus chaud vers le plus froid), on retient la loi de Fourier :

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad } T.$$

	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\mu$ (kg/(m×s))	$\nu$ (m <sup>2</sup> /s)
Air	1,29	1,85 10 <sup>-5</sup>	1,43 10 <sup>-5</sup>
Eau	10 <sup>3</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-6</sup>

TABLEAU 2.2 – Valeurs des viscosités dynamique et cinématique pour l’air et l’eau dans les conditions normales de température et de pression.

	$\lambda$ kg m/(s <sup>3</sup> ×K)	$a$ m <sup>2</sup> /s	$Pr$ —
Air	2,6 10 <sup>-2</sup>	2,24 10 <sup>-5</sup>	0,71
Eau	0,59	10 <sup>-7</sup>	10

TABLEAU 2.3 – Valeurs des diffusivités thermiques pour l’air et l’eau dans les conditions normales de température et de pression.

Le coefficient  $\lambda$  est appelé *conductivité thermique* du fluide, on introduit également la *diffusivité thermique* :

$$a = \frac{\lambda}{\rho C_p},$$

où  $C_p$  est le coefficient de chaleur massique à pression constante, ainsi que le *nombre de Prandtl* :

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu C_p}{\lambda}.$$

Dans les applications courantes on peut considérer que la conductivité thermique et la viscosité évoluent de la même manière, et que le nombre de Prandtl est constant. Les valeurs de  $a$ ,  $\lambda$  et  $Pr$ , dans les conditions normales de température et de pression, sont données dans le tableau 2.3.

### 2.2.3 Le comportement thermodynamique

On considérera ici un modèle de *gaz parfait*. On tiendra donc compte de la loi d’état :

$$\frac{P}{\rho} = r T.$$

Le coefficient  $r$  est la constante du gaz, reliée à la constante des gaz parfaits  $R$  à l’aide de la masse molaire par la formule  $r = R/\mathcal{M}_m$ . On tiendra compte également des lois de Joule :

$$de = C_v dT \quad \text{et} \quad dh = C_p dT,$$

où  $C_v$  est le coefficient de chaleur massique à volume constant. Pour l'air dans les conditions normales de température et de pression, on retiendra les valeurs suivantes :

$$r = 287 \text{ m}^2/(\text{s}^2 \times \text{K}) \quad [R = 8,37 \text{ kg m}^2/(\text{s}^2 \times \text{K})],$$

$$C_p = 1000 \text{ m}^2/(\text{s}^2 \times \text{K}), \quad C_v = 713 \text{ m}^2/(\text{s}^2 \times \text{K}).$$

## 2.3 Récapitulation du modèle de Navier-Stokes

On vient de voir que les trois principes fondamentaux de conservation :

- de la masse;
- de la quantité de mouvement;
- et de l'énergie totale,

complétés par :

- la loi de Newton-Stokes pour le comportement mécanique;
  - la loi de Fourier pour le comportement thermique;
  - la loi d'état des gaz parfait et les lois de Joule pour le comportement thermodynamique,
- permettent d'établir le modèle de *Navier-Stokes* :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho\vartheta \\ \rho \frac{dU_i}{dt} &= \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial \mu S_{ij}}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial \mu \vartheta}{\partial x_i} \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \\ \rho \frac{dC_v T}{dt} &= -P\vartheta + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + 2 \mu S_{ij} S_{ij} - \frac{2}{3} \mu \vartheta^2 \\ \frac{P}{\rho} &= r T. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles

- non linéaires (dérivées particulaire);
- du premier ordre en temps;
- du second ordre en espace (termes visqueux et conductifs);
- fermé (6 équations pour 6 inconnues).

### 2.3.1 Mise en œuvre : Conditions initiale et aux limites

En théorie, l'écoulement d'un fluide newtonien dans un domaine donné et son évolution au cours du temps pourront être entièrement déterminés par la résolution des équations de Navier-Stokes. Pour ceci, il faudra disposer d'une condition initiale (le système d'équations aux dérivées partielles est du premier ordre en temps) et de conditions aux limites (le système est du second ordre en espace).

Spécifier la *condition initiale* nécessite de connaître à un instant donné les valeurs des six fonctions inconnues en tout point du champ.

Les *conditions aux limites* doivent être spécifiées aux frontières du domaine à tout instant et portent sur les fonctions de description de l'écoulement ou leurs dérivées. Le cas d'une paroi solide en contact avec l'écoulement est important dans les applications pratiques, pour

un fluide réel c'est une *condition d'adhérence*. Dans le cas le plus général où la paroi se déplace à la vitesse  $\vec{V}_p(M)$  au point  $M$ , la condition d'adhérence impose que la vitesse du fluide au contact soit égale à  $\vec{V}_p(M)$ , c.-à-d.

$$\vec{V}(M) = \vec{V}_p(M) \text{ et donc } \vec{V}(M) = 0 \text{ si la paroi est fixe.}$$

L'idée d'une vitesse de fluide nulle au contact d'une paroi fixe n'est pas une notion très intuitive. En effet si, en revenant à la vision microscopique, on considère « naturellement » que les particules qui entrent en contact avec la paroi rebondissent selon les lois de l'optique, on en déduit :

1. Que la vitesse tangentielle est conservée et donc que la vitesse macroscopique dans la direction tangentielle n'est pas affectée par la présence de la paroi ;
2. Que la quantité de mouvement tangentielle est conservée et donc que la paroi n'exerce pas d'effort tangentiel (frottement) sur le fluide.

Ceci ne correspond pas à ce qui est observé dans la pratique avec un fluide réel, puisqu'en général le fluide exerce une force de frottement sur la paroi. C'est qu'au niveau microscopique, la paroi est « rugueuse » vis à vis des échelles caractéristiques du mouvement moléculaire. Le rebond des molécules à l'impact relève davantage d'une réflexion diffuse que des lois de l'optique pour une interface idéale plane.

Il est des cas où la condition à la limite pour la vitesse se réduit à une *condition d'imperméabilité* :

$$\vec{V}(M) \wedge \vec{V}_p(M) = 0.$$

En particulier, si le fluide est non visqueux ( $\mu = 0$ ), les équations aux dérivées partielles chutent au premier ordre en espace et la condition d'adhérence devient surabondante. Se limiter à une condition d'imperméabilité est d'ailleurs — dans ce cas — cohérent avec l'absence de frottement visqueux.

### 2.3.2 Forme générique des équations de transport et signification physique

À l'exception de la loi d'état thermodynamique et de l'équation de continuité, les équations du modèle de Navier-Stokes peuvent toutes se mettre sous la forme générique suivante :

$$(2.1) \quad \rho \frac{df}{dt} = S_f + \operatorname{div} \vec{F}_f,$$

où  $f$  est une grandeur rapportée à l'unité de masse : la quantité de mouvement ou les différentes formes d'énergie. Une telle équation exprime la variation particulaire par unité de volume de la grandeur considérée en réponse à des mécanismes physiques représentés par les termes de second membre. On parle d'*équation de transport* et  $f$  est la *grandeur transportée*. En utilisant la forme conservative du terme de variation particulaire, on peut mettre l'équation (2.1) sous la forme équivalente :

$$(2.2) \quad \underbrace{\frac{\partial \rho f}{\partial t}}_{[1]} + \operatorname{div} \underbrace{(\rho f \vec{V})}_{[2]} = \underbrace{S_f}_{[3]} + \operatorname{div} \underbrace{\vec{F}_f}_{[4]}$$

Chacun des termes [1] à [4] possède une signification physique bien précise :

Grandeur transportée $f$	Source/puits $S_f$	Vecteur densité de flux $[\vec{F}_f]_j$
$U_i$	$\rho F_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( P + \frac{2}{3} \mu \vartheta \right)$	$2 \mu S_{ij}$
$e_c = \frac{U_i U_i}{2}$	$\rho U_i F_i + P \vartheta - \left( 2 \mu S^2 - \frac{2}{3} \mu \vartheta^2 \right)$	$2 \mu U_i S_{ij} - \left( P + \frac{2}{3} \mu \vartheta \right) U_j$
$e = C_v T$	$-P \vartheta + 2 \mu S^2 - \frac{2}{3} \mu \vartheta^2$	$\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}$
$h = C_p T$	$\frac{dP}{dt} + 2 \mu S^2 - \frac{2}{3} \mu \vartheta^2$	$\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}$

TABLEAU 2.4 – Classification des termes de second membre des équations de transport du modèle général ( $S^2 = S_{ij} S_{ji}$  est le second invariant du tenseur des taux de déformation).

- [1] Ce terme exprime la *variation temporelle* de la grandeur  $\rho f$  au point  $M(x, y, z)$  (fixe dans l'espace) ;
- [2] Ce terme intervient comme la divergence d'un vecteur qui n'est autre que le flux d'advection<sup>2</sup> de la grandeur  $\rho f$ , il exprime donc le résultat net de son transport par le mouvement macroscopique à travers une surface de contrôle entourant le point  $M(x, y, z)$ . C'est le *terme d'advection* et sa forme divergence lui confère un caractère conservatif<sup>3</sup> ;
- [3] Ce terme est appelé *terme source* s'il est positif, et *terme puits* s'il est négatif. Dans le premier cas il sera responsable d'un accroissement de la grandeur  $f$  le long de la trajectoire et, dans le second, d'une diminution de cette grandeur ;
- [4] Ce terme intervient comme la divergence d'un vecteur qui, comme l'atteste la présence de la viscosité ou de la conductivité thermique dans son expression (voir tableau 2.4), traduit l'action du mouvement moléculaire au niveau du milieu continu, il exprime ainsi le résultat net du transport par le mouvement d'agitation moléculaire de la grandeur  $\rho f$  à travers une surface de contrôle entourant le point  $M(x, y, z)$ . C'est le *terme de diffusion moléculaire* et sa forme divergence lui confère — comme au terme d'advection — un caractère conservatif.

2. Voir paragraphe 1.3.3.

3. Voir paragraphe 1.4.2.

## Chapitre 3

# Propriétés générales du modèle de Navier-Stokes

### 3.1 Caractère dissipatif

Le modèle de Navier-Stokes est un modèle *dissipatif*, c'est-à-dire que le mouvement du fluide s'accompagne d'un accroissement d'entropie traduisant des irréversibilités. Nous allons maintenant chiffrer ces irréversibilités et en identifier l'origine.

Le second principe de la thermodynamique spécifie que la variation d'entropie d'un système, au cours de son évolution entre deux états, s'accompagne d'irréversibilités telles que

$$\delta S = \frac{Q_{\text{ext}}}{T} + I,$$

où  $I$  représente le montant, nécessairement positif, de ces irréversibilités et  $Q_{\text{ext}}$  la quantité de chaleur échangée avec l'extérieur. Cette relation pourra être appliquée à un volume matériel fini  $\mathcal{D}$  limité par une surface  $\mathcal{S}$  entre deux instants infiniment proches pour fournir :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho s \, dx \, dy \, dz = \iint_{\mathcal{S}(t)} -\frac{q_i n_i}{T} \, d\sigma + \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{\mathcal{P}^*}{T} \, dx \, dy \, dz,$$

où les irréversibilités sont prises en compte à travers leur montant local par unité de volume :  $\mathcal{P}^*$ , appelé *dissipation*. Il vient ensuite, en appliquant le théorème de Reynolds à la variation particulière, et le théorème de la divergence à l'intégrale de surface :

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{ds}{dt} \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\mathcal{D}(t)} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{q_i}{T} \right) \, dx \, dy \, dz + \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{\mathcal{P}^*}{T} \, dx \, dy \, dz,$$

et enfin, sous forme locale :

$$\begin{aligned} \rho \frac{ds}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{q_i}{T} \right) + \frac{\mathcal{P}^*}{T} \\ &= -\frac{1}{T} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{q_i}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\mathcal{P}^*}{T}. \end{aligned}$$

Par identification avec l'équation de transport de l'entropie obtenue précédemment, on peut expliciter l'expression de la puissance des irréversibilités intrinsèques :

$$\mathcal{P}^* = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i},$$

dont l'origine est

- purement mécanique pour le terme  $\Phi_M = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$  ;
- purement thermique pour le terme  $\Phi_T = -\frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i}$ .

Avec le modèle de Navier-Stokes, ces termes prennent la forme :

$$(3.1) \quad \Phi_M = 2\mu S_{ij} S_{ij} - \frac{2}{3}\mu \vartheta^2,$$

$$(3.2) \quad \Phi_T = \frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

On montre facilement qu'ils sont toujours positifs ou nuls (voir la démonstration ci-dessous pour  $\Phi_M$ ), et donc que les schémas de Newton-Stokes et de Fourier respectent le second principe de la thermodynamique.

Dans le tableau 2.4, l'expression de la dissipation mécanique figurait dans les équations de transport de l'énergie cinétique et de l'énergie interne avec des signes opposés. Il s'agit donc un terme d'échange toujours positif, de sorte qu'il représente systématiquement *un terme source pour l'énergie interne au détriment de l'énergie cinétique*. Il se concrétise dans le phénomène *d'échauffement cinétique* observable sur les véhicules se déplaçant à grande vitesse. À titre d'exemple, la peau du fuselage de l'avion Concorde en vol de croisière atteint une température de 115 °C quand la température ambiante est de -60 °C, en conséquence directe de ce phénomène d'échauffement cinétique.

Démonstration de l'expression (3.1) et de la positivité de  $\phi_M$  : En substituant l'expression du tenseur des contraintes visqueuses pour un fluide visqueux newtonien dans l'expression générale de la dissipation mécanique, on obtient :

$$\Phi_M = 2\mu \left( S_{ij} - \frac{1}{3}\vartheta\delta_{ij} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} ;$$

mais également, puisque les indices  $i$  et  $j$  jouent le même rôle dans cette expression :

$$\Phi_M = 2\mu \left( S_{ji} - \frac{1}{3}\vartheta\delta_{ji} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_i}.$$

En prenant la demi-somme de ces deux relations et en notant que les tenseurs des taux de déformation et identité sont symétriques, on aboutit à l'expression symétrisée (en  $i$  et  $j$ ) de la dissipation :

$$\Phi_M = 2\mu \left( S_{ij} - \frac{1}{3}\vartheta\delta_{ij} \right) S_{ij} = 2\mu \left( S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{3}\vartheta^2 \right).$$

On peut, à ce stade, développer l'expression obtenue et la mettre sous la forme d'une somme de carrés :

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_M}{2\mu} &= S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 + 2S_{12}^2 + 2S_{13}^2 + 2S_{23}^2 \\ &\quad - \frac{S_{11}}{3} - \frac{S_{22}}{3} - \frac{S_{33}}{3} - \frac{2}{3}S_{11}S_{22} - \frac{2}{3}S_{11}S_{33} - \frac{2}{3}S_{22}S_{33} \\ \frac{\Phi_M}{2\mu} &= \frac{1}{3}(S_{11} - S_{22})^2 + \frac{1}{3}(S_{11} - S_{33})^2 + \frac{1}{3}(S_{22} - S_{33})^3 + 2(S_{12}^2 + S_{13}^2 + S_{23}^2),\end{aligned}$$

ce qui démontre sa positivité.

## 3.2 Dynamique rotationnelle

On va voir dans ce paragraphe que le caractère rotationnel du mouvement est étroitement relié aux notions de viscosité et dissipation. Pour ceci, on établira d'abord l'équation de transport du rotationnel, pour ensuite en tirer quelques conclusions concernant les écoulements de fluide visqueux au voisinage de parois fixes.

### 3.2.1 L'équation du rotationnel

L'équation de transport du vecteur rotationnel ( $\vec{\Omega} = \text{rôt } \vec{V}$ ) est obtenue à partir de l'équation de la dynamique écrite sous forme vectorielle<sup>1</sup> :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad } \frac{\mathcal{V}^2}{2} + (\text{rôt } \vec{V}) \wedge \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } P + \nu \Delta \vec{V} + \frac{\nu}{3} \text{grad } \vartheta.$$

En en prenant le rotationnel, on obtient

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \text{rôt grad } \frac{\mathcal{V}^2}{2} + \text{rôt } (\vec{\Omega} \wedge \vec{V}) = \text{rôt } \vec{F} - \text{rôt } \left( \frac{1}{\rho} \text{grad } P \right) + \nu \Delta \vec{\Omega} + \frac{\nu}{3} \text{rôt grad } \vartheta,$$

Cette équation pourra être simplifiée en tenant compte du fait que le rotationnel d'un gradient est toujours nul et en développant de la manière suivante les deux termes :

$$\text{rôt } (\vec{\Omega} \wedge \vec{V}) = \vec{\Omega} \text{ div } \vec{V} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\Omega} - \vec{V} \text{ div } \vec{\Omega}$$

et

$$\text{rôt } \left( \frac{1}{\rho} \text{grad } P \right) = \frac{1}{\rho} \text{rôt grad } P + \text{grad } \frac{1}{\rho} \wedge \text{grad } P = -\frac{1}{\rho^2} \text{grad } \rho \wedge \text{grad } P.$$

En reconnaissant que  $\text{div } \vec{\Omega} = 0$  puisque  $\vec{\Omega}$  est un rotationnel, on obtient la forme finale de l'équation de transport du rotationnel dont on peut interpréter chacun des termes du second

1. On considère ici un fluide newtonien à viscosité dynamique constante.

membre :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\Omega} &= \nu \vec{\Delta} \vec{\Omega} \quad \dots\dots \quad \text{Diffusion moléculaire} \\
&+ \text{rôt} \vec{F} \quad \dots\dots \quad \text{Production par les forces de volume} \\
&+ \frac{1}{\rho^2} \text{grad} \rho \wedge \text{grad} P \quad \text{Production barocline} \\
&- \vec{\Omega} \text{div} \vec{V} \quad \dots\dots \quad \text{Production par expansion volumique} \\
&+ (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \quad \dots\dots \quad \text{Production par étirement et basculement}
\end{aligned}$$

Le premier membre de cette équation n'est autre que la dérivée particulaire du vecteur rotationnel. Les termes présents au second membre sont de type source/puits, à l'exception du terme de diffusion moléculaire qui prend la forme habituelle en laplacien. On va maintenant les analyser séparément afin de préciser la nature des mécanismes de production/destruction sous-jacents.

**Production par les forces de volume** Si les forces de volume dérivent d'un potentiel, on pourra les écrire sous la forme

$$\vec{F} = -\text{grad} \mathcal{F},$$

d'où :

$$\text{rôt} \vec{F} = -\text{rôt} \text{grad} \mathcal{F} = 0.$$

Il apparaît ainsi que les forces de volume, lorsqu'elles dérivent d'un potentiel ne peuvent pas créer de rotationnel.

**Production barocline** Ce terme n'intervient qu'en cas de désalignement des gradients de pression et de masse volumique. Le produit vectoriel des gradients est appelé couple barocline. On peut comprendre son mode d'action en prenant l'exemple d'une atmosphère stratifiée « instable » : le fluide le plus léger se trouve au voisinage du sol *sous* le fluide le plus lourd. En pratique, on observe ce type de stratification au voisinage d'un sol plat surchauffé par le rayonnement solaire. Comme on peut l'observer sur la figure 3.1(a), dans le cas idéal où les surfaces isochores (masse volumique constante) sont parfaitement horizontales, le gradient de masse volumique instable (vertical ascendant) est aligné avec le gradient de pression (vertical descendant) résultant des effets de pesanteur, et le couple barocline est nul. Concrètement, on imagine que le fluide léger devrait monter en même temps que le fluide lourd devrait descendre ; or, il n'y a pas de raison pour que ces mouvements s'établissent à un endroit plutôt qu'à un autre et l'ensemble reste en équilibre. Cet équilibre est instable comme on peut le voir sur la figure 3.1(b), où on a introduit une perturbation du champ de masse volumique matérialisée par l'ondulation d'une isochore. Cette perturbation active le couple barocline et on observe effectivement dans de nombreuses situations pratiques, l'apparition de rouleaux tourbillonnaires (rotationnels) conséquences de l'instabilité.

Le cas particulier où la masse volumique ne dépend que de la pression est intéressant dans la mesure où il conduit nécessairement à l'alignement des gradients de pression et de masse volumique. On parle alors de *fluide ou d'évolution barotrope* pour lesquels la production

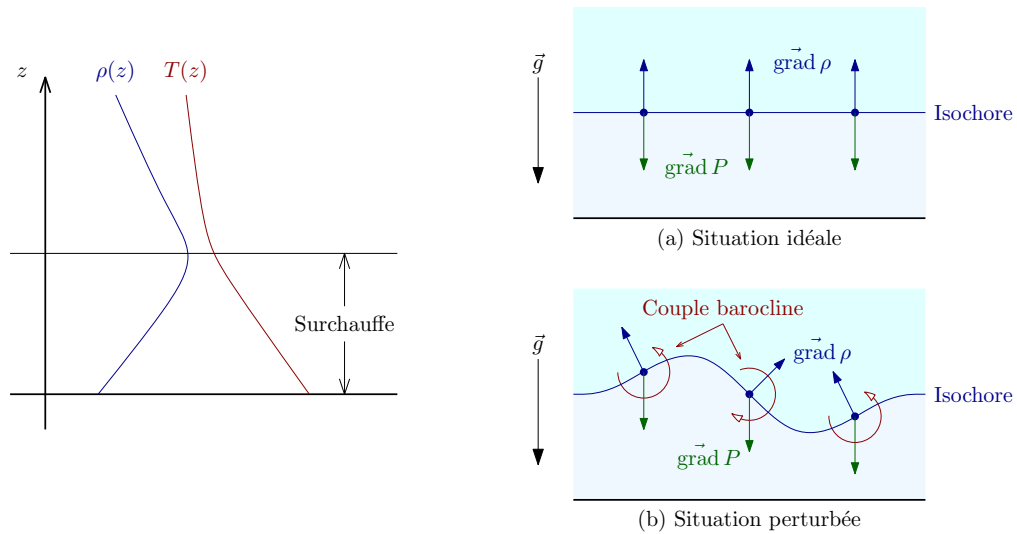


FIGURE 3.1 – Atmosphère en situation de stratification instable. Le gradient de masse volumique est toujours perpendiculaire à l'isochore.

barocline disparaît du bilan de rotationnel. On pourra noter quelques situations de barotropie couramment rencontrées :

- l'évolution d'un fluide incompressible,  $\rho = \text{Const.}$  ;
- l'évolution isotherme d'un gaz parfait,  $P/\rho = \text{Const.}$  ;
- l'évolution adiabatique d'un gaz parfait,  $P/\rho^\gamma = \text{Const.}$

**Production par expansion/contraction volumique** Le terme correspondant (égal à  $-\vec{\Omega} \text{div } \vec{V}$ ) disparaît en évolution isovolume. C'est un terme puits en situation d'expansion ( $\text{div } \vec{V} > 0$ ) et un terme source en situation de contraction ( $\text{div } \vec{V} < 0$ ). Par nature, il s'agit d'un effet lié à la conservation du moment cinétique : un « tourbillon » va devoir augmenter (resp. diminuer) sa vitesse de rotation si le volume qu'il occupe diminue (respectivement augmente). Ce mécanisme ne peut créer de rotationnel si l'écoulement n'est pas déjà rotationnel, c'est un mécanisme d'amplification/atténuation d'un montant de rotationnel *préexistant*.

**Production par étirement/tassement et basculement axiaux** Pour comprendre la signification de ce terme, on peut l'écrire en projection sur l'axe  $0x$  :

$$\underbrace{\Omega_x \frac{\partial U}{\partial x}}_{\boxed{1}} + \underbrace{\Omega_y \frac{\partial U}{\partial y}}_{\boxed{2}} + \underbrace{\Omega_z \frac{\partial U}{\partial z}}_{\boxed{3}}$$

et considérer que chacun des trois termes résultants pourra être responsable d'une augmentation/diminution de la composante  $\Omega_x$ . En se reportant au tableau 3.1, on constate que :

- le terme  $\boxed{1}$  correspond à un étirement/tassement du tourbillon d'axe  $Ox$  et une augmentation/diminution corrélative de  $\Omega_x$  conformément à un principe de conservation

du moment cinétique ;

- le terme [2] correspond à un basculement du tourbillon d'axe  $Oy$  autour de l'axe  $Oz$  et, par simple réorientation, de l'apparition d'une contribution supplémentaire à la composante  $\Omega_x$  ;
- le terme [3] correspond à un basculement du tourbillon d'axe  $Oz$  autour de l'axe  $Oy$  et, par simple réorientation, de l'apparition d'une contribution supplémentaire à la composante  $\Omega_x$ .

### 3.2.2 Conséquences pratiques

L'identification dans le paragraphe précédent des différents mécanismes possibles de génération de rotationnel au sein d'un écoulement à d'importantes implications pratiques. Pour les évaluer, on va considérer le cas fréquent où un domaine matériel  $\mathcal{D}$  de l'écoulement, limité par la surface  $\mathcal{S}$ , est initialement irrotationnel. Dans ce cas, l'absence de rotationnel préexistant rend inactifs les termes de production par interaction avec le champ de vitesse. Pour simplifier, on considérera que les forces de volume dérivent d'un potentiel et donc, que les termes de production associés sont également inactifs. Dans ces conditions, les seuls mécanismes susceptibles de rendre rotationnel le fluide initialement irrotationnel sont au nombre de deux :

1. Les effets de viscosité (termes en laplacien). Ils agissent à partir de la surface  $\mathcal{S}$ , le rotationnel présent à l'extérieur du domaine  $\mathcal{D}$  est communiqué par diffusion au fluide contenu dans le domaine ;
2. Les effets du couple barocline. Il agissent à l'intérieur même du domaine  $\mathcal{D}$ .

Les effets de viscosité sont particulièrement importants quand la surface  $\mathcal{S}$  est constituée d'une paroi solide. En effet, dans ce cas, il est facile de montrer<sup>2</sup> que la force exercée sur la paroi par unité de surface  $\vec{T}_p$  est liée linéairement au vecteur rotationnel à la paroi ( $\vec{\Omega}_p$ ) et à la divergence du champ de vitesse à la paroi ( $\vartheta_p$ ) par la relation

$$(3.3) \quad \vec{T}_p = \mu \vec{\Omega}_p \wedge \vec{n} + \frac{4}{3} \mu \vartheta_p \vec{n}.$$

On voit que la présence d'un frottement tangentiel à la paroi y implique une valeur non nulle du rotationnel, celui-ci « contaminera » le reste de l'écoulement par diffusion comme on vient de l'indiquer. On peut montrer de manière analogue que rotationnel et dissipation mécanique sont liés par une relation du même type :

$$(3.4) \quad \Phi_{Mp} = \mu \|\Omega_p\|^2 + \frac{4}{3} \mu \vartheta_p^2.$$

(En évolution isovolume, la dissipation est strictement proportionnelle au carré scalaire du rotationnel à la paroi.)

Nota Les relations (3.3) et (3.4) ont une généralité limitée : *elles ne sont vérifiées qu'au contact de la paroi.*

---

2. Il suffit de considérer un repère, fixe par rapport à la paroi, dont l'axe  $z$  est confondu avec la normale ; puis que  $\partial \vec{V} / \partial x|_{z=0} = \partial \vec{V} / \partial y|_{z=0} = 0$ .

<p style="text-align: center;"><math>\boxed{1}</math> : <math>\Omega_x \partial U / \partial x</math></p> <p>Production de la composante <math>\Omega_x</math> par interaction entre :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- le gradient de vitesse <math>\partial U / \partial x</math> ;</li> <li>- la composante de rotationnel pré-existant sur l'axe <math>Ox</math> (<math>\Omega_x</math>).</li> </ul>	
<p style="text-align: center;"><math>\boxed{2}</math> : <math>\Omega_y \partial U / \partial y</math></p> <p>Production de la composante <math>\Omega_x</math> par interaction entre :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- le gradient de vitesse <math>\partial U / \partial y</math> ;</li> <li>- la composante de rotationnel pré-existant sur l'axe <math>Oy</math> (<math>\Omega_y</math>).</li> </ul>	
<p style="text-align: center;"><math>\boxed{3}</math> : <math>\Omega_z \partial U / \partial z</math></p> <p>Production de la composante <math>\Omega_x</math> par interaction entre :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- le gradient de vitesse <math>\partial U / \partial z</math> ;</li> <li>- la composante de rotationnel pré-existant sur l'axe <math>Oz</math> (<math>\Omega_z</math>).</li> </ul>	

**TABLEAU 3.1** – Illustration des mécanismes de production de rotationnel par étirement/basculément. On évalue qualitativement l'action des gradients de vitesse sur des noyaux tourbillonnaires préexistants (figurés en coupe axiale par des rectangles).

### En conclusion

En écoulement de fluide visqueux, la présence d'une paroi solide est généralement (dès que le frottement tangentiel est non nul) une source de rotationnel qui contamine le reste de l'écoulement par diffusion moléculaire.

De plus, c'est ce rotationnel qui active (la majeure) partie de la dissipation mécanique localisée en paroi.

## 3.3 La pression : « Action à distance » ou propagation

Du fait de sa nature à la fois mécanique et thermodynamique, la pression est une variable dont l'évolution et le mode d'action ne sont pas toujours faciles à analyser. En théorie, la loi d'état des gaz parfaits, permet d'obtenir une équation de transport pour cette grandeur à partir de celle de la température et de l'équation de continuité<sup>3</sup>; cependant, cette équation (comme l'équation de continuité pour la masse volumique) est dépourvue de terme de diffusion et une telle représentation n'a pas grand sens : on a coutume de dire que pression et masse volumique ne sont pas des grandeurs transportables. En revanche, il est possible d'obtenir des informations intéressantes en prenant la divergence de l'équation de quantité de mouvement, soit :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \times \left[ \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \right],$$

en considérant que la viscosité est constante et en négligeant les forces de volume. Tous calculs faits, on obtient une équation pour la divergence :

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) + \frac{4}{3} \nu \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i}.$$

Sous cette forme générale, l'équation n'est pas facile à analyser, on va donc examiner maintenant ses dégénérescences dans deux cas particuliers :

1. L'écoulement d'un fluide visqueux incompressible ;
2. L'écoulement d'un fluide compressible, non visqueux et non-conducteur de chaleur<sup>4</sup>.

### 3.3.1 L'équation de Poisson pour la pression en écoulement de fluide visqueux incompressible

En faisant l'hypothèse  $\rho = \text{Const.}$ , on admet que l'évolution est isovolume. La divergence  $\vartheta$  s'annule et l'équation obtenue plus haut se simplifie grandement :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_i} = -\rho \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i}.$$

3. En différenciant  $P = \rho r T$ , on obtient  $dP/dT = r (T d\rho/dt + \rho dt/dt)$ .

4.  $\nu = \lambda = 0$ .

On obtient donc une équation de Poisson pour la pression dont le second membre peut être transformé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} -\rho \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} &= -\frac{\rho}{4} \left[ \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= \rho (R_{ij}R_{ij} - S_{ij}S_{ij}) \end{aligned}$$

où  $S_{ij}$  et  $R_{ij}$  sont respectivement les parties symétrique (tenseur des taux de déformation) et antisymétrique (tenseur des taux de rotation) du tenseur gradient de vitesse. On obtient ainsi la forme finale de l'équation de Poisson pour la pression :

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho (\Omega^2 - 2S^2)$$

où  $S^2$  est le second invariant du tenseur des taux de déformation, et  $\Omega^2$  le carré scalaire du rotationnel. Cette équation détermine le comportement de la pression en écoulement incompressible. Nous allons maintenant en examiner deux aspects en particulier.

**Action à distance** La solution de l'équation de Poisson  $\Delta P = f$  sur le domaine  $\mathcal{D}$  limité par la surface  $\mathcal{S}$  peut se mettre, en tout point  $M$  du domaine, sous la forme

$$\begin{aligned} P(M) &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}} G(M, M') f(M') dv(M') \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{S}} \left[ G(M, M') \frac{\partial P(M')}{\partial n} - P(M') \frac{\partial G(M, M')}{\partial n} \right] d\sigma(M'), \end{aligned}$$

où,  $G$  est la fonction de Green du domaine  $\mathcal{D}$ . Sous cette forme, la solution nous indique qu'à tout instant, la pression est obtenue comme la somme de contributions en provenance du champ de vitesse en tout point du domaine. Autrement dit :

La perturbation à l'instant  $t$  du champ de vitesse en un point quelconque du domaine sera *instantanément* perçue dans tout le domaine par son effet sur le champ de pression.

La pression apparaît donc comme susceptible « d'action à distance ». Concrètement, ceci permet d'expliquer la déformation des lignes de courant en amont d'un obstacle : une particule fluide animée initialement d'une vitesse constante est « informée » de la présence de l'obstacle avant d'entrer en contact avec celui-ci, c'est la modification du champ de pression traversé par la particule qui porte cette information et modifie l'équilibre des forces qui lui sont appliquées de sorte que la particule contourne l'obstacle.

**Structuration locale du champ de pression** La séparation, au second membre de l'équation de Poisson, entre un terme d'origine rotationnelle et un terme d'origine déformationnelle donne également une information sur la structure locale du champ de pression. Considérons en effet une situation de rotation pure : sur un voisinage  $\delta\mathcal{D}$  du point  $M$  le vecteur rotationnel est constant et le tenseur des taux de déformation nul. Dans ce cas,

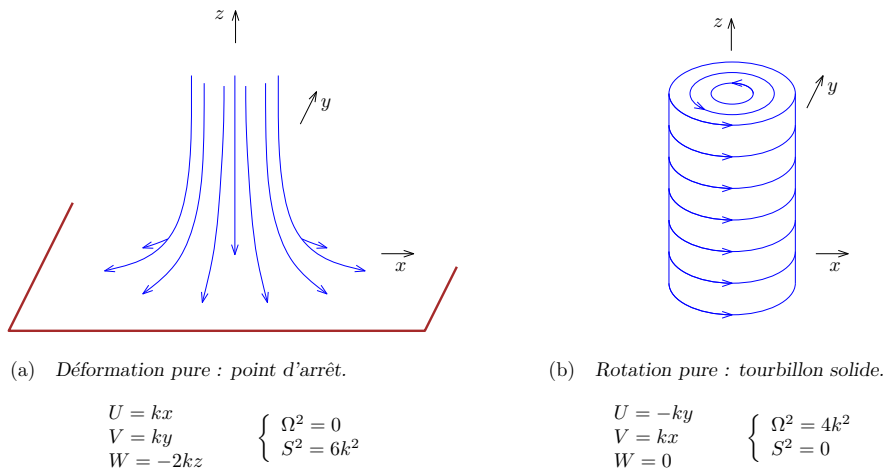


FIGURE 3.2 – Structuration du champ de pression dans les situations de déformation pure et de rotation pure. Dans le premier cas, la région du point d'arrêt (ici, l'origine) est une zone de surpression. Dans le second, l'axe du tourbillon est en dépression. En météorologie, ces deux situations correspondent aux anticyclones et dépressions, respectivement.

l'équation de Poisson indique que  $\Delta P$  est constant sur  $\delta\mathcal{D}$  et positif (le champ de pression est donc « concave »), on peut en déduire que  $\delta\mathcal{D}$  est en dépression par rapport au fluide environnant. Inversement, en situation de déformation pure, le tenseur des taux de déformation est constant et l'écoulement est irrotationnel sur  $\delta\mathcal{D}$ ,  $\Delta P$  sera donc négatif (le champ de pression est « convexe ») et  $\delta\mathcal{D}$  sera en surpression par rapport au fluide environnant. La figure 3.2 illustre des situations correspondant aux deux cas considérés, le cas de rotation pure est une situation de « rotation bloc », et le cas de déformation pure celle de l'écoulement au voisinage d'un point d'arrêt<sup>5</sup>. On retrouve ici un résultat souvent rencontré en météorologie, à savoir qu'on observe des vents tournants à l'intérieur des dépressions et une divergence des vents à la base d'un anticyclone (hautes pressions). Cette divergence est associée à ce que les météorologues appellent une subsidence : courant vertical orienté vers le sol. On comprend également la capacité qu'a une tornade à aspirer (par la dépression qui règne en son centre) toitures, véhicules, petits animaux etc. Dans le même ordre d'idée, l'aérodynamique des ailes delta aux grands angles fournit un autre exemple des effets de dépression engendrés dans les noyaux tourbillonnaires : à forte incidence<sup>6</sup>, deux puissants tourbillons longitudinaux se forment à partir de la pointe avant (tourbillons d'apex, cf. figure 3.3) et viennent s'appuyer sur la surface supérieure de l'aile. Les dépressions présentes au cœur des tourbillons d'apex « aspirent » l'aile vers le haut, on parle de *portance tourbillonnaire*. C'est ce phénomène qui autorise les assiettes de vol élevées qu'on peut observer sur les avions à aile delta.

5. Un point d'arrêt est un point où le vecteur vitesse s'annule.

6. On verra plus loin la définition précise de cette grandeur. Pour l'instant il suffit de considérer que l'aile est fortement cabrée dans le vent relatif.

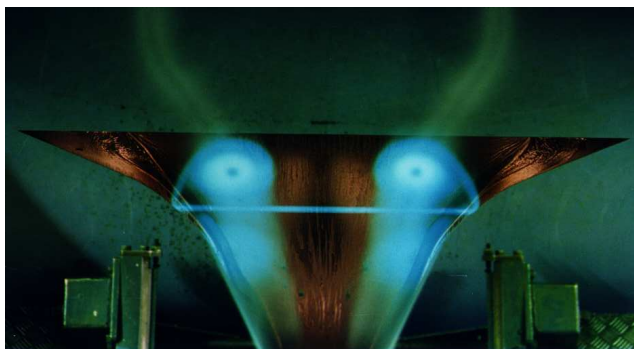


FIGURE 3.3 – Visualisation des tourbillons d’apex sur une aile en double delta. L’aile est vue de dessus, fortement cabrée dans un vent relatif orienté verticalement de bas en haut sur l’image. Les noyaux tourbillonnaires sont visualisés par un plan laser perpendiculaire à la surface de l’aile. (Photo CEAT-Soufflerie S4.)

### 3.3.2 Propagation de la pression en écoulement de fluide compressible : La célérité du son

On va voir maintenant qu’en écoulement de fluide compressible, la pression ne s’établit pas *instantanément* sous l’effet d’une modification du champ de vitesse, mais se *propage* à vitesse finie. L’illustration la plus évidente de ce phénomène est la propagation des ondes sonores. En effet, le son est la manifestation physique (dans la gamme des fréquences audibles : 20 Hz à 20 kHz) de fluctuations de pression de faible amplitude et l’expérience de tous les jours montre que celles-ci se propagent dans l’air à vitesse finie : le décalage entre l’éclair et le coup de tonnerre par exemple.

Pour étudier le comportement de la pression en écoulement de fluide compressible, on simplifiera le problème en considérant un fluide non visqueux et non-conducteur de la chaleur ( $\mu = \lambda = 0$ ). L’équation de la divergence prend alors la forme

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i}.$$

Avec les mêmes hypothèses, l’équation de l’entropie se réduit à  $ds/dt = 0$ , dont on peut déduire le résultat classique  $P/\rho^\gamma = \text{Const}$ . En différenciant cette dernière relation et en considérant l’équation de continuité, on peut alors exprimer la divergence en fonction de la dérivée partielle de la pression :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} - \frac{\gamma}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= 0 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho\vartheta &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vartheta = -\frac{1}{\gamma P} \frac{dP}{dt}.$$

En prenant la dérivée partielle de cette dernière relation et en l’insérant dans l’équation de la divergence, on obtient en finale :

$$\frac{1}{\gamma P} \frac{d^2 P}{dt^2} - \frac{1}{\gamma P^2} \left( \frac{dP}{dt} \right)^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i}.$$

Ceci constitue une équation pour la pression où le champ de vitesse intervient par un terme unique, non linéaire.

**Célérité du son** Revenant maintenant au problème de propagation des ondes sonores, on part d'un champ de base au repos ( $\vec{V}_0 = 0$ ), et où la pression  $P_0$  et la masse volumique  $\rho_0$  sont constantes dans tout l'espace. On considère ensuite la réponse de ce champ à de petites perturbations  $V'$ ,  $P'$  et  $\rho'$ . Par une linéarisation à l'ordre zéro de

- l'équation de la divergence;
- la dérivée particulaire de la relation  $P/\rho^\gamma = \text{Const.}$ ;
- l'équation de continuité,

et en reproduisant le calcul qui conduit à établir l'équation de la pression, on obtient une équation simplifiée pour *la perturbation de pression*<sup>7</sup> :

$$\frac{1}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 P'}{\partial x_i \partial x_i}.$$

Où encore, en utilisant l'équation d'état :

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} = \gamma r T_0 \frac{\partial^2 P'}{\partial x_i \partial x_i}$$

On reconnaît là une équation d'onde de célérité  $a = \sqrt{\gamma r T_0}$ , c'est la *célérité du son* et on peut effectivement parler de *propagation* par opposition à la notion de *transport* (par déplacement matériel).

**Célérité du son et compressibilité du gaz** On va maintenant introduire *le coefficient de compressibilité isentropique*

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_s$$

qui mesure la variation relative de masse volumique — égale, au signe près, à la variation relative de volume spécifique — due à une variation infinitésimale de pression à entropie constante. On conçoit que plus ce coefficient est élevé et plus le gaz peut être considéré comme compressible. En tenant compte de la relation isentropique  $P/\rho^\gamma = K$ , on peut écrire

$$\chi_s = \frac{1}{K \gamma \rho^{\gamma-1}} = \frac{\rho}{\gamma P},$$

soit, en utilisant la loi d'état et en reconnaissant l'expression de la célérité du son :

$$\chi_s = \frac{1}{\rho a^2}.$$

Ceci montre que plus un fluide est compressible et plus la vitesse de propagation du son est faible.

7. cf. annexe C pour le détail de la démonstration.

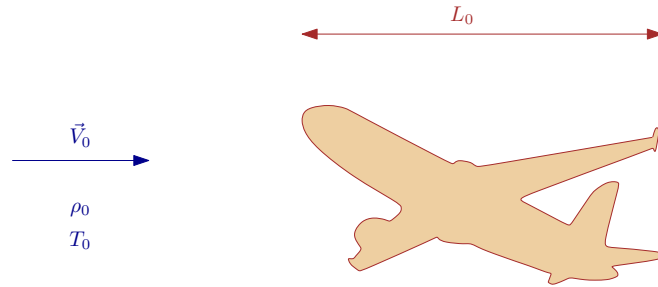


FIGURE 3.4 – Grandeurs de références pour l’analyse dimensionnelle d’un problème typique d’aérodynamique externe.

### 3.4 Analyse dimensionnelle et conditions de similitude

À la base de l’analyse dimensionnelle, on trouve un théorème d’usage extrêmement courant en physique, le théorème de Vaschy-Buckingham dont un énoncé simplifié<sup>8</sup> mais suffisant en général, est le suivant :

Si un phénomène est décrit par  $n$  grandeurs physiques exprimées à l’aide de  $p$  unités indépendantes, il est possible de donner la solution du problème comme fonction de  $n - p$  produits sans dimension des  $n$  grandeurs physiques.

Appliqué à un écoulement de fluide, ce théorème montre que deux écoulements obtenus dans des conditions différentes, mais pour lesquels les  $n - p$  produits seraient identiques, possèdent la même *solution de similitude*. On va voir maintenant toute la portée de ce principe quand on l’applique à un problème typique d’aérodynamique externe.

#### 3.4.1 Analyse dimensionnelle d’un problème d’aérodynamique externe

Conformément au schéma porté sur la figure 3.4, on considère un mobile, dont la géométrie est paramétrée par une dimension  $L_0$ , se déplaçant à la vitesse  $V_0$  dans fluide non pesant à la température  $T_0$ , de masse volumique  $\rho_0$  et régi par le modèle de Navier-Stokes avec des *propriétés physiques constantes* ( $\mu, \lambda, C_p, C_v$ ). Le modèle s’écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho\vartheta \\ \rho \frac{dU_i}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \\ \rho C_v \frac{dT}{dt} &= -P\vartheta + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} + 2\mu S_{ij} S_{ij} - \frac{2}{3}\mu \vartheta^2 \\ P &= \rho r T \end{aligned}$$

8. Voir R. L. Panton (*Incompressible flow*, J. Wiley & sons, 1984) pour une application plus rigoureuse.

Les  $n$  grandeurs physiques qui permettent de décrire le problème sont :

- les quatre fonctions  $P, \rho, T$  et  $\vec{V}$  ;
- les deux variables  $\vec{x}$  et  $t$  ;
- les données  $\rho_0, T_0, V_0$  et  $L_0$  ;
- les constantes physiques  $\mu, \lambda, C_v$  et  $r$ .

Soit un total de  $n = 14$  grandeurs qui s'expriment à partir de  $p = 4$  unités indépendantes :

- m, s, K, kg.

Il est donc possible en théorie d'exprimer la solution du problème à partir de  $n - p = 10$  groupements sans dimension. Les premiers sont obtenus en rapportant fonctions et variables à des grandeurs de références dont un choix possible produit :

Pression	Masse volumique	Température	Vitesse	Longueur	Temps
$P^* = \frac{P - P_0}{\rho_0 V_0^2}$	$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}$	$T^* = \frac{T - T_0}{V_0^2 / C_p}$	$\vec{V}^* = \frac{\vec{V}}{V_0}$	$\vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{L_0}$	$t^* = \frac{t}{L_0 / V_0}$

où  $P_0 = \rho_0 r T_0$ . Les quatre groupements manquants peuvent être obtenus en écrivant le modèle pour les fonctions et variables sans dimension. Apparaissent ainsi naturellement dans les équations les nombres adimensionnels suivants :

- le coefficient isentropique  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  ;
- le nombre de Prandtl  $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$  ;
- le nombre de Reynolds  $Re = \frac{\rho_0 V_0 L_0}{\mu}$  ;
- le nombre de Mach  $M_0 = \frac{V_0}{\sqrt{\gamma r T_0}}$ ,

le modèle s'écrivant sous forme adimensionnelle :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho^*}{dt^*} &= -\rho^* \vartheta^* \\ \rho^* \frac{dU_i^*}{dt^*} &= -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \left( 2 \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial x_j^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} \right) \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \\ \rho^* \frac{dT^*}{dt^*} &= -\left( \frac{1}{M_0^2} + \gamma P^* \right) \vartheta^* + \frac{\gamma}{Pr Re} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*} + \frac{\gamma}{Re} \left( 2 S_{ij}^* S_{ij}^* - \frac{2}{3} \vartheta^{*2} \right) \\ 1 + \gamma M_0^2 P^* &= \rho^* [1 + (\gamma - 1) M_0^2 T^*] \end{aligned}$$

Pour un fluide donné,  $Pr$  et  $\gamma$  sont des constantes, de sorte que, dans ce type de problème, on aboutit à une *solution de similitude en Reynolds et Mach*. Ceci signifie que deux écoulements pour lesquels :

- les grandeurs  $V_0, L_0, \rho_0$  et  $T_0$  diffèrent,
- mais, qui vérifient les conditions suivantes :
  - même fluide ;
  - similitude géométrique ;
  - même valeurs des nombres de Mach et de Reynolds,

*possèdent la même solution de similitude*. Cette propriété est à la base de de tous les essais à échelle réduite (soufflerie).

Nombre	Notation	Définition	Interprétation
Reynolds	$Re$	$\frac{\rho V_0^2 / L_0}{\mu V_0 / L_0^2}$	Forces d'inertie/forces de viscosité
Euler	$2 Eu$	$\frac{P}{\rho V_0^2 / 2}$	Pression statique/pression dynamique
Froude	$Fr$	$\frac{\rho V_0^2 / L_0}{\rho g}$	Forces d'inertie/forces de pesanteur
Grashof	$Gr/Re^2$	$\frac{\rho g \beta T_0}{\rho V_0^2 / L_0}$	Forces d'Archimède/forces d'inertie
Peclet	$Pe$	$\frac{\rho C_p T_0 V_0 / L_0}{\lambda T_0 / L_0^2}$	Convection de chaleur/diffusion de chaleur
Eckert	$Ec$	$\frac{\rho V_0^2}{\rho C_p T_0}$	Énergie cinétique/enthalpie
Brinkman	$Br$	$\frac{\mu V_0^2 / L_0^2}{\lambda T_0 / L_0^2}$	Dissipation mécanique/diffusion de chaleur

TABLEAU 3.2 – Nombres sans dimension d'usage fréquent et interprétation physique.

### 3.4.2 Autres nombres sans dimension

Le problème posé dans le paragraphe précédent ne fait apparaître que quelques uns des groupements adimensionnels rencontrés en pratique. D'autres données ou grandeurs physiques peuvent entrer en jeu, par exemple : des forces de pesanteur, une fréquence de référence pour un écoulement instationnaire (hélice en rotation) etc. De nouveaux nombres caractéristiques apparaissent alors, chacun mettant en balance deux sortes d'effets physiques. Le tableau 3.2 donne les plus couramment utilisés.



## Chapitre 4

# Les modèles restreints

On considère ici des simplifications du modèle général de Navier-Stokes. Les sous-modèles seront obtenus en considérant les hypothèses d'*incompressibilité* et de *fluide parfait*.

**Fluide incompressible** Par définition, la masse volumique est constante dans un fluide incompressible. C'est le cas des liquides mais également (cf. annexe D) celui des gaz dans les écoulements à basse vitesse. L'équation de continuité montre que, pour un fluide incompressible, l'évolution est isovolume :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0.$$

Deux autres résultats généraux peuvent être donnés :

- *le problème dynamique est découplé du problème thermique*, le couplage est habituellement assuré par la loi d'état thermodynamique qui, ici, dégénère sous la forme triviale  $\rho = \rho_0$  où  $\rho_0$  devient une donnée du problème ;
- en conséquence directe, *la pression prend un caractère purement mécanique et se définit à une constante additive près* car elle n'intervient que par son gradient dans les équations.

**Fluide parfait** On définira ici le fluide parfait comme un fluide *non visqueux et non-conducteur de chaleur (isolant thermique)* :

$$\mu = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = 0.$$

Dans un fluide parfait, l'expression du tenseur des contraintes se réduit au terme de pression :

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij}.$$

Cette relation simplifiée fait chuter l'ordre des équations aux dérivées partielles du modèle, ce qui conduit à retenir une condition à la limite moins restrictive que la condition d'adhérence à une paroi solide. On se contente d'une *condition d'imperméabilité*.

On va voir maintenant la formulation des sous modèles construits à partir de l'une ou l'autre de ces hypothèses, ou des deux.

## 4.1 Le fluide parfait incompressible

La simplification du modèle général de Navier-Stokes conduit dans ce cas à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \rho \frac{dU_i}{dt} &= \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \\ \frac{dT}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

On vérifie que le problème dynamique est indépendant de la solution du problème thermique. En revanche, la résolution du problème thermique nécessite au préalable celle du problème dynamique (le champ de vitesse est présent dans la dérivée particulaire de la température). On note par ailleurs que la température est constante sur chaque trajectoire, cette grandeur apparaît donc comme *un traceur passif*.

## 4.2 Le fluide visqueux incompressible

La simplification du modèle général de Navier-Stokes conduit dans ce cas à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \rho \frac{dU_i}{dt} &= \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \\ \rho C_v \frac{dT}{dt} &= \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

On vérifie ici aussi que le problème dynamique est découplé du problème thermique. On remarquera que l'équation de l'énergie sous forme enthalpique s'écrit ici sous la forme :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$$

qui peut sembler contradictoire avec l'écriture précédente. En fait, pour un *fluide incompressible* on a nécessairement  $C_p = C_v$ , et les deux équations sont compatibles. On verra en annexe D que pour l'écoulement à basse vitesse d'un fluide compressible, le *régime* est qualifié d'incompressible et que les formes simplifiées des deux équations ne sont pas équivalentes. Le choix de l'équation pertinente devra tenir compte de conditions particulières à l'écoulement considéré.

### 4.3 Le fluide parfait compressible

La simplification du modèle général de Navier-Stokes conduit dans ce cas à :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \\ \rho \frac{dU_i}{dt} &= \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \\ \rho C_v \frac{dT}{dt} &= -P \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \\ P &= \rho r T \end{aligned}$$

Ces équations sont appelées *équations d'Euler*. La condition à la limite applicable au contact d'une paroi solide est *la condition d'imperméabilité*.

### 4.4 Conditions de similitude pour les modèles restreints

Si on écrit chacun des modèles restreints introduits précédemment en variables adimensionnelles avec les définitions données dans la section 3.4, on aboutit à des conditions de similitude moins restrictives que pour le modèle de Navier-Stokes complet. Celles-ci sont regroupées dans le tableau 4.1.

Fluide parfait incompressible	Similitude géométrique
Fluide visqueux incompressible	Similitude géométrique + Similitude de Reynolds
Fluide parfait compressible	Similitude géométrique + Similitude de Mach

TABLEAU 4.1 – Conditions de similitude pour les modèles restreints.

## 4.5 Classification des écoulements en fonction des nombres de Mach et de Reynolds

### 4.5.1 Classification en fonction du nombre de Mach

Le nombre de Mach représente le rapport de la vitesse  $V_0$  à la célérité du son dans les conditions de référence. On a vu précédemment, que pour un gaz parfait à la température  $T_0$  :

1. la célérité du son s'exprime par  $a_0 = \sqrt{\gamma r T_0}$  ;
2. la limite  $M_0 \rightarrow 0$  correspond à la limite incompressible (la célérité du son tend vers l'infini).

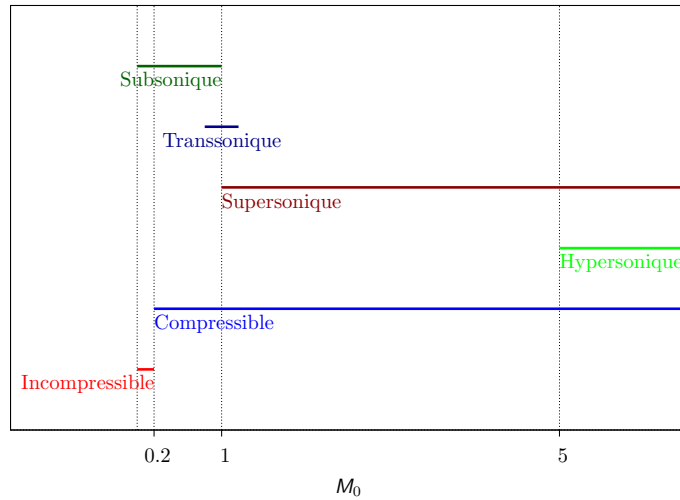


FIGURE 4.1 – Classification des écoulements en fonction du nombre de Mach.

On en déduit la classification des écoulements en fonction du nombre de Mach présentée dans la figure 4.1.

#### 4.5.2 Régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds

Dans les équations de la dynamique, le nombre de Reynolds représente le rapport entre les termes non linéaires d'advection et les termes linéaires de diffusion. Pour un système non linéaire dissipatif tel que le modèle de Navier-Stokes, une évolution vers un régime chaotique avec perte de déterminisme peut résulter du déséquilibre — favorable aux premiers — entre les termes non linéaires *déstabilisants* et les termes de diffusion *stabilisants*. C'est ce que l'on observe dans la majorité des écoulements de fluide quand le nombre de Reynolds dépasse une valeur critique, c'est le *régime turbulent* sur lequel nous reviendrons en détail dans le cours de deuxième année. La valeur du nombre de Reynolds critique est différente d'un écoulement à l'autre et, en réalité, la transition de régime intervient sur une plage finie, d'extension non nulle, de valeurs de ce nombre. La figure 4.2 en donne une première illustration, elle présente le coefficient de traînée ( $C_x$ ) d'un cylindre placé dans un courant uniforme, on y distingue :

- une plage de valeurs du nombre de Reynolds où le coefficient de traînée est à peu près constant, elle est caractéristique du *régime laminaire* (non-turbulent) dans cet écoulement ;
- une plage où le coefficient de traînée chute rapidement, cette plage correspond au *régime de transition* ;
- un plage où le coefficient de traînée réaugmente de manière approximativement logarithmique, celle-ci correspond au *régime turbulent*.

On signalera que le régime turbulent est le régime le plus fréquemment rencontré dans les applications visées ici.

On peut noter par ailleurs que, si le nombre de Reynolds tend vers l'infini, la diffusion devient négligeable devant les effets d'inertie, et que le modèle Navier-Stokes dégénère en

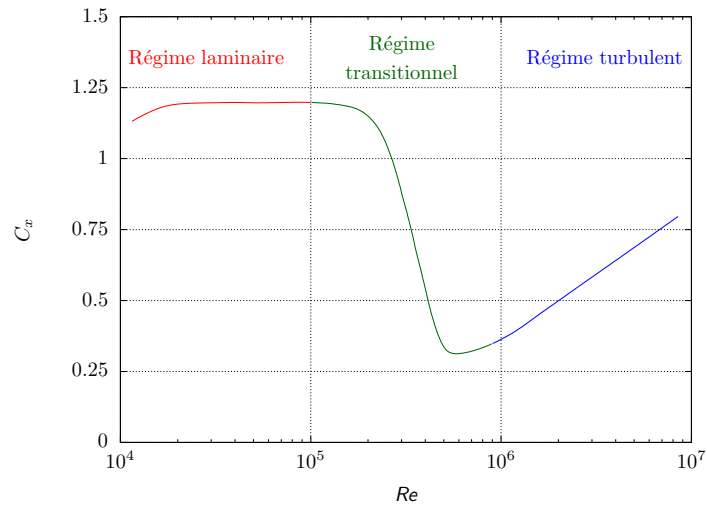


FIGURE 4.2 – Variation du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds dans l'écoulement autour d'un cylindre et indication des différents régimes d'écoulements.

modèle d'Euler. Il faudra rester prudent dans les conclusions qu'on peut en tirer car un fluide réel à très grand nombre de Reynolds conserve des conditions aux limites de type « adhérence » à une paroi solide, alors que l'utilisation du modèle d'Euler impose une condition d'imperméabilité.



Deuxième partie

Écoulements de fluide parfait  
incompressible



## Chapitre 5

# Généralités sur les écoulements de fluide parfait incompressible

Certains des résultats les plus utilisés dans l'étude des fluides parfaits incompressibles trouvent une formulation plus générale dans le cadre du modèle de fluide visqueux barotrope. On revient donc sur ce modèle afin d'énoncer ces résultats sous la forme la plus générale possible.

Dans tout le chapitre, on considérera que les forces de volume, quand elles existent, dérivent d'un potentiel ( $\mathcal{F}$ ).

## 5.1 Retour sur les écoulements de fluide barotrope

### 5.1.1 Dynamique du fluide visqueux barotrope

Comme on l'a vu précédemment, un fluide barotrope est un fluide où la masse volumique ne dépend que de la pression. La relation de barotropie peut se formaliser comme

$$\rho = \rho(P).$$

Le système d'équations régissant le problème dynamique peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j}{\partial x_j} &= 0 ; \\ \rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) &= \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \right) \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 ; \\ \rho &= \rho(P). \end{aligned}$$

et on constate qu'il est découplé du problème thermique en conséquence directe de l'hypothèse de barotropie.

Par ailleurs, l'équation de la dynamique peut être mise sous la forme vectorielle :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\mathcal{V}^2}{2} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} P + \nu \left( \Delta \vec{V} + \frac{1}{3} \text{grad} \vartheta \right).$$

En tenant compte de la propriété de barotropie, on peut écrire

$$\frac{dP}{\rho} = d \left[ \int \frac{dP}{\rho} \right],$$

soit

$$\frac{\vec{\text{grad}} P \cdot d\vec{X}}{\rho} = \vec{\text{grad}} \left[ \int \frac{dP}{\rho} \right] \cdot d\vec{X} \quad \forall d\vec{X} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}.$$

Cette identité est vraie quel que soit  $d\vec{X}$ , on peut donc en déduire que

$$\frac{\vec{\text{grad}} P}{\rho} = \vec{\text{grad}} \left[ \int \frac{dP}{\rho} \right].$$

Avec la relation classique d'analyse vectorielle  $\Delta \vec{V} = \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{V}) - \text{rot} (\text{rot} \vec{V})$ , on va pouvoir récrire l'équation de la dynamique sous la forme

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} \frac{V^2}{2} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V} = -\vec{\text{grad}} \mathcal{F} - \vec{\text{grad}} \left[ \int \frac{dP}{\rho} \right] + \nu \left( \frac{4}{3} \vec{\text{grad}} \vartheta - \text{rot} \vec{\Omega} \right).$$

### 5.1.2 Rotationnel et circulation en écoulement de fluide visqueux barotrope : Les théorèmes de Lagrange et de Kelvin

Comme on la vu précédemment, en l'absence de production barocline (fluide barotrope), et avec des forces de volume dérivant d'un potentiel, l'équation du rotationnel se simplifie sous la forme

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\Omega} = \nu \Delta \vec{\Omega} - \vec{\Omega} \text{div} \vec{V} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}.$$

L'examen de cette équation conduit à l'énoncé du **théorème de Lagrange** : Dans un fluide visqueux barotrope où les forces de volume dérivent d'un potentiel, il suffit

- qu'à un instant donné, le rotationnel soit nul en tout point du champ ;
  - que le flux de rotationnel (par advection ou diffusion) reste constamment nul aux frontières du domaine,
- pour que le rotationnel reste identiquement nul à tout instant ultérieur.

Ce théorème incite à étudier spécifiquement le cas des écoulements irrotationnels. En effet, si le caractère irrotationnel est une propriété du champ de vitesse que rien ne vient imposer *a priori*, on constate cependant que, dans le cas fréquent où le mouvement est généré dans un fluide initialement au repos, il se poursuivra en respectant la condition irrotationnelle. Comme nous le verrons plus loin, c'est très souvent le cas dans les écoulements de fluide non visqueux. En fluide visqueux, la situation est moins nette dans la mesure où, du fait de la condition d'adhérence, la présence de parois solides génère du rotationnel (cf. première partie, section 3.2) limitant ainsi la portée du théorème.

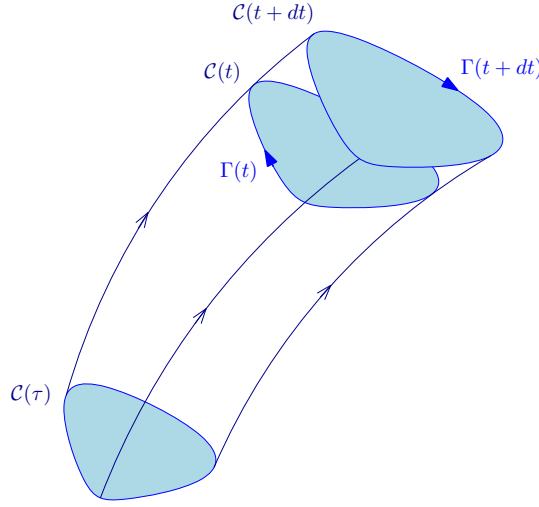


FIGURE 5.1 – Calcul de la variation de circulation au cours du mouvement

On va examiner maintenant des propriétés liées à la circulation du vecteur vitesse sur un contour fermé et ces connexions à l'évolution du rotationnel. On considère donc *une ligne matérielle fermée*  $\mathcal{C}(t)$ , cette ligne va se déplacer et se déformer et on cherche à évaluer la variation *au cours du mouvement* de la circulation

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}(t)} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathcal{C}(t)} U_i dx_i,$$

où  $dx_i$  représente la composante dans la direction  $x_i$  de l'élément de courbe  $d\vec{l}$ . Par définition, cette variation se traduit par la dérivée particulaire

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}(t)} U_i dx_i \quad (\text{cf. figure 5.1}).$$

C'est donc la dérivée particulaire d'une intégrale sur un contour susceptible de se déplacer et de se déformer. Comme on l'a vu en première partie, un moyen de calculer une telle dérivée consiste à faire un aller et retour entre variables de Lagrange et variables d'Euler. Ainsi, en notant  $\tau$ , l'instant de marquage des variables de Lagrange, on va pouvoir écrire

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}(\tau)} U_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x_i}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x_i}{\partial \zeta} d\zeta \right).$$

Le contour  $\mathcal{C}(\tau)$  ne dépend pas du temps et on peut maintenant faire entrer la dérivée particulaire sous le signe somme :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{\mathcal{C}(\tau)} \frac{dU_i}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x_i}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x_i}{\partial \zeta} d\zeta \right) + \int_{\mathcal{C}(\tau)} U_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x_i}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x_i}{\partial \zeta} d\zeta \right).$$

En revenant maintenant en variables d'Euler, il vient

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{\mathcal{C}(t)} \frac{dU_i}{dt} dx_i + \int_{\mathcal{C}(t)} U_i \frac{d(dx_i)}{dt} = \int_{\mathcal{C}(t)} \frac{dU_i}{dt} dx_i + \int_{\mathcal{C}(t)} U_i d \left( \frac{dx_i}{dt} \right),$$

soit

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{\mathcal{C}(t)} \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l} + \int_{\mathcal{C}(t)} \vec{V} \cdot d\vec{V} = \int_{\mathcal{C}(t)} \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l} + \int_{\mathcal{C}(t)} d\left(\frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2}\right).$$

En l'absence de discontinuité de  $\vec{V} \cdot \vec{V}$  le long de la courbe fermée  $\mathcal{C}(t)$ , la deuxième intégrale du second membre s'annule (courbe fermée) et on obtient l'expression

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{\mathcal{C}(t)} \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l}.$$

Avec l'équation de la dynamique obtenue dans la section 5.1.1 qu'on reprendra sous la forme

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\text{grad}} \left[ \mathcal{F} + \int \frac{dP}{\rho} - \frac{4}{3}\nu\vartheta \right] - \nu \vec{\text{rot}} \vec{\Omega},$$

il est maintenant possible de calculer la variation de circulation :

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= - \int_{\mathcal{C}(t)} \vec{\text{grad}} \left[ \mathcal{F} + \int \frac{dP}{\rho} - \frac{4}{3}\nu\vartheta \right] \cdot d\vec{l} - \int_{\mathcal{C}(t)} \nu \vec{\text{rot}} \vec{\Omega} \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_{\mathcal{C}(t)} d \left[ \mathcal{F} + \int \frac{dP}{\rho} - \frac{4}{3}\nu\vartheta \right] - \int_{\mathcal{S}(t)} \nu \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \, d\sigma, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{S}(t)$  est n'importe quelle surface s'appuyant sur le contour  $\mathcal{C}(t)$  (application de la formule de Stokes<sup>1</sup> à la seconde intégrale du second membre). Si, par ailleurs,  $\mathcal{C}(t)$  est fermée et ne rencontre pas de discontinuité de la fonction  $\mathcal{F} + \int dP/\rho - 4\nu\vartheta/3$ , la première intégrale du second membre est nulle (contour fermé). En tenant compte des identités

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{\Omega} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{\Omega} - \vec{\Delta} \vec{\Omega} \quad \text{et} \quad \text{div} \vec{\Omega} = \text{div} \vec{\text{rot}} \vec{V} = 0,$$

on obtient le résultat final :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{\mathcal{S}(t)} \nu \vec{\Delta} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \, d\sigma.$$

**Le théorème de Kelvin** est la conséquence de ce résultat pour un écoulement de *fluide non visqueux*. Dans ce cas, le second membre est identiquement nul : En écoulement de fluide non visqueux barotrope soumis à des forces de volume dérivant d'un potentiel, la circulation du vecteur vitesse se conserve au cours du mouvement, sur tout contour matériel fermé et régulier.

Remarque 1 Le théorème de Kelvin permet de retrouver le résultat du théorème de Lagrange en fluide non visqueux. En effet, supposons qu'à un instant donné, le rotationnel soit nul en tout point du domaine  $\mathcal{D}$ , alors la circulation du vecteur vitesse sur tout contour fermé contenu dans  $\mathcal{D}$  est nulle d'après la formule de Stokes. Par conséquent, elle le restera à tout instant ultérieur. Comme ceci s'applique quel que soit le contour pris dans  $\mathcal{D}$ , et

1. La *formule de Stokes* stipule que la circulation d'un vecteur sur un contour fermé est égale au flux de son rotationnel à travers toute surface s'appuyant sur ce contour.

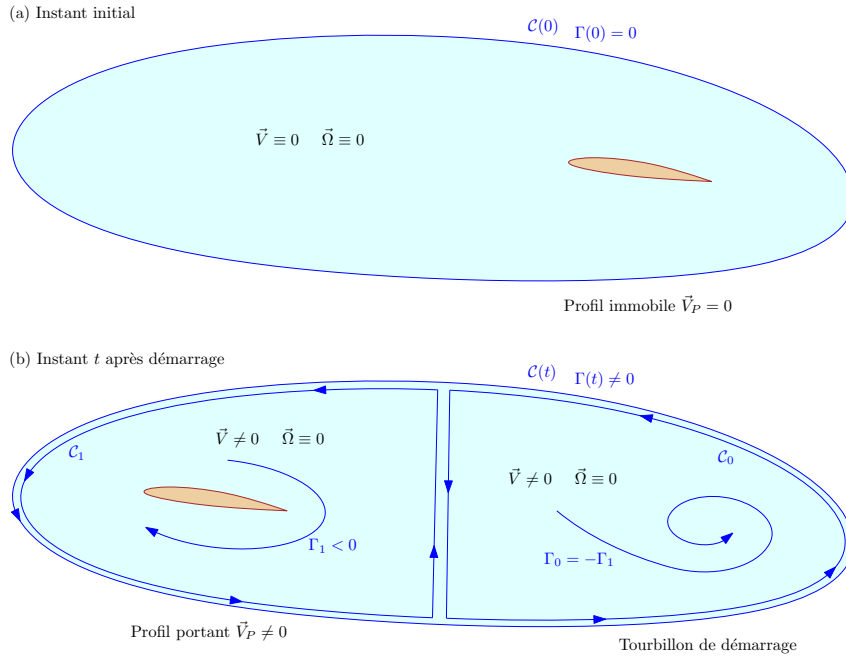


FIGURE 5.2 – Tourbillon de démarrage. Les pointes de flèche sur les courbes  $\mathcal{C}(0)$ ,  $\mathcal{C}(t)$ ,  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}_1$  indiquent le sens de parcours pour le calcul des circulations.

notamment aux contours contenus dans un voisinage infinitésimal de chaque point matériel du champ, on peut en déduire que le rotationnel restera à tout instant identiquement nul dans tout le domaine  $\mathcal{D}$ .

**Remarque 2** Les théorèmes de Kelvin et de Lagrange permettent d’expliquer un phénomène connu sous le nom de *tourbillon de démarrage* : Lorsqu’un corps portant immobile dans un fluide au repos est mis en vitesse, il se forme un tourbillon sensiblement immobile à la position occupée par le corps à l’instant initial. Afin de comprendre ce phénomène, on pourra se reporter à la figure 5.2 pour considérer un contour  $\mathcal{C}(0)$  entourant largement le corps immobile à l’instant initial. À un instant ultérieur  $t$ , le corps s’est translaté d’un vecteur  $\vec{X} = \vec{V}_p \times t$  si  $V_p$  est la vitesse qu’il a acquis instantanément à l’instant initial. On scinde alors la courbe  $\mathcal{C}(t)$  en deux courbes  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}_1$  de telle sorte que

- la courbe  $\mathcal{C}_0$  entoure la position initiale du corps ;
- la courbe  $\mathcal{C}_1$  entoure le corps dans sa position à l’instant  $t$  ;
- les deux courbes recouvrent la courbe  $\mathcal{C}(t)$ , et possèdent de plus une partie commune séparant les deux positions (initiale et à l’instant  $t$ ) du corps.

On verra plus loin que si on considère un corps portant, il se développe sur toute courbe fermée qui l’entoure une circulation donnée ( $\Gamma_1$ ), celle-ci est directement proportionnelle à l’effort de portance qui s’exerce sur lui. D’autre part, le théorème de Kelvin indique que la circulation du vecteur vitesse sur le contour  $\mathcal{C}(t)$  garde la même valeur que celle qu’elle avait

sur le contour  $\mathcal{C}(0)$ , c'est-à-dire une valeur nulle. Comme

$$\int_{\mathcal{C}(t)} \vec{V} d\vec{l} = \underbrace{\int_{\mathcal{C}_0} \vec{V} d\vec{l}}_{\Gamma_0} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}_1} \vec{V} d\vec{l}}_{\Gamma_1} = 0 \quad (\text{sens de parcours trigonométriques}),$$

on en déduit que  $\Gamma_0 = -\Gamma_1$ . Ceci signale la présence du tourbillon de démarrage.

### 5.1.3 Mouvement irrotationnel d'un fluide visqueux barotrope : Formulation forte du théorème de Bernoulli

En faisant l'hypothèse supplémentaire d'un *mouvement irrotationnel*, l'équation de la dynamique pour un *fluide visqueux barotrope* se met maintenant sous la forme

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{\mathcal{V}^2}{2} + \mathcal{F} + \int \frac{dP}{\rho} - \frac{4}{3} \nu \vartheta \right) = 0.$$

De plus, d'un point de vue mathématique, la condition  $\text{rot} \vec{V} = 0$  est nécessaire et suffisante à l'existence d'une fonction de l'espace  $\phi$  telle que

$$\vec{V} = \text{grad} \phi.$$

La fonction  $\phi$  est le potentiel scalaire du champ de vitesse et elle est définie à une constante additive près. L'équation de la dynamique peut donc être réécrite sous la forme

$$\text{grad} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\mathcal{V}^2}{2} + \mathcal{F} + \int \frac{dP}{\rho} - \frac{4}{3} \nu \vartheta \right) = 0.$$

Cette relation montre que la valeur de la quantité entre parenthèses est constante en tout point du champ et ne dépend donc que du temps :

En écoulement *irrotationnel* de fluide *visqueux barotrope* soumis à des *forces de volume dérivant d'un potentiel*, il existe un potentiel de vitesse  $\phi$  tel que  $\vec{V} = \text{grad} \phi$ , et la relation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\mathcal{V}^2}{2} + \mathcal{F} + \int \frac{dP}{\rho} - \frac{4}{3} \nu \vartheta = \wp(t)$$

est vérifiée en tout point du champ. C'est la formulation forte — la plus générale — du résultat connu sous le nom de **théorème de Bernoulli**.

### 5.1.4 Le mouvement permanent d'un fluide non visqueux barotrope : Le théorème de Bernoulli en formulation faible

Dans le cas d'un *mouvement permanent* de *fluide non visqueux*, l'équation de la dynamique d'un *fluide barotrope* se met sous la forme

$$\text{grad} \frac{\mathcal{V}^2}{2} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V} = -\text{grad} \mathcal{F} - \text{grad} \left( \int \frac{dP}{\rho} \right).$$

En multipliant scalairement cette équation par le vecteur  $\vec{V} dt$ , il n'est pas nécessaire de faire l'hypothèse d'un mouvement irrotationnel pour obtenir une relation de type Bernoulli. On obtient en effet

$$\text{grad} \left( \frac{\mathcal{V}^2}{2} + \mathcal{F} + \int \frac{dP}{\rho} \right) \cdot \vec{V} dt = 0$$

puisque  $(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{V}$  est nécessairement nul. Or,  $\vec{V} dt$  n'est autre que le déplacement élémentaire le long d'une trajectoire, on peut donc écrire

$$d \left[ \frac{\mathcal{V}^2}{2} + \mathcal{F} + \int \frac{dP}{\rho} \right] = 0$$

où la notation  $d$  (lettre droite<sup>2</sup>) représente la variation *Lagrangienne* (prise le long d'une trajectoire) de la quantité entre crochets. Cette variation est nulle et on peut en déduire que la quantité

$$\frac{\mathcal{V}^2}{2} + \mathcal{F} + \int \frac{dP}{\rho}$$

conserve une valeur constante sur chaque trajectoire (ou ligne de courant : ces deux notions étant identiques en écoulement permanent). On prendra garde au fait que la constante est susceptible de varier au passage d'une ligne de courant à une autre.

Le mouvement *permanent* d'un fluide *non visqueux barotrope* soumis à des *forces de volume dérivant d'un potentiel* est tel que la quantité

$$\frac{\mathcal{V}^2}{2} + \mathcal{F} + \int \frac{dP}{\rho} \quad \text{reste constante sur chaque ligne de courant.}$$

C'est la formulation faible du **théorème de Bernoulli**.

## 5.2 Le fluide parfait incompressible : Définition et propriétés

### 5.2.1 Le concept de fluide parfait

**Définition** À partir de maintenant, on va définir le fluide parfait comme *un fluide qui ne développe pas d'irréversibilité au cours du mouvement*. L'expression des irréversibilités développées par un fluide visqueux newtonien obéissant à la loi de Fourier a été établie dans la première partie (section 3.1) :

$$\mathcal{P}^* = 2\mu S_{ij}S_{ij} - \frac{2}{3}\mu \vartheta^2 + \frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

On a montré dans la section 3.1 que cette expression est toujours positive ou nulle conformément au second principe de la thermodynamique. L'annuler strictement n'est possible que si

$$\mu = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = 0.$$

2. Notation identique à celle utilisée dans les dérivations particulières.

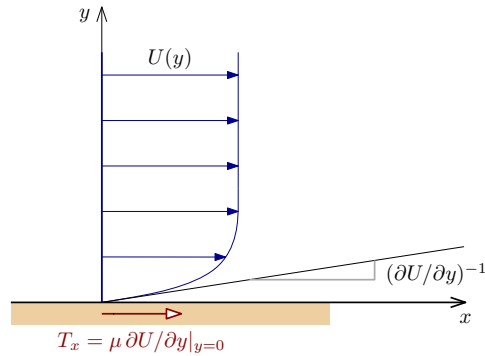


FIGURE 5.3 – Frottement visqueux sur une paroi solide. Le frottement exercé par le fluide sur la paroi dans la direction  $x$  est directement proportionnel à la pente du profil de vitesse  $u(y)$  au point de contact, le coefficient de proportionnalité est la viscosité du fluide ( $\mu$ ).

On en déduira que le fluide parfait est nécessairement *non visqueux et non-conducteur de chaleur*. Par ailleurs, comme le montre la dégénérescence de l'équation de transport de l'entropie :

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\mathcal{P}^*}{T} = 0,$$

l'absence d'irréversibilité et de diffusion thermique a pour conséquence immédiate un *mouvement à entropie constante sur chaque trajectoire*. Si de plus, l'entropie est constante et égale à  $s_0$  en tout point du champ à un instant donné, alors elle le restera à tout instant ultérieur. On dit alors que le mouvement est *homentropique* et il vérifie la *relation de barotropie* :

$$s(\rho, P) = s_0.$$

## Propriétés

### 1. Absence de transferts pariétaux : frottements et échanges de chaleur

Si on considère avec la figure 5.3 une paroi de normale  $y$  en contact avec un fluide visqueux incompressible du côté  $y > 0$ , la force de frottement exercée par le fluide sur la paroi par unité de surface possède deux composantes

$$T_x = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad \text{et} \quad T_z = \mu \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=0}.$$

De même le flux de chaleur échangé avec la paroi s'écrit

$$\varphi_T = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}.$$

La nullité de  $\mu$  et de  $\lambda$  implique la nullité des transferts pariétaux de quantité de mouvement (frottement) et de chaleur (flux thermique), même en présence de gradients de vitesse et de température.

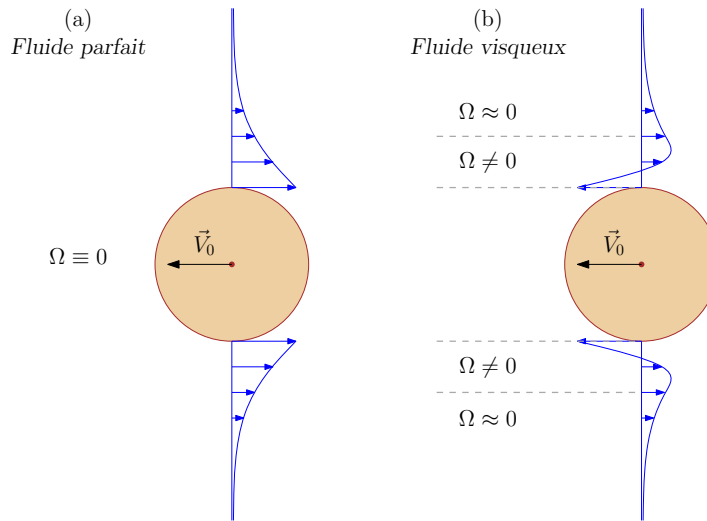


FIGURE 5.4 – Champs de vitesse induits par la mise en mouvement d'un barreau cylindrique dans un fluide initialement au repos : (a) fluide parfait, (b) fluide visqueux. Le champ fluide-parfait initialement irrotationnel reste irrotationnel, contrairement au champ fluide-visqueux où la présence de la paroi constitue une source de rotationnel.

2. Existence d'une solution irrotationnelle dans toute mise en mouvement à partir de l'état de repos

Cette propriété du fluide parfait découle du théorème de Lagrange et justifie l'intérêt d'étudier spécifiquement la classe des écoulements irrotationnels. Ici encore, c'est au voisinage de parois solides que cette hypothèse est la plus critiquable pour un fluide réel. La figure 5.4 représente les profils de vitesse obtenus au droit du maître couple d'un cylindre circulaire animé d'un mouvement à vitesse uniforme  $\vec{V}_0$  dans un fluide parfait (a) ou visqueux (b). Dans les deux cas, la solution représentée peut être obtenue après mise en vitesse du cylindre, initialement immobile dans le fluide au repos. En fluide parfait, le champ de vitesse reste irrotationnel alors que, dans le cas du fluide visqueux, la condition d'adhérence est responsable d'une création de rotationnel à la paroi. La contamination de l'écoulement par diffusion moléculaire peut rester limitée, le champ lointain conservant un caractère sensiblement irrotationnel. Cette particularité est mise à profit dans les méthodes de calcul de type « couplage fluide parfait-couche limite<sup>3</sup> » qui seront présentées dans le cours de deuxième année.

3. Absence de décollement en régime incompressible

On verra également dans le chapitre 7, qu'en fluide réel, la condition d'adhérence contribue à l'apparition d'un phénomène dit « de décollement » qui limite les performances aérodynamiques (diminution de rendement, perte d'efficacité...). Schématiquement, ce phénomène se produit lorsque le fluide n'arrive plus à « suivre » la paroi, il se forme alors (entre le courant principal et la paroi) une zone de recirculation (d'eau morte) où les pertes par effet de viscosité (dissipation) sont importantes. La figure 5.5 illustre ce

3. Le terme *couche limite* désigne la zone rotationnelle située à proximité de la paroi et dominée par les effets visqueux.

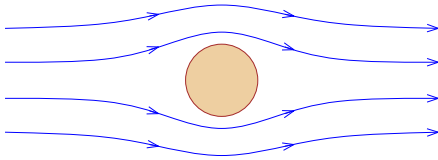
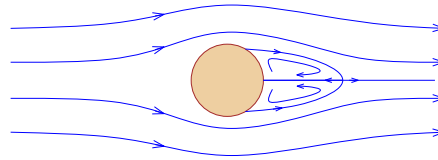
(a) *Fluide parfait incompressible*(b) *Fluide visqueux incompressible*

FIGURE 5.5 – Allure des lignes de courant obtenues autour d'un barreau cylindrique plongé dans un écoulement uniforme de fluide parfait (a) ou de fluide visqueux (b). Dans le cas fluide-visqueux à faible nombre de Reynolds, on observe l'apparition de deux rouleaux tourbillonnaires contrarotatifs attachés dans le sillage du barreau : c'est le phénomène de décollement.

phénomène tel qu'il apparaît dans le sillage d'un cylindre à faible nombre de Reynolds. Compte-tenu de son origine physique, le décollement n'apparaît jamais en écoulement de fluide parfait, tout au moins en régime incompressible.

## 5.2.2 L'hypothèse d'incompressibilité et ses conséquences

**Définition** En toute rigueur, un fluide peut être qualifié d'incompressible si sa masse volumique ne dépend ni de la température ni de la pression [ $\rho(P, T) = \text{Const.}$ ]. Cette définition n'est équivalente à celle que nous avons utilisée jusqu'à présent [ $\rho(x, y, z, t) = \text{Const.}$ ] que si le fluide est homogène (monoconstituant). On continuera donc d'utiliser le qualificatif d'incompressible en se limitant implicitement au cas monoconstituant, ceci entraîne bien évidemment la satisfaction de la condition isovolume  $\text{div} \vec{V} = 0$ .

### Propriétés

#### 1. Le domaine d'influence d'un point s'étend à tout le champ d'écoulement

On a vu en première partie, qu'en écoulement de fluide incompressible, le champ de pression répondait à une équation de Laplace. La solution de cette équation en formulation de Green montre que la perturbation du champ de vitesse en un point du domaine fluide produit une modification instantanée du champ de pression en tout autre point du domaine. Cette propriété conduit à reconnaître que le domaine d'influence d'un point s'étend à tout le domaine fluide, elle explique comment les lignes de courant peuvent être déviées en amont d'un corps solide lorsque celui-ci se déplace dans un fluide incompressible (cf. figure 5.6).

#### 2. Propagation des ondes de pression à vitesse infinie – absence d'onde de choc

Les ondes de choc observables en écoulement compressible ne doivent leur existence qu'à la possibilité que la vitesse du fluide puisse excéder la célérité du son. En écoulement incompressible, le fait que le champ de pression s'établisse instantanément (en réponse à une équation de Laplace) équivaut à une propagation à vitesse infinie et rend impossible, de ce fait, la présence d'ondes de choc.

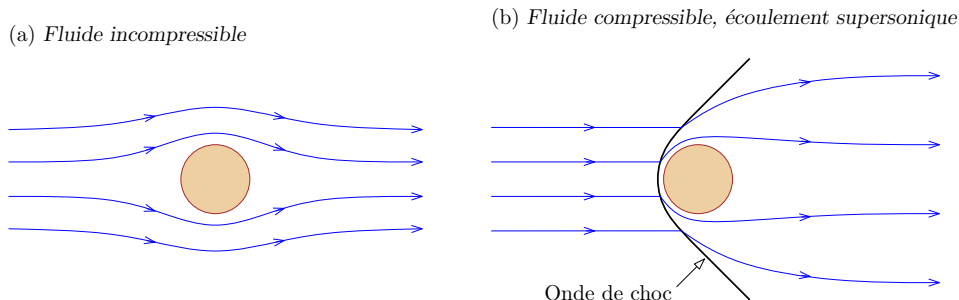


FIGURE 5.6 – Allure des lignes de courant obtenues autour d'un barreau cylindrique plongé dans un écoulement uniforme de fluide incompressible (a) ou dans un écoulement supersonique de fluide compressible (b). Dans le cas compressible, on observe la présence d'une onde choc et l'indépendance de l'écoulement amont aux conditions aval.

### 5.2.3 Formes particulières des théorèmes généraux

Sous les deux hypothèses de fluide parfait et d'incompressibilité, les théorèmes généraux vont pouvoir être réécrits sous forme simplifiée.

**Théorème d'Euler** Pour un fluide parfait les forces extérieures de surface qu'il convient de retenir dans l'énoncé du théorème d'Euler se réduisent aux contraintes normales de pression :

$$\iint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_D \rho \vec{F} \, dx \, dy \, dz - \iint_S P \vec{n} \, d\sigma.$$

**Théorèmes de Bernoulli** L'hypothèse d'incompressibilité  $\rho(x, y, z, t) = \text{Const.}$  constitue une relation de barotropie et permet de préciser les énoncés du théorème de Bernoulli dans ses formulations forte et faible.

1. En écoulement irrotationnel (formulation forte) :

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + P + \frac{1}{2} \rho \mathcal{V}^2 + \rho \mathcal{F} = \wp(t);$$

2. En écoulement permanent (formulation faible) :

$$P + \frac{1}{2} \rho \mathcal{V}^2 + \rho \mathcal{F} = \text{Const. (sur chaque ligne de courant).}$$



## Chapitre 6

# Écoulements à potentiel complexe

### 6.1 Hypothèses générales

Les écoulements à potentiel complexe peuvent être étudiés sous les deux hypothèses suivantes :

1. Mouvement irrotationnel de fluide incompressible ;
2. Mouvement bidimensionnel.

Si l'hypothèse fluide-parfait n'est donc pas à proprement parler nécessaire, elle est souvent implicite. En effet, comme on l'a vu dans la première partie, la présence de parois en écoulement de fluide visqueux conduit généralement à une production de rotationnel, invalidant en pratique la première de nos hypothèses.

On va maintenant préciser le cadre mathématique de l'étude en examinant successivement les conséquences des hypothèses 1 et 2.

#### 6.1.1 Mouvement irrotationnel de fluide incompressible

Comme on l'a vu précédemment, les hypothèses  $\operatorname{div} \vec{V} = 0$  et  $\operatorname{rot} \vec{V} = 0$  permettent d'introduire le potentiel de vitesse  $\phi$  et la fonction courant vectorielle  $\vec{\psi}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} = 0 &\Rightarrow \exists \vec{\psi} \text{ tel que } \begin{cases} \vec{V} = \operatorname{rot} \vec{\psi} \\ \operatorname{div} \vec{\psi} = 0 \end{cases}, \\ \operatorname{rot} \vec{V} = 0 &\Rightarrow \exists \phi \text{ tel que } \vec{V} = \operatorname{grad} \phi. \end{aligned}$$

En croisant chaque hypothèse avec le résultat de l'autre, on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{V} = 0 \\ \vec{V} = \operatorname{grad} \phi \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{div} (\operatorname{grad} \phi) = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \phi = 0.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \vec{V} = 0 \\ \vec{V} = \text{rot } \vec{\psi} \\ \text{div } \vec{\psi} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rot}(\text{rot } \vec{\psi}) = \text{grad}(\text{div } \vec{\psi}) - \Delta \vec{\psi} = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \vec{\psi} = 0.}$$

On montre ainsi que potentiel et la fonction courant sont *des fonctions harmoniques*.

Par ailleurs, le *théorème de Bernoulli* pourra s'appliquer en formulation forte puisque

- l'hypothèse d'écoulement irrotationnel est admise;
- l'hypothèse d'incompressibilité constitue une relation de barotropie ( $\rho = \text{Const.}$ )

On retiendra donc que

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\mathcal{V}^2}{2} + \mathcal{F} + \frac{P}{\rho} = \varphi(t),}$$

qui, en *écoulement permanent*, peut se simplifier sous la forme

$$\frac{\mathcal{V}^2}{2} + \mathcal{F} + \frac{P}{\rho} = \text{Const.}$$

### 6.1.2 Mouvement bidimensionnel plan

Si on ajoute maintenant l'hypothèse d'un écoulement bidimensionnel-plan, soit

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad W = 0,$$

on sait (cf. annexe A) que la fonction courant peut être définie comme un champ de vecteurs colinéaires à l'axe  $z$ , sa composante suivant cet axe ne dépendant que des coordonnées  $x$  et  $y$ , c'est-à-dire :

$$\boxed{\vec{\psi} = \psi(x, y) \vec{e}_z} \quad \text{avec} \quad U = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

#### Cadre d'étude des écoulements à potentiel complexe

- Hypothèses

$$\rho = \rho_0, \quad \text{rot } \vec{V} = 0, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = 0, \quad w = 0.$$

- Équations résolvantes

$$\Delta \phi = 0, \quad \Delta \psi = 0.$$

- Champ de vitesse

$$\vec{V} = \text{grad } \phi \Leftrightarrow \begin{cases} U = \partial \phi / \partial x \\ V = \partial \phi / \partial y \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{V} = \text{rot } \vec{\psi} \Leftrightarrow \begin{cases} U = \partial \psi / \partial y \\ V = -\partial \psi / \partial x \end{cases}.$$

- Champ de pression

$$\frac{P}{\rho} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\mathcal{V}^2}{2} - \mathcal{F} + \varphi(t).$$

## 6.2 Potentiel et vitesse complexe

Considérant maintenant un point  $(x, y)$  du plan de l'écoulement, on peut lui associer le nombre complexe  $z = x + iy$  et introduire la fonction

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

qui vérifie les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y} = U(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x} = V(x, y).$$

La fonction  $f$  est donc analytique (ou holomorphe), on l'appelle *potentiel complexe*. Réciproquement, il est immédiat de constater que toute fonction analytique de  $z$  (vérifiant donc les conditions de Cauchy-Riemann) a ses parties réelle et imaginaire harmoniques, elles correspondent donc au potentiel et à la fonction courant d'un écoulement vérifiant nos hypothèses. On retiendra donc que :

Tout écoulement *bidimensionnel-plan, permanent et irrotationnel* de fluide visqueux incompressible peut être associé à une fonction analytique de la variable complexe dont la partie réelle est égale au potentiel de vitesse, et la partie imaginaire à la fonction courant de cet écoulement ; et réciproquement.

**Remarque** Le résultat ci-dessus est donné dans sa formulation la plus générale. Cependant, en pratique, il est dangereux de l'appliquer dans le cadre d'un fluide visqueux. Nous avons vu en effet au paragraphe 3.2.2 que la viscosité est source de rotationnel au sein d'un écoulement, ce qui invalide l'hypothèse d'existence de la fonction potentiel de vitesse  $\phi$ . Ainsi, dans toute la suite du document, le fluide sera considéré *non visqueux*.

L'analyticité de  $f$  assure que sa dérivée existe (on dit que  $f$  est  $z$ -dérivable) et s'écrit sous la forme :

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x} - i\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y} = U(x, y) - iV(x, y).$$

On la note  $w(z)$ , c'est la vitesse complexe.

Enfin, compte-tenu des hypothèses retenues, la valeur de la pression pourra être reliée à celle de la vitesse complexe à l'aide de la relation de Bernoulli écrite sous la forme :

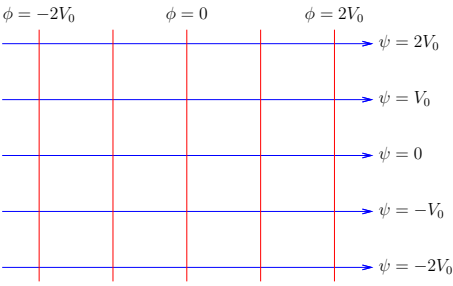
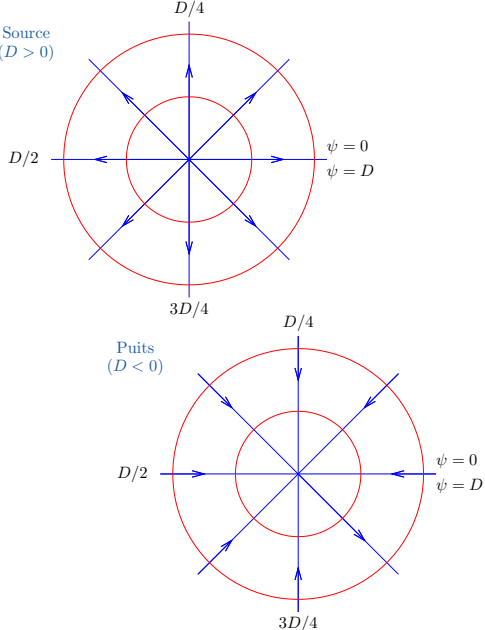
$$P = K - \frac{1}{2}\rho w(z)\overline{w(z)},$$

où  $K$  est une constante dans tout le champ de l'écoulement, assimilable à la *pression totale* vue dans le cours d'aérodynamique.

**Propriété : Principe de superposition** Il est évident que toute combinaison linéaire de fonctions analytiques est une fonction analytique. Si on dispose d'un ensemble de potentiels complexes élémentaires, il sera donc possible d'en construire de nouveaux par simple combinaison linéaire. La linéarité du potentiel complexe induit celle du champ de vitesse. Ainsi, si le potentiel complexe est constitué par une combinaison linéaire de potentiels élémentaires, le champ de vitesse sera constitué de la *même* combinaison linéaire des champs de vitesse élémentaires. Par contre, cette propriété ne se transfère en aucun cas au champ de pression.

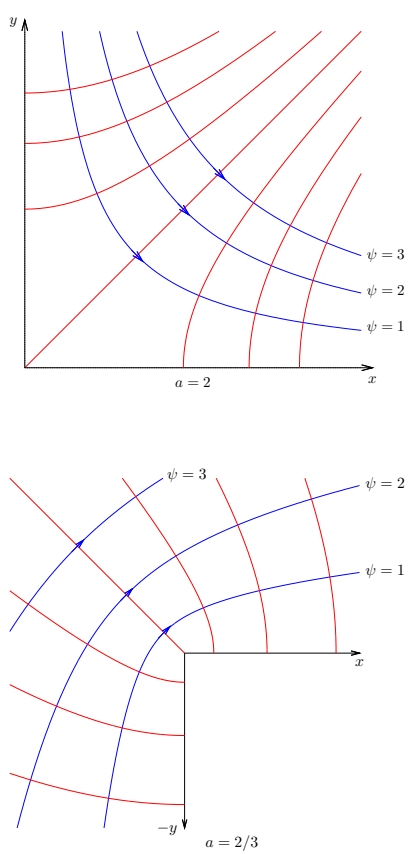
### 6.2.1 Potentiels complexes élémentaires

La fonction courant et le potentiel de vitesse sont des fonctions harmoniques. On connaît depuis longtemps (en électromagnétisme par exemple) des fonctions de ce type. On va en introduire ici un certain nombre, ce qui permettra par la suite de construire des écoulements plus complexes en application du principe de superposition.

<p style="text-align: center;"><b>Écoulement uniforme</b></p>	<p style="text-align: center;"><math>f(z) = V_0 z</math>, avec <math>V_0 \in \mathbb{R}</math></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Équipotentiellles</i> <math>x = \text{Const.}</math></li> <li>• <i>Lignes de courant</i> <math>y = \text{Const.}</math></li> </ul> <p><u>Remarque</u> On obtient un champ de vitesse uniforme incliné d'un angle <math>\alpha</math> sur l'horizontale en remplaçant <math>z</math> par <math>ze^{-i\alpha}</math> dans l'expression du potentiel complexe.</p>	
<p style="text-align: center;"><b>Source/Puits</b></p>	<p style="text-align: center;"><math>f(z) = \frac{D}{2\pi} \ln z</math>, avec <math>D \in \mathbb{R}</math></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Équipotentiellles</i> <math>r = \text{Const.}</math></li> <li>• <i>Lignes de courant</i> <math>\theta = \text{Const.}</math></li> </ul> <p><u>Remarque 1</u> Le débit (par unité de longueur selon la troisième direction) passant à travers n'importe quel cercle centré à l'origine est égal à <math>D</math>.</p> <p><u>Remarque 2</u> On peut localiser la singularité en <math>z_0 \neq 0</math> en remplaçant <math>z</math> par <math>z - z_0</math> dans l'expression du potentiel complexe.</p>	

<b>Tourbillon</b>	$f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$ , avec $\Gamma \in \mathbb{R}$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Équipotentiellles</i> <math>\theta = \text{Const.}</math></li> <li>• <i>Lignes de courant</i> <math>r = \text{Const.}</math></li> </ul> <p><u>Remarque 1</u> La circulation du vecteur vitesse sur n'importe quel cercle centré à l'origine est égale à <math>\Gamma</math>.</p> <p><u>Remarque 2</u> On peut localiser la singularité en <math>z_0 \neq 0</math> en remplaçant <math>z</math> par <math>z - z_0</math> dans l'expression du potentiel complexe.</p>	$\Gamma > 0$ 

<b>Doublet</b>	$f(z) = \frac{m}{z}$ , avec $m \in \mathbb{R}$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Équipotentiellles</i> Cercles centrés sur l'axe <math>Ox</math> et passant par l'origine</li> <li>• <i>Lignes de courant</i> Cercles centrés sur l'axe <math>Oy</math> et passant par l'origine</li> </ul> <p><u>Remarque</u> On peut localiser le doublet en <math>z_0 \neq 0</math> et l'incliner d'un angle <math>\alpha</math> par rapport à l'axe <math>Ox</math> en remplaçant <math>z</math> par <math>(z - z_0) e^{-i\alpha}</math> dans l'expression du potentiel complexe.</p>	$m > 0$ 

<b>Coin/Dièdre</b>	$f(z) = Kz^a$ , avec $(K, a) \in \mathbb{R}^2$
<p>• <i>Équipotentiell</i>            Courbes polaires telles que :  <math>r \cos^{1/a}(a\theta) = \text{Const.}</math></p> <p>• <i>Lignes de courant</i>            Courbes polaires telles que :  <math>r \sin^{1/a}(a\theta) = \text{Const.}</math></p> <p><u>Remarque 1</u> L'écoulement se développe dans un domaine limité par les deux demi-droites <math>\theta = 0</math> et <math>\theta = \pi/a</math> qui sont des lignes de courant à <math>\psi = 0</math>. Si <math>\pi/a &lt; \pi</math> (<math>a &gt; 1</math>), on obtient l'écoulement dans un coin ; si <math>\pi/a &gt; \pi</math> (<math>a &lt; 1</math>), on parle de l'écoulement autour d'un dièdre.</p> <p><u>Remarque 2</u> Dans le cas d'un coin ; l'origine est un point d'arrêt (<math>V = 0</math>) alors que dans le cas d'un dièdre, le champ de vitesse y est singulier (<math>V \rightarrow \infty</math>).</p> <p><u>Remarque 3</u> On peut localiser le sommet de l'angle en <math>z_0 \neq 0</math>, et incliner la face <math>\theta = 0</math> d'un angle <math>\alpha</math> par rapport à l'axe <math>Ox</math> en remplaçant <math>z</math> par <math>(z - z_0)e^{-i\alpha}</math> dans l'expression du potentiel complexe.</p>	 <p>The figure contains two coordinate systems. The top one is for <math>a = 2</math> and shows a flow entering a 90-degree corner. The x-axis is horizontal and the y-axis is vertical. Blue curves represent equipotential lines and red curves represent streamlines. Three streamlines are labeled <math>\psi = 1, 2, 3</math>. The bottom plot is for <math>a = 2/3</math> and shows a flow around a 270-degree re-entrant corner. The x-axis is horizontal and the y-axis is vertical, with the negative y-axis labeled <math>-y</math>. Blue curves represent equipotential lines and red curves represent streamlines. Three streamlines are labeled <math>\psi = 1, 2, 3</math>.</p>

## 6.3 Principe de matérialisation et calcul des efforts en écoulement de fluide parfait

### 6.3.1 Principe de matérialisation

En fluide parfait, la condition à la limite applicable sur une paroi solide est une simple condition d'imperméabilité. Une ligne de courant possède cette propriété, on peut donc si nécessaire considérer qu'elle correspond à une paroi. C'est le *principe de matérialisation* selon lequel :

On ne modifie pas l'écoulement bidimensionnel-plan d'un fluide parfait en matérialisant tout ou partie d'une ligne de courant (c.-à-d. en remplaçant tout ou partie de la ligne de courant par une paroi solide.)

Ce principe se généralise en écoulement tridimensionnel en considérant des nappes de courant. Par ailleurs rien ne s'oppose à ce que l'écoulement soit non stationnaire, bien que dans ce cas, on puisse être amené à considérer une paroi déformable.

### 6.3.2 Calcul des efforts sur une ligne de courant fermée : Formules de Blasius

L'application du principe de matérialisation à une ligne de courant fermée permet d'étudier l'écoulement d'un fluide autour d'un corps solide. Dans cette situation, il peut être important de connaître la résultante des efforts exercés par le fluide sur l'obstacle, et on va voir que la théorie des potentiels complexes permet d'accéder de manière simple et rapide à cette grandeur. Pour ceci, on va considérer une ligne de courant fermée  $\mathcal{C}$  prise dans le champ d'un écoulement

- bidimensionnel-plan et permanent ;
- de fluide parfait, incompressible.

Cette ligne de courant matérialise un obstacle cylindrique, infini dans la direction  $z$ , et on va chercher à évaluer l'effort  $\vec{A}$  par unité de longueur en  $z$  exercé par le fluide sur l'obstacle. En fluide parfait, cet effort résulte de l'action des seules forces de pression et s'écrit

$$\vec{A} = \int_{\mathcal{C}} -P\vec{n} (ds \times 1),$$

où  $\vec{n}$  est la normale extérieure au contour  $\mathcal{C}$ , et  $ds$  l'élément d'abscisse curviligne sur ce contour orienté dans le sens trigonométrique (cf. figure 6.1). Dans l'expression de  $\vec{A}$  portée ci-dessus, on a multiplié  $ds$  par l'unité pour constituer un élément de surface et rappeler qu'il s'agit d'un effort par unité de longueur en  $z$ . En utilisant la relation de Bernoulli, on peut récrire l'expression de la résultante sous la forme

$$\vec{A} = \int_{\mathcal{C}} \left( -K + \frac{1}{2}\rho\mathcal{V}^2 \right) \vec{n} ds, \quad \text{puis} \quad \vec{A} = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2}\rho\mathcal{V}^2 \vec{n} ds$$

puisque  $K$  est une constante et que l'intégrale de la normale sur un contour fermé est nulle. En appelant ensuite  $dx$  et  $dy$  les composantes selon  $x$  et  $y$  de l'élément  $ds$ , on peut noter que  $\vec{n} ds = dy \vec{e}_x - dx \vec{e}_y$  pour obtenir

$$\vec{A} = \vec{e}_x \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2}\rho\mathcal{V}^2 dy + \vec{e}_y \int_{\mathcal{C}} -\frac{1}{2}\rho\mathcal{V}^2 dx = X_a \vec{e}_x + Y_a \vec{e}_y,$$

où on a identifié les deux composantes  $X_a$  et  $Y_a$  de la résultante. On va maintenant lui associer le nombre complexe

$$A = X_a + i Y_a = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2}\rho\mathcal{V}^2 dy + i \int_{\mathcal{C}} -\frac{1}{2}\rho\mathcal{V}^2 dx,$$

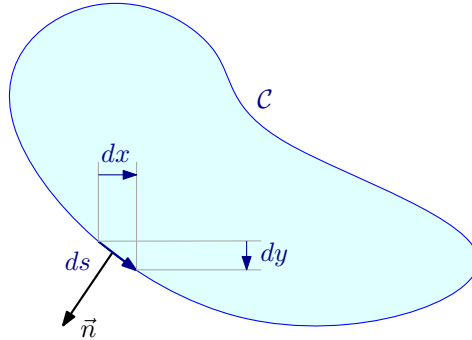


FIGURE 6.1 – Repérage de l'élément d'abscisse curviligne et du vecteur normal pour le calcul des efforts sur une ligne de courant fermée

dont le conjugué peut s'écrire

$$\bar{A} = \int_C \frac{1}{2} \rho \mathcal{V}^2 (dy + i dx) = \frac{i\rho}{2} \int_C \mathcal{V}^2 \bar{dz},$$

ou encore, en introduisant la vitesse complexe :

$$\bar{A} = \frac{i\rho}{2} \int_C w(z) \overline{w(z)} \bar{dz}.$$

On remarquera, pour finir, que  $\overline{w(z)} \bar{dz} = \overline{df}$  et que sur une ligne de courant  $\overline{df} = df$ , puisque  $d\psi = 0$ . On en déduit la formule suivante, dite première formule de Blasius :

$$\bar{A} = \frac{i\rho}{2} \int_C w^2(z) dz.$$

La seconde formule de Blasius est obtenue en considérant la somme des moments par rapport à un point d'affixe  $z_0$  des efforts élémentaires de pression, elle s'écrit

$$M_{z_0} = -\frac{\rho}{2} \Re \left[ \int_C (z - z_0) w^2(z) dz \right].$$

## 6.4 Paradoxe de d'Alembert et effet Magnus en écoulement de fluide parfait

### 6.4.1 Écoulement autour d'un cylindre sans circulation : Le paradoxe de d'Alembert

On considère l'écoulement de fluide parfait obtenu par la superposition d'un écoulement uniforme à la vitesse  $V_0 \vec{e}_x$  et d'un doublet de moment positif  $m$  placé à l'origine. Le potentiel

complexe de l'écoulement s'obtient par simple addition des deux potentiels élémentaires correspondants :

$$f(z) = V_0 z + m/z.$$

La vitesse complexe est obtenue par dérivation :

$$w(z) = V_0 - m/z^2.$$

**Points d'arrêt** Les points d'arrêt sont les points où la vitesse s'annule, ici ils correspondent aux solutions de l'équation

$$V_0 - m/z^2 = 0,$$

et sont donc au nombre de deux :  $z_1 = \pm\sqrt{m/V_0}$ .

**Potentiel et fonction courant** En posant  $z = x + iy$ , le potentiel complexe prend la forme :

$$f(z) = V_0(x + iy) + \frac{m}{x + iy} = \left[ V_0 x + \frac{mx}{x^2 + y^2} \right] + i \left[ V_0 y - \frac{my}{x^2 + y^2} \right],$$

dont on peut déduire les expressions du potentiel de vitesse et de la fonction courant :

$$\begin{aligned} \phi &= \left( V_0 + \frac{m}{x^2 + y^2} \right) x, \\ \psi &= \left( V_0 - \frac{m}{x^2 + y^2} \right) y. \end{aligned}$$

**Ligne de courant du point d'arrêt** L'équation d'une ligne de courant est obtenue en écrivant que la fonction courant  $\psi$  conserve une valeur constante. Ici, la valeur prise par la fonction courant aux deux points d'arrêt ( $x = \pm\sqrt{m/V_0}$  et  $y = 0$ ) est nulle, les lignes de courant passant par ces points obéissent donc à l'équation

$$\left( V_0 - \frac{m}{x^2 + y^2} \right) y = 0,$$

soit

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = m/V_0.$$

Il s'agit donc de l'axe horizontal et du cercle  $\mathcal{C} \left( 0, \sqrt{m/V_0} \right)$ . L'écoulement correspondant est décrit dans la figure 6.2. À partir de maintenant, on s'intéressera à l'écoulement extérieur au cercle  $\mathcal{C} \left( 0, \sqrt{m/V_0} \right)$  en considérant (d'après le principe de matérialisation) qu'il s'agit de l'écoulement, uniforme à l'infini, d'un fluide parfait autour d'un cylindre circulaire de rayon  $R = \sqrt{m/V_0}$ .

**Répartition de vitesse et de pression sur le contour de l'obstacle** Sur le cercle  $\mathcal{C}$ , on peut poser  $z = R e^{i\theta}$ , la vitesse complexe peut donc s'écrire

$$w(z) = V_0 (1 - e^{-2i\theta}) = 2i V_0 \sin \theta e^{-i\theta},$$

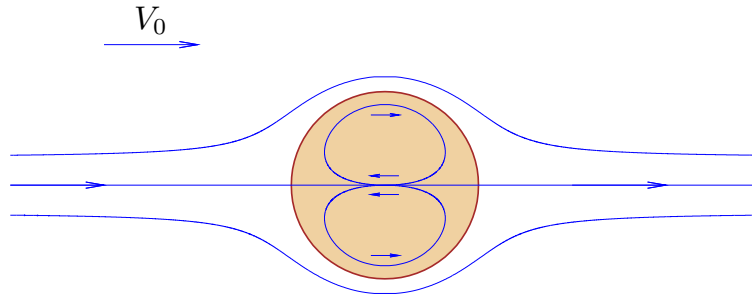


FIGURE 6.2 – Écoulement autour du cylindre sans circulation.

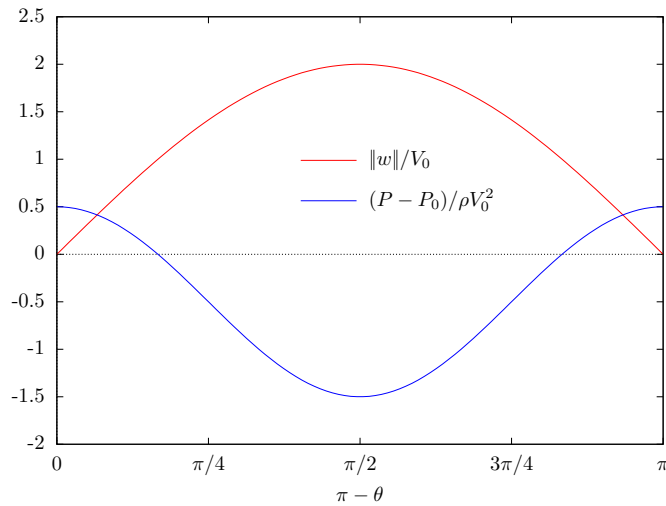


FIGURE 6.3 – Évolutions de vitesse et pression le long de la paroi du cylindre dans l'écoulement sans circulation.

et son module est égal à  $2V_0|\sin\theta|$ . Pour la pression, on pourra écrire le théorème de Bernoulli entre l'infini amont et un point de la ligne de courant :

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2 = P + \frac{1}{2}\rho |w|^2 \quad \text{d'où} \quad P - P_0 = \frac{1}{2}\rho V_0^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

Les évolutions correspondantes sont portées sur la figure 6.3. On constate que la vitesse maximale est atteinte pour  $\theta = \pi/2$  (point d'épaisseur maximale) où elle vaut le double de  $V_0$ . Ce point correspond, en accord avec le théorème de Bernoulli, à la dépression maximale. De même, les deux points d'arrêt en  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  correspondent au maximum de surpression.

**Calcul des efforts et paradoxe de d'Alembert** On a montré précédemment que, dans ce cas, la répartition de pression sur le cercle était symétrique par rapport à  $x$  et  $y$  (cf. Figure 6.4). L'effort exercé sur ce cercle est donc nul. Ce résultat est paradoxal dans la

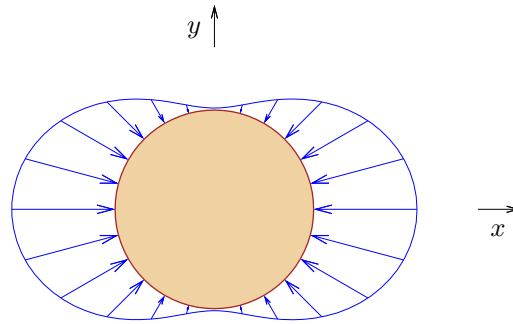


FIGURE 6.4 – Efforts de pression exercés par le fluide sur le cylindre dans l'écoulement sans circulation.

mesure où, s'il fait peu de doute que l'effort de portance soit nul (symétrie par rapport à l'axe des  $x$ ), l'expérience de tous les jours montre que l'on devrait obtenir un effort de traînée. Cette contradiction provient des effets visqueux qui sont absents du modèle fluide parfait mais bien présents dans la réalité. Elle se traduit par la proposition connue sous le nom de paradoxe de d'Alembert que nous généraliserons ici sans démonstration au cas d'un obstacle quelconque.

#### Paradoxe de d'Alembert

L'effort de *traînée* exercé sur un obstacle placé dans un courant uniforme à l'infini est nul si le fluide est

- un fluide parfait incompressible,
- et le mouvement
- bidimensionnel-plan ;
- permanent ;
- irrotationnel.

Si de plus, la circulation du vecteur vitesse sur le contour de l'obstacle est nulle, alors l'effort de *portance* s'annule également.

#### 6.4.2 Écoulement autour d'un cylindre avec circulation : Effet Magnus

On s'intéresse maintenant au cas où la condition sur la circulation du vecteur vitesse du paradoxe de d'Alembert n'est pas vérifiée. Pour ceci, on va superposer à l'écoulement précédemment étudié (champ uniforme à la vitesse  $V_0 \vec{e}_x$  et doublet centré à l'origine de moment  $m = V_0 R^2$ ), celui généré par un tourbillon à circulation constante  $\Gamma$  centré à l'origine du repère. Le cercle est ligne de courant pour les deux écoulements, il le sera donc également pour l'écoulement résultant de la superposition. Le principe de matérialisation pourra donc toujours lui être appliqué, et l'écoulement considéré comme celui se développant autour d'un cylindre circulaire plongé dans un écoulement uniforme à l'infini en présence d'une circulation.

En ajoutant à l'expression du potentiel celle correspondant au tourbillon, on obtient le potentiel complexe

$$f(z) = V_0 \left( z + \frac{R^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z,$$

puis, par dérivation, la vitesse complexe

$$w(z) = V_0 \left( 1 - \frac{R^2}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z}.$$

Les points d'arrêt sont obtenus pour  $w(z) = 0$  soit

$$z^2 - \frac{i\Gamma}{2\pi V_0} z - R^2 = 0.$$

C'est une équation du second degré en  $z$  dont le discriminant s'écrit

$$\Delta = -\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 V_0^2} + 4R^2.$$

L'existence et la position des points d'arrêt doivent être discutées en fonction du signe de  $\Delta$  :

a) Si  $\Delta > 0$ , alors  $\Gamma < 4\pi V_0 R$  et on a deux racines :

$$z_{\frac{1}{2}} = \frac{i\Gamma \pm \sqrt{(4\pi V_0 R)^2 - \Gamma^2}}{4\pi V_0}.$$

Elles sont symétriques par rapport à l'axe des  $y$  et de module  $R$ , donc placées sur le cercle. Les arguments des points d'arrêt sont donnés par

$$\sin \theta_{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma}{\Gamma_0} \quad \text{avec} \quad \Gamma_0 = 4\pi V_0 R.$$

b) Si  $\Delta = 0$ , alors  $\Gamma = 4\pi V_0 R$  et on a une racine double placée sur le cercle :

$$z_1 = \frac{i\Gamma}{4\pi V_0} = iR.$$

c) Si  $\Delta < 0$ , alors  $\Gamma > 4\pi V_0 R$  et on a deux racines imaginaires pures :

$$z_{\frac{1}{2}} = \frac{i\Gamma \pm i\sqrt{\Gamma^2 - (4\pi V_0 R)^2}}{4\pi V_0}.$$

Elles sont placées de part et d'autre du cercle ( $|z_1| |z_2| = R^2$ ).

Les configurations d'écoulement correspondantes sont illustrées sur la figure 6.5.

**Répartition de vitesse et de pression sur le contour de l'obstacle** Sur le cercle  $\mathcal{C}$ , on peut poser  $z = R e^{i\theta}$ , la vitesse complexe peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} w(z) &= V_0 (1 - e^{-2i\theta}) - \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{-i\theta} \\ &= i e^{-i\theta} \left( 2V_0 \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \right) \end{aligned}$$

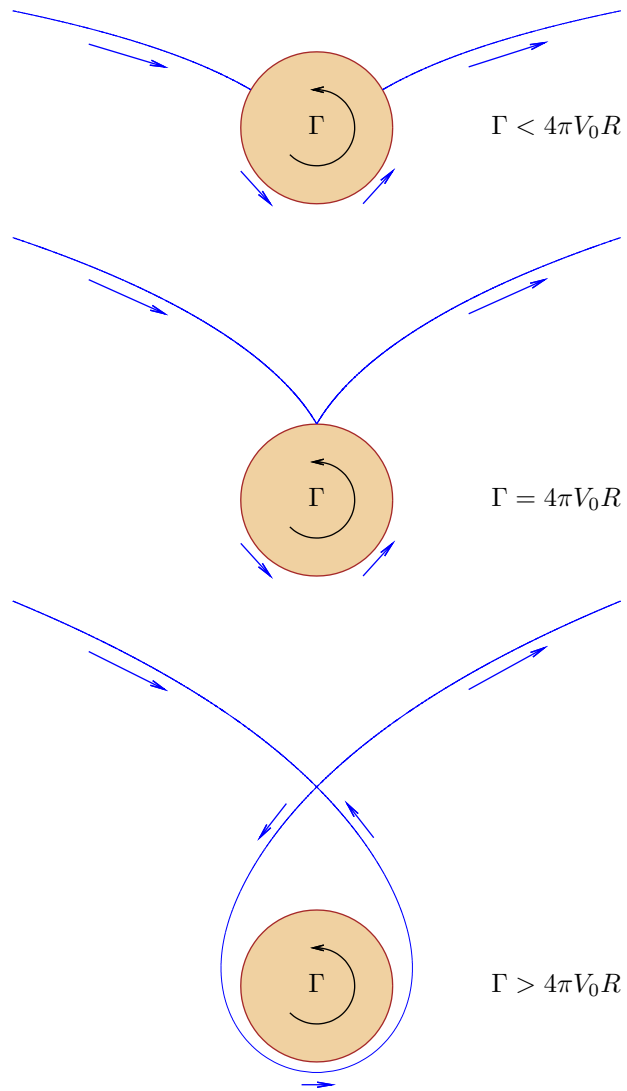


FIGURE 6.5 – Écoulement autour du cylindre avec circulation.

d'où

$$|w| = 2V_0 \left( \sin \theta - \frac{\Gamma}{4\pi V_0 R} \right)$$

puis, par application du théorème de Bernoulli :

$$P = P_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 - 2 \rho V_0^2 \left( \sin \theta - \frac{\Gamma}{4\pi V_0 R} \right)^2.$$

**Effort exercé sur l'obstacle : effet Magnus et théorème de Joukowski** Le calcul de l'effort exercé par le fluide sur le cylindre peut s'effectuer directement par intégration des efforts de pression ou, plus simplement, par l'application de la formule de Blasius à une ligne de courant fermée. C'est cette deuxième méthode que nous utiliserons ici. Si on note l'effort  $A = X_a + iY_a$ , la formule de Blasius s'écrit

$$\bar{A} = \frac{1}{2} i \rho \int_C w^2(z) dz.$$

L'intégrale peut être calculée par la méthode des résidus. En notant que

$$w^2(z) = V_0^2 - i \frac{V_0 \Gamma}{\pi} \frac{1}{z} - \left( \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 2 V_0^2 R^2 \right) \frac{1}{z^2} + i \frac{V_0 \Gamma R^2}{\pi} \frac{1}{z^3} + V_0^2 R^4 \frac{1}{z^4}$$

ne possède que zéro comme singularité à l'intérieur de  $C$  (pôle d'ordre 4), on obtient le résidu en zéro de  $w^2(z)$  qui est le coefficient du terme en  $1/z$  dans l'expression ci-dessus. Il vient donc :

$$\bar{A} = \frac{1}{2} i \rho \times 2 i \pi \times \left( -i \frac{V_0 \Gamma}{\pi} \right) = i \rho V_0 \Gamma,$$

soit

$$X_a = 0 \quad \text{et} \quad Y_a = -\rho V_0 \Gamma.$$

Ce résultat, qui traduit l'absence d'effort de traînée et la présence d'un effort de portance (négatif pour une circulation positive), est connu sous le nom d'*effet Magnus*. La portance observée résulte d'une dissymétrie par rapport à l'axe  $x$  de la répartition des forces de pression (cf. figure 6.6). Cette répartition reste symétrique par rapport à l'axe  $y$  et n'engendre donc pas d'effort de traînée. C'est cet effet qui explique la trajectoire incurvée d'une balle de tennis « brossée » ou « coupée ». C'est également lui qui est mis à contribution dans la propulsion de certains voiliers très particuliers où la voile est remplacée par des cylindres verticaux en rotation. On notera par ailleurs, que le résultat obtenu ne contredit pas le paradoxe de d'Alembert : dans notre cas, on vérifie que  $\Gamma$  représente la circulation du vecteur vitesse sur n'importe quel cercle centré à l'origine, donc sur le contour de l'obstacle. Le fait que cette circulation soit non nulle explique pourquoi le paradoxe de d'Alembert ne s'applique qu'à l'effort de traînée. D'une manière générale l'effet Magnus est la manifestation d'un résultat connu sous le nom de *théorème de Joukowski*, dont on donnera ci-dessous l'énoncé, généralisé sans démonstration au cas d'un obstacle quelconque.

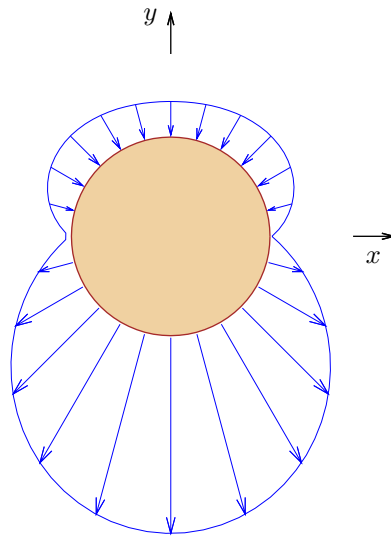


FIGURE 6.6 – Efforts de pression exercés par le fluide sur le cylindre dans l'écoulement avec circulation (ici,  $\Gamma/\Gamma_0 = \sqrt{2}/2$ ).

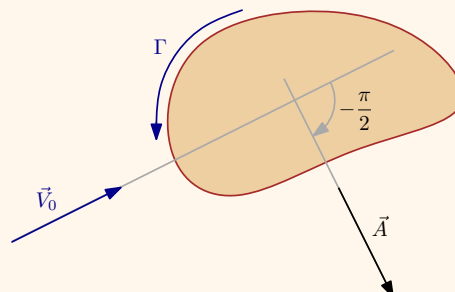
### Théorème de Joukovski

Si on considère l'écoulement uniforme à l'infini d'un fluide parfait incompressible autour d'un obstacle, et que le mouvement est

- bidimensionnel-plan ;
- permanent ;
- irrotationnel,

l'effort exercé sur l'obstacle sera

- orthogonal à  $\vec{V}_0$  ;
  - égal en module à  $|\rho V_0 \Gamma|$  ;
  - orienté par rotation de  $\pi/2$  en sens inverse de  $\Gamma$  à partir du vecteur  $\vec{V}_0$ ,
- si  $\vec{V}_0$  est le vecteur vitesse à l'infini, et  $\Gamma$  la circulation du vecteur vitesse autour de l'obstacle.





## Chapitre 7

# Aérodynamique des profils minces en écoulement de fluide parfait incompressible

Les outils introduits dans le chapitre précédent fournissent des résultats très détaillés — répartition locale des efforts, efforts globaux et détail du champ de vitesse — mais restent limités en termes d'applications. L'écoulement autour d'un cylindre constitue cependant une première configuration d'aérodynamique externe, mais la forme considérée — de section circulaire — reste assez éloignée des formes plus « effilées » utilisées pour réaliser des plans porteurs typiques (aile, empennage...). On va voir maintenant que, grâce à des transformations relativement simples, il est possible de transposer rapidement les résultats obtenus dans l'écoulement autour du cylindre à des configurations beaucoup plus représentatives des formes utilisées en pratique et ainsi poser les bases de l'aérodynamique des profils minces.

### 7.1 Transformation conforme

**Définition** Si  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{z}$  sont deux ouverts de  $\mathbb{C}$ , l'application  $T : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{z}$  est une transformation conforme si :

1.  $T$  est bijective ;
2.  $T$  et  $T^{-1}$  sont analytiques (holomorphes).

**Application à l'étude des écoulements à potentiel complexe** On considère un potentiel complexe  $F$  défini sur le domaine  $\mathbf{Z}$  appelé *domaine générateur* et une transformation conforme  $T$  de  $\mathbf{Z}$  sur  $\mathbf{z}$  appelé *domaine transformé*. Compte-tenu des propriétés de la transformation conforme, il va de soi que  $F(Z) = F(T^{-1}(z)) = f(z)$  est analytique sur  $\mathbf{z}$ . On en déduit que  $f(z)$  est le potentiel complexe d'un écoulement défini sur le domaine transformé. Dans le domaine transformé, la vitesse complexe est obtenue sous la forme :

$$w(z) = \frac{df(z)}{dz} = \frac{dF(Z)}{dz} = \frac{dF(Z)}{dZ} \times \frac{dZ}{dz} = \mathcal{W}(Z) \times \frac{dZ}{dz}.$$

### En résumé

Si :

–  $T$  est une transformation conforme du domaine générateur  $\mathbf{Z}$  sur le domaine transformé  $\mathbf{z}$  ;

–  $F$  est le potentiel complexe d'un écoulement défini sur le domaine  $\mathbf{Z}$ ,

alors :

– on peut considérer qu'il existe un écoulement dans le domaine  $\mathbf{z}$  défini par le potentiel complexe  $f$  tel que

$$z = T(Z), \quad f(z) = F(Z) \quad \text{et} \quad w(z) = W(Z) \times \frac{dZ}{dz}.$$

**Propriété** L'identité  $f(z) = F(Z)$  se transpose aux parties réelle et imaginaire : potentiel de vitesse et fonction courant. On en déduit que :

Les équipotentielles et lignes de courant de l'écoulement dans le domaine générateur sont transformées en équipotentielles et lignes de courant de l'écoulement dans le domaine transformé.

### 7.1.1 Transformation de Joukovski

La transformation de Joukovski fait correspondre à tout nombre complexe  $Z$ , le nombre complexe  $z$  tel que :

$$z = T(Z) = Z + \frac{k^2}{Z}.$$

Cette transformation n'est une *transformation conforme* que si on l'applique à une restriction de  $\mathbb{C}$ . Pour déterminer cette restriction, on recherchera dans quelles conditions la transformation est bijective et biholomorphe.

**$T$  holomorphe** La transformation  $T$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{C}^*$ .

**$T$  bijective** L'image  $z$  de  $Z$  par  $T$  existe et est unique sur le domaine de définition de  $T$ .

Les antécédents  $Z$  de  $z$  sont solutions de l'équation du second degré :

$$Z^2 - zZ + k^2 = 0.$$

Exception faite du cas où  $z = \pm 2k$ , pour lequel  $z$  possède un antécédent unique,  $z$  à toujours deux antécédents :

$$Z_{1,2} = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4k^2}}{2}.$$

Leur produit est égal à  $k^2$  et on peut en déduire

– qu'ils ont des arguments opposés ;

– que si l'un d'eux se trouve à l'intérieur du cercle  $\mathcal{C}(0, k)$ , le second se trouve à l'extérieur.

La transformation sera donc bijective à condition d'exclure l'intérieur ou l'extérieur de ce cercle du domaine  $\mathbf{Z}$ . L'image de  $\mathcal{C}(0, k)$  par  $T$  est le segment  $[-2k, +2k]$ .

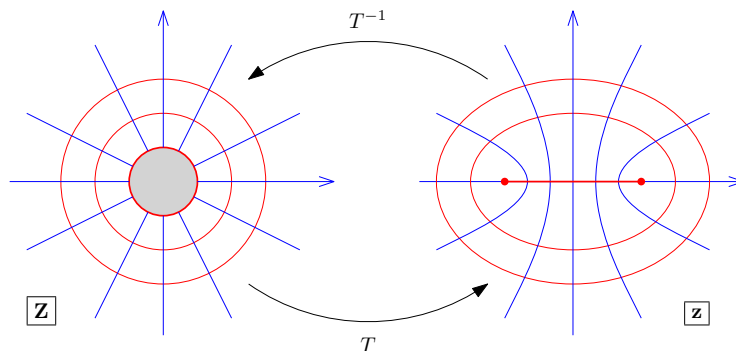


FIGURE 7.1 – Transformation de Joukowski. Le cercle critique (centré à l'origine, de rayon  $k$ ) est transformé en un segment ( $z \in [-2k, 2k]$ ). Noter que l'intérieur du cercle est exclu de la transformation.

$T^{-1}$  **holomorphe** Quelle que soit l'expression retenue pour  $T^{-1}(z)$ , celle-ci est  $z$ -dérivable (holomorphe) pour tout  $z \neq \pm 2k$  ( $Z \neq \pm k$ ).

**Conclusion** Ce qui précède montre qu'il sera possible de définir une transformation conforme entre des domaines  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{z}$  en tenant compte des observations suivantes.

1.  $T^{-1}$  n'est pas  $z$ -dérivable en  $z = \pm 2k$  :
  - les points  $z = \pm 2k$  devront être exclus du domaine  $\mathbf{z}$ ,
  - leurs antécédents  $Z = \pm k$  du domaine  $\mathbf{Z}$ .
2. Chaque point du plan  $z$  possède deux antécédents dans  $\mathbf{Z}$  :
  - l'intérieur ou l'extérieur du cercle critique  $\mathcal{C}(0, k)$  devra être exclu du domaine  $\mathbf{Z}$ .
3. Chaque point du segment  $[-2k, +2k]$  possède deux antécédents sur le cercle critique :
  - le segment  $[-2k, +2k]$  devra être exclu du domaine  $\mathbf{z}$ ,
  - le cercle critique du domaine  $\mathbf{Z}$ .

On retiendra donc la définition suivante.

L'application

$$T(Z) = Z + \frac{k^2}{Z}$$

du domaine

$$\mathbf{Z} = \mathbb{C} - \mathcal{D}(0, k),$$

où  $\mathcal{D}(0, k)$  est le disque fermé de centre  $z = 0$  et de rayon  $k$ , sur le domaine

$$\mathbf{z} = \mathbb{C} - [-2k, 2k],$$

est une transformation conforme. C'est la **transformation de Joukowski**.

La figure 7.1 propose une représentation graphique de la transformation de Joukowski. Le cercle critique et son image sont figurés en trait gras. On pourra alors faire un certain nombre

de remarques : lorsque  $Z$  parcourt le demi-cercle  $y > 0$ ,  $z$  parcourt le segment  $[-2k, 2k]$  avec  $y \rightarrow 0^+$  ; puis avec  $y \rightarrow 0^-$  lorsque  $Z$  parcourt le demi-cercle  $y < 0$ . L'intérieur (grisé) du cercle critique est exclus de la transformation, il ne possède pas d'image dans le domaine  $\mathbf{z}$ . Enfin, chaque cercle centré à l'origine du domaine  $\mathbf{Z}$  est transformé en une ellipse dans le domaine  $\mathbf{z}$ , et chaque droite passant par l'origine en une hyperbole.

### 7.1.2 Profils de Joukowski

On a vu dans le paragraphe précédent que la transformation de Joukowski permet de transformer un cercle  $\mathcal{C}(0, R)$  du domaine  $\mathbf{Z}$  contenant le cercle critique ( $R > k$ ), en une ellipse contenant le segment  $[-2k, 2k]$  du domaine  $\mathbf{z}$ . Les propriétés des transformations conformes nous assurent alors que, si le cercle  $\mathcal{C}(0, R)$  est ligne de courant pour un écoulement connu par son potentiel complexe dans le domaine  $\mathbf{Z}$ , alors l'ellipse image sera également une ligne de courant pour l'écoulement transformé. On accède ainsi au détail de l'écoulement autour de l'ellipse en connaissant uniquement le potentiel complexe — beaucoup plus simple — de l'écoulement autour du cercle générateur. Dans le cas où ce dernier est décentré par rapport à l'origine, on obtient à la place d'une ellipse une courbe fermée dont l'aspect peut être très proche de celui des profils utilisés pour concevoir des surfaces portantes. Ces courbes sont appelées profils de Joukowski et permettent d'établir les premiers résultats de la théorie des profils minces. Elles sont définies comme les images de cercles passant par le point critique  $Z = k$  et centrés en  $Z_c = X_c + iY_c$  avec

$$X_c < 0 \quad \text{et} \quad Y_c > 0.$$

Afin de les caractériser, on va considérer séparément le cas où  $X_c = 0$  et celui où  $Y_c = 0$ .

**Cas  $Y_c = 0$**  On pose  $X_c = -ka$  et on va considérer que  $a \ll 1$  pour simplifier les calculs. On note alors que si  $Z$  appartient au cercle générateur, il peut s'écrire

$$Z = k(-a + (1+a)e^{i\theta}),$$

et son image  $z = x + iy$  est définie par  $z = Z + k^2/Z$ , soit :

$$\begin{aligned} z &= k(-a + (1+a)e^{i\theta}) + k(-a + (1+a)e^{i\theta})^{-1} \\ &= k(-a + (1+a)e^{i\theta}) + ke^{-i\theta}(-ae^{-i\theta} + 1 + a)^{-1}, \end{aligned}$$

puis, en considérant que  $a$  est petit devant l'unité :

$$z \approx k(-a + (1+a)e^{i\theta}) + ke^{-i\theta}(ae^{-i\theta} + 1 - a).$$

On en déduit que

$$\begin{cases} x \approx k(-a + 2\cos\theta + a\cos 2\theta) \\ y \approx k(2a\sin\theta - a\sin 2\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} dx/d\theta \approx -2k(\sin\theta + a\sin 2\theta) \\ dy/d\theta \approx 2ak(\cos\theta - \cos 2\theta) \end{cases},$$

et on peut en tirer les conclusions suivantes :

- le profil est symétrique (par rapport à l'axe  $x$ ), donc non cambré ;
- l'épaisseur maximale est atteinte pour  $\theta = \pm 2\pi/3$ , soit  $x = -k(1 + 3a/2)$  et  $y = \pm 3\sqrt{3}ak/2$  ;

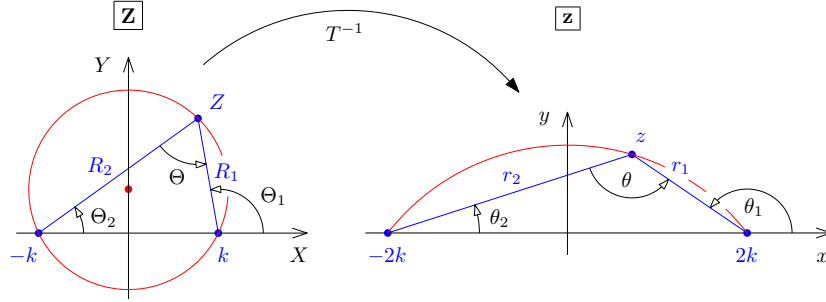


FIGURE 7.2 – Transformation de Joukowski appliquée à un cercle passant par les deux points critiques (Cas  $Y_c > 0$  et  $X_c = 0$ ).

- le point  $z = 2k$  est un point de rebroussement à tangente horizontale, il représente un *bord de fuite* infiniment mince ;
  - le point  $z = -2k$  possède une tangente verticale, il représente un *bord d'attaque* arrondi.
- Ces caractéristiques pourront être visualisées sur la figure 7.3(a).

**Cas  $X_c = 0$**  Ici, les deux points critiques  $Z = \pm k$  appartiennent au cercle générateur et on se souvient que leurs transformés sont les points  $z = \pm 2k$ . De plus, il est facile de vérifier que les points  $Z = iY_c \pm i(Y_c^2 + k^2)^{1/2}$  situés à l'intersection du cercle et de l'axe  $y$ , ont le même transformé  $z = 2iY_c$ . On va maintenant montrer que le transformé du cercle générateur est un arc de cercle passant par les trois points  $-2k$ ,  $2iY_c$  et  $2k$ . Pour ceci on va d'abord réécrire la transformation  $z = Z + k^2/Z$  sous la forme

$$\frac{z}{2k} = \frac{Z^2 + k^2}{2kZ},$$

puis

$$\frac{z - 2k}{z + 2k} = \frac{z/(2k) - 1}{z/(2k) + 1} = \frac{Z^2 + k^2 - 2kZ}{Z^2 + k^2 + 2kZ} = \left( \frac{Z - k}{Z + k} \right)^2.$$

On introduit ensuite les notations

$$\begin{cases} Z = k + R_1 e^{i\Theta_1} \\ Z = -k + R_2 e^{i\Theta_2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z = 2k + r_1 e^{i\theta_1} \\ z = -2k + r_2 e^{i\theta_2} \end{cases},$$

illustrées dans la figure 7.2. On note maintenant que

$$\frac{z - 2k}{z + 2k} = \left( \frac{Z - k}{Z + k} \right)^2 \iff \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 e^{2i(\Theta_1 - \Theta_2)},$$

pour identifier modules et arguments dans la dernière égalité :

$$r_1/r_2 = (R_1/R_2)^2 \quad \text{et} \quad \theta_1 - \theta_2 = 2(\Theta_1 - \Theta_2).$$

L'égalité des arguments montre, qu'avec les notations de la figure 7.2, on obtient  $2\Theta = \theta$ . Comme  $\Theta$  est constant quand le point  $Z$  décrit le cercle générateur (il intercepte toujours le même arc), on en déduit que  $\theta$  est constant et, comme il intercepte lui-aussi toujours le même arc, que le point  $z$  décrit un arc de cercle (cf. figure 7.3-b).

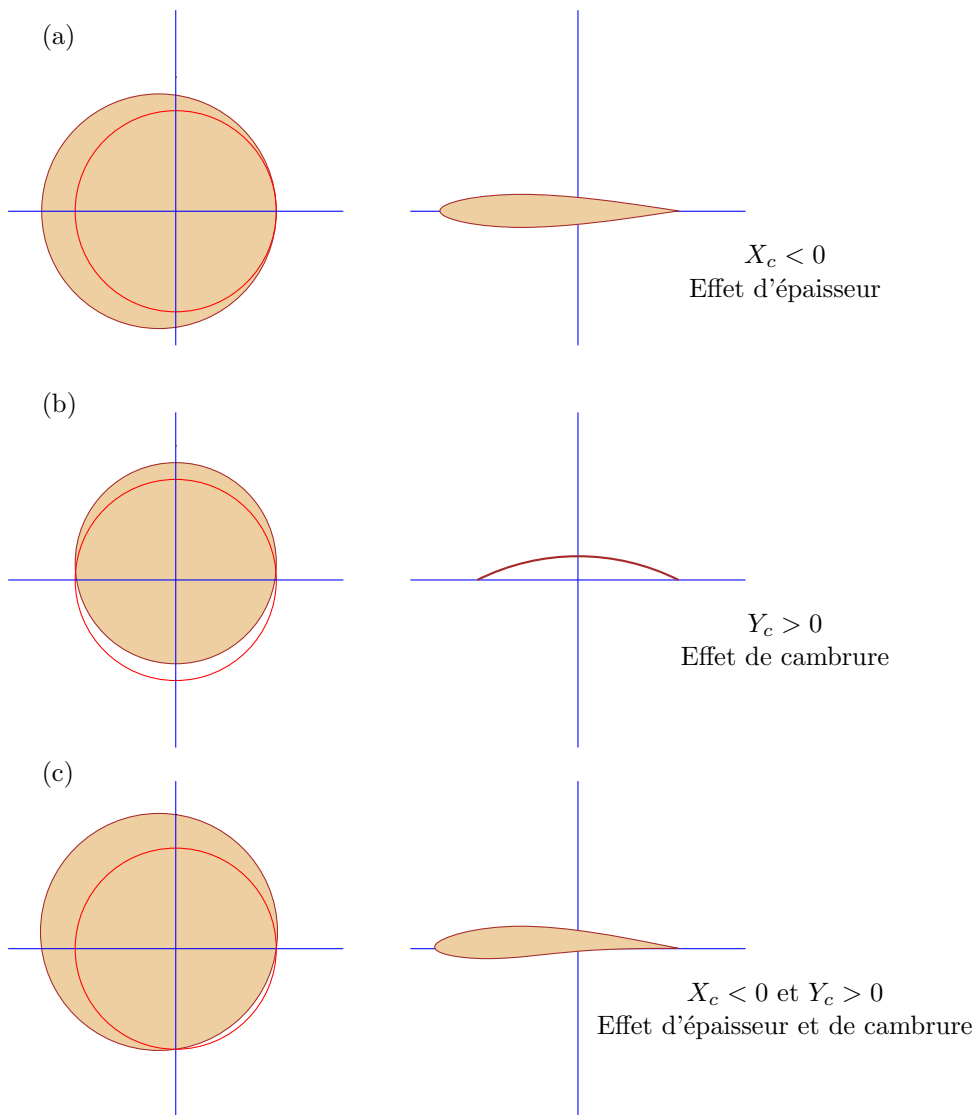


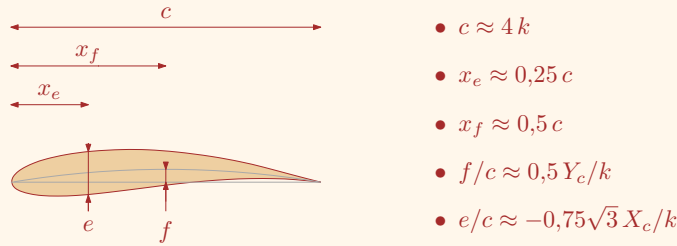
FIGURE 7.3 – Construction des profils de Joukowski.

**Conclusion** On retiendra pour conclure le cas où le cercle est décalé suivant les deux axes, avec  $X_c$  et  $Y_c$  petits devant  $k$  de manière à pouvoir transposer les résultats obtenus plus haut par linéarité.

### Profils de Joukowski

Quand elle est appliquée à un cercle générateur passant par le point critique  $Z = k$ , dont le centre est faiblement décalé de  $X_c < 0$  et  $Y_c > 0$  par rapport à l'origine du plan complexe, la transformation de Joukowski produit une courbe fermée possédant des caractéristiques proches de celles des profils aérodynamiques :

- bord d'attaque arrondi et bord de fuite anguleux (infiniment mince) ;
- épaisseur maximale ( $e$ ) obtenue à environ 25 % de la corde ( $c$ ) à partir du bord d'attaque ;
- épaisseur relative ( $e/c$ ) proportionnelle à la valeur du décalage horizontal ;
- flèche maximale ( $f$ ) obtenue à environ 50 % de la corde à partir du bord d'attaque ;
- flèche relative ou cambrure ( $f/c$ ) proportionnelle à la valeur du décalage vertical.



## 7.2 Écoulement autour d'un profil de Joukowski

Du fait des propriétés des transformations conformes, le détail de l'écoulement autour d'un profil de Joukowski plongé dans un écoulement uniforme à l'infini, est accessible si l'on connaît le potentiel complexe de l'écoulement autour d'un cercle placé dans les mêmes conditions. En effet, on vérifie facilement que la transformation de Joukowski dégénère en identité quand le module de  $Z$  tend vers l'infini, et par conséquent, si l'écoulement est uniforme à l'infini pour l'écoulement autour du cercle, il le sera également pour l'écoulement autour du profil. On va donc reprendre les résultats obtenus dans la section 6.4.2 en les généralisant au cas où le cercle est décentré en  $Z_c$ , et la vitesse à l'infini inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe horizontal. Ceci est obtenu simplement en remplaçant  $Z$  par  $(Z - Z_c) e^{-i\alpha}$  dans l'expression du potentiel complexe précédemment étudié<sup>1</sup> :

$$F(Z) = V_0 \left( (Z - Z_c) e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{Z - Z_c} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(Z - Z_c),$$

1. Il est inutile d'intégrer le facteur  $e^{-i\alpha}$  dans le potentiel complexe du tourbillon puisque ce type de singularité n'est pas orienté.

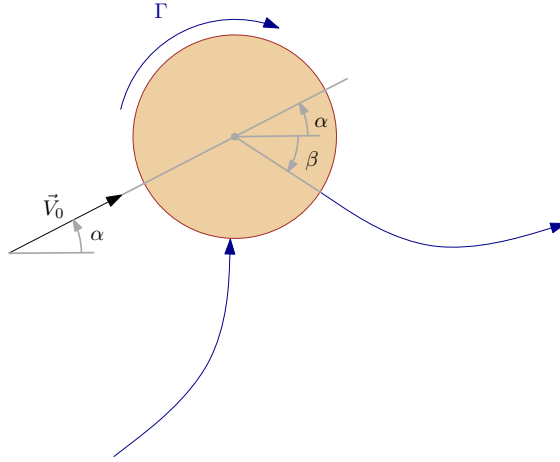


FIGURE 7.4 – Repérage des points d'arrêt dans l'écoulement autour d'un cylindre avec circulation. Ici,  $\Gamma < 0$  (c.-à-d. dans le sens inverse au sens trigonométrique) car on souhaite obtenir un effort vers le haut (portance).

où  $R = \sqrt{(k - X_c)^2 + Y_c^2}$  et  $\alpha$  est appelé *angle d'incidence*.

Dans le cas où  $|\Gamma|$  est inférieur à  $\Gamma_0$ , les points d'arrêt sont placés sur le cercle et leur argument, dans le repère obtenu par une rotation d'angle  $\alpha$  par rapport au repère  $(Z_c, X, Y)$ , est donné par  $\sin \theta = \Gamma/\Gamma_0$  (voir section 6.4.2). En notant  $\beta$  l'argument de ces points dans le repère  $(Z_c, X, Y)$ , on montre facilement (cf. figure 7.4) que

$$\sin(\beta - \alpha) = \Gamma/\Gamma_0$$

L'écoulement autour du profil peut alors être obtenu par application de la transformation de Joukowski. Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs pour obtenir des résultats intéressants, on rappellera simplement que lignes de courant et points d'arrêt sont transformés en lignes de courant et points d'arrêt. On peut montrer également que l'effort exercé par le fluide sur le cercle dans le plan générateur est égal en module et en direction à l'effort exercé sur le profil dans le plan transformé. Ceci provient du fait que la circulation se conserve dans la transformation :

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \mathcal{W}(Z) dZ = \int_{\mathcal{C}} dF(Z) = \int_{\mathcal{P}} df(z) = \int_{\mathcal{P}} w(z) dz,$$

et du fait que l'effort est uniquement déterminé par la valeur de cette circulation et la direction de la vitesse à l'infini (théorème de Joukowski). La figure 7.5 montre les écoulements obtenus pour plusieurs valeurs de la circulation. Elle met en évidence le rôle essentiel joué par cette grandeur dans la structuration de l'écoulement et pose la question de savoir quelle valeur de la circulation conduit aux écoulements rencontrés dans la réalité. On peut répondre à cette question sur une base purement mathématique en notant qu'en présence d'un contournement du bord de fuite, on obtient une valeur infinie de la vitesse en ce point du profil : localement l'écoulement est assimilable à l'écoulement autour d'un dièdre

(voir section 6.2.1). Cette caractéristique est peu réaliste et conduit à la formulation de la condition suivante.

#### Condition de Kutta-Joukowski

La circulation qui s'établit autour d'un profil à bord de fuite anguleux est celle qui conduit à une vitesse finie au bord de fuite.

La figure 7.5 montre que dans notre cas, il existe une valeur particulière de la circulation  $\Gamma_J$ , où le bord de fuite est un point d'arrêt de l'écoulement et où la ligne de courant issue de ce point sépare l'écoulement en deux parties de sorte que, de part et d'autre, il soit assimilable à l'écoulement dans un coin, donc libre de toute singularité de vitesse. Cette valeur de circulation satisfait donc la condition de Kutta-Joukowski, on peut la déterminer en imposant que le point d'arrêt aval dans l'écoulement autour du cylindre soit placé au point critique  $Z = k$ , soit :

$$\Gamma_J = -4\pi R V_0 \sin(\alpha - \beta) \quad \text{avec} \quad \tan \beta = \frac{-Y_c}{k - X_c}.$$

### 7.2.1 Complément : La transformation de Kármán-Trefftz

Comme on l'a vu précédemment, les profils de Joukowski possèdent par construction un bord de fuite infiniment mince : extrados et intrados se rejoignent en ce point en formant un angle nul. Cette caractéristique, qui les distingue nécessairement des profils de voilure utilisés en pratique, ne remet pas en cause les principaux résultats de la théorie que nous exposerons plus loin. Cependant, d'un point de vue aérodynamique, elle se traduit par le fait que le bord de fuite n'est pas un point d'arrêt de l'écoulement contrairement à ce que l'on observe dans le cas général. La transformation de Kármán-Trefftz, que nous allons maintenant introduire, permet de spécifier la valeur de l'angle formé par l'intrados et l'extrados au bord de fuite. Ceci permettra ultérieurement d'évaluer les conséquences de cet effet sur l'écoulement.

On commencera par rappeler (voir section 7.1.2) que la transformation de Joukowski peut s'écrire sous la forme

$$\frac{z - 2k}{z + 2k} = \left( \frac{Z - k}{Z + k} \right)^2,$$

sous laquelle elle apparaît comme un cas particulier de la transformation de Kármán-Trefftz, définie par la relation

$$\frac{z - ak}{z + ak} = \left( \frac{Z - k}{Z + k} \right)^a.$$

Les calculs peuvent être effectués en récrivant cette dernière sous la forme

$$z = ak \frac{1 + \mathcal{R}}{1 - \mathcal{R}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{R} = \left( \frac{Z - k}{Z + k} \right)^a,$$

et permettent de déterminer le transformé du cercle passant par  $Z = k$ , décalé de  $z_c$  par rapport à l'origine. On pourrait ainsi montrer que :

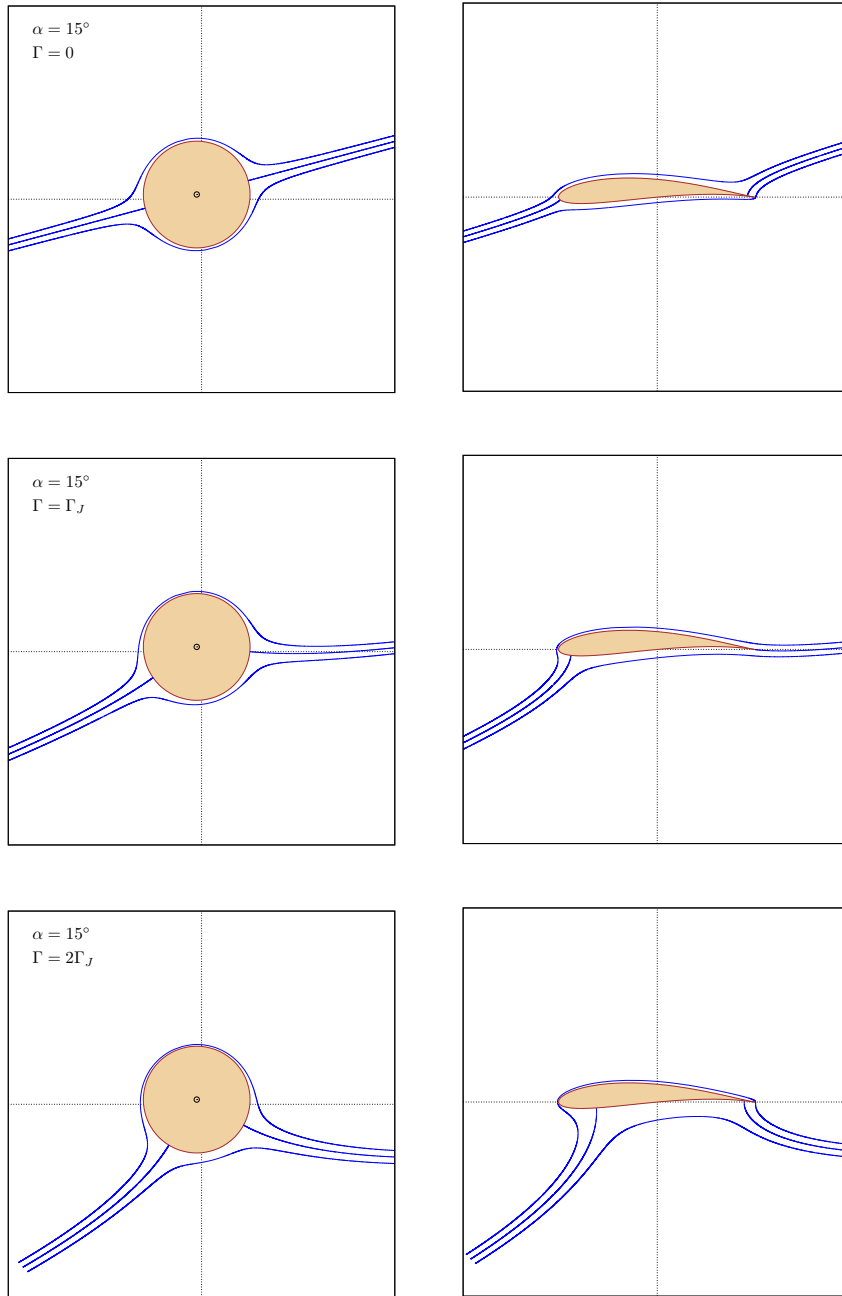


FIGURE 7.5 – Écoulements obtenus autour d'un profil de Joukowski pour différentes valeurs de la circulation.

Profil de Joukovski



Profil de Kármán-Trefftz



FIGURE 7.6 – Comparaison des profils obtenus à l'aide des transformations de Joukovski et de Kármán-Trefftz à partir d'un cercle générateur décalé de  $z_c = -0,07 + 0,04i$ . La valeur de la constante  $a$  est réglée pour que l'angle du bord de fuite soit égal à  $10^\circ$  pour le profil de Kármán-Trefftz.

- le point  $Z = k$  est toujours un point critique, il est maintenant transformé en  $z = ka$  ;
- en l'absence de décalage selon l'axe  $X$ , le cercle est transformé en une lunule constituée de deux arcs de cercle passant par les points  $z = ka$  et  $z = -ka$  ;
- la valeur  $\delta_{BF}$  de l'angle formé par l'intrados et l'extrados au bord de fuite est égale à  $(2 - a)\pi$ .

La figure 7.6 compare les profils obtenus avec les deux transformations en partant du même cercle générateur. La valeur de  $a$  retenue pour effectuer la transformation de Kármán-Trefftz correspond à un angle de  $10^\circ$  au bord de fuite, bien visible sur la figure. Il apparaît de plus que — très logiquement — l'introduction de cet angle s'accompagne d'un épaissement général du profil : on pourrait montrer qu'en terme d'épaisseur relative, l'incrément par rapport au profil de Joukovski correspondant est — pour les petites valeurs de décalage et d'angle de bord de fuite — égal à  $\delta_{BF}/2$ . Enfin, on observe un recul de la position du maître couple car l'effet d'épaissement lié à la valeur de  $\delta_{BF}$  est maximal à  $x/c = 0,5$  (contre  $0,25$  pour celui lié au décalage  $x_c$ ).

## 7.3 Aérodynamique des profils minces : Quelques résultats importants

En s'appuyant sur les résultats de la transformation de Joukovski appliquée à un cercle décalé de l'origine, on va pouvoir maintenant énoncer quelques résultats généraux concernant la portance des profils minces, peu cambrés à faible incidence (théorie linéarisée).

### 7.3.1 Le coefficient de portance et la courbe $C_z(\alpha)$

On introduit le coefficient de portance  $C_z$ , coefficient sans dimension défini par

$$|A| = \frac{1}{2} \rho S V_0^2 C_z,$$

où  $S$  est une surface de référence prise égale à la corde du profil ( $c$ ) multipliée par une unité d'envergure.

Le théorème de Joukovski indique que l'effort de portance  $\vec{A}$  est perpendiculaire au vecteur  $\vec{V}_0$  et égal à  $\rho V_0 |\Gamma|$  en module. Conformément à la condition de Kutta-Joukovski, on prendra  $\Gamma_J$  comme valeur de la circulation pour obtenir :

$$C_z = 2\pi \frac{R}{k} \sin(\alpha - \beta),$$

puis, en tenant compte des hypothèses de faible épaisseur, faible cambrure et faible incidence :

$$C_z \approx 2\pi(\alpha - \beta),$$

La valeur  $2\pi$  pour la pente de la courbe  $C_z(\alpha)$  est un résultat important, proche des valeurs observées en pratique. Par ailleurs, on voit que la portance s'annule pour  $\alpha = \beta$ , l'angle  $\beta$  est donc appelé incidence de portance nulle<sup>2</sup>. On peut approximer sa valeur en l'assimilant à sa tangente, et la relier simplement à celle de la flèche relative (voir section 7.1.2) sous la forme

$$\beta \approx -2f/c.$$

La figure 7.7 permet d'apprécier la qualité de ces résultats. On y a porté les mesures obtenues en soufflerie pour la courbe  $C_z(\alpha)$  d'un profil NACA 2309 à un nombre de Reynolds de  $3 \cdot 10^6$  ( $Re = V_0 c / \nu$ ). Ce profil atteint une épaisseur maximale de 9 % à 30 % de la corde à partir du bord d'attaque. Sa cambrure de 2 % est également obtenue à 30 % de la corde. Jusqu'à  $\alpha = 15^\circ$  la pente de la courbe est remarquablement constante et approxime bien la fonction sinus aux petits angles. On relève graphiquement une pente égale à  $1,82\pi$  au lieu de  $2\pi$ , et une incidence de portance nulle de  $-2^\circ$  au lieu de  $-2,3^\circ$  ( $-2f/c$ ). La théorie nous donne donc, dans ce cas de profil mince et peu cambré, une très bonne approximation des valeurs relevées en pratique. À partir de  $\alpha = 15^\circ$ , les mesures montrent une chute brutale du coefficient de portance, ce phénomène est appelé décrochage et ne peut s'expliquer que par la présence des effets de viscosité en fluide réel, il marque la limite de validité de la théorie des profils minces en fluide parfait. La valeur de l'*incidence de décrochage* dépend de la forme du profil et du nombre de Reynolds de l'écoulement.

### 7.3.2 Complément : Le coefficient de moment et la courbe $C_m(C_z)$

Un autre résultat intéressant en matière d'aérodynamique des profils minces concerne le coefficient de moment dû à l'effort de portance sur le profil. Si l'on note  $M_{z_0}$  le moment dû à la portance calculé au point d'abscisse  $z_0$ , le coefficient de moment associé est défini par

$$C_{m,z_0} = \frac{-M_{z_0}}{\frac{1}{2}\rho S V_0^2 c},$$

Le signe négatif présent dans cette définition est là pour tenir compte de la convention d'orientation adoptée en aérodynamique. Celle-ci impose en effet le signe positif pour les moments tendant à faire cabrer le profil, ce qui dans notre cas où le vent relatif vient de la gauche par rapport au profil correspond au sens inverse trigonométrique. L'application de la seconde formule de Blasius (cf. paragraphe 6.3.2) au profil de Joukovski permet d'aboutir (cf. annexe E) à l'expression suivante pour  $M_{z_0}$  :

$$M_{z_0} = 2\pi\rho V_0^2 \mathcal{I}m[e^{-2i\alpha}(k^2 + z_0 R e^{i\beta}) - z_0 R e^{-i\beta}].$$

2. Souvent notée  $\alpha_0$ .

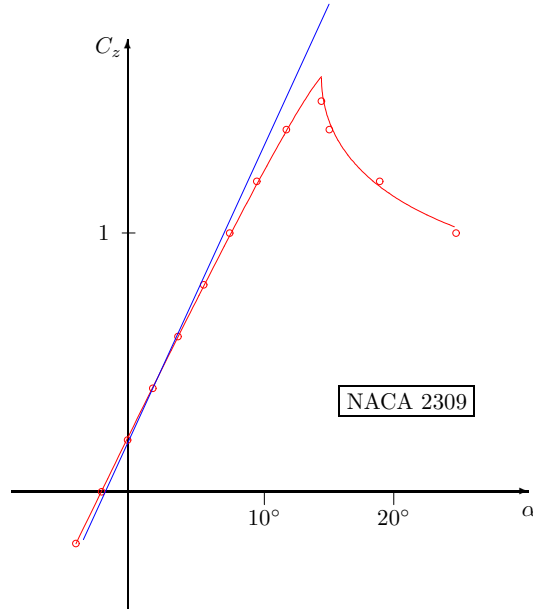


FIGURE 7.7 – Courbe  $C_z(\alpha)$  pour le profil NACA 2309. Les symboles représentent des résultats expérimentaux (soufflerie) obtenus à  $Re = 3 \cdot 10^6$ , et la droite en trait bleu l’approximation issue de la théorie linéarisée.

Ainsi, le moment aérodynamique calculé par rapport au bord d’attaque du profil ( $z_0 \approx -2k$ ) s’écrit (en faisant l’approximation  $R \approx k$  et en considérant les angles petits) sous la forme

$$M_{-2k} = 4\pi\rho V_0^2 k^2 [(\alpha - \beta) - \beta].$$

On peut en déduire l’expression du coefficient de moment au bord d’attaque :

$$C_{m,-2k} = \frac{-M_{-2k}}{\frac{1}{2}\rho(4k \times 1)V_0^2 4k} = \frac{-M_{-2k}}{8\rho V_0^2 k^2},$$

soit, au final

$$C_{m,-2k} = -\frac{\pi}{2}(\alpha - \beta) + \frac{\beta\pi}{2} = -\frac{C_z}{4} + C_{m0},$$

où  $C_{m0} = \beta\pi/2$  est le coefficient de moment à portance nulle (négatif puisque  $\beta < 0$ ). On a porté sur la figure 7.8 la courbe  $C_{m,-2k}$  fonction de  $C_z$  obtenue en soufflerie pour le profil NACA 2309. On constate que la pente de la courbe est remarquablement bien reproduite mais qu’il en va différemment pour le  $C_{m0}$  : la valeur observée expérimentalement est de  $-0,032$  alors que, la théorie donne  $-0,063$  ( $\beta = -2f/c = -2,3^\circ$ ). Cette différence est non négligeable mais s’explique par la faible valeur de la grandeur considérée.

On peut ensuite s’intéresser à deux points particuliers importants en aérodynamique : le centre de poussée et le foyer. Le *centre de poussée*  $P$  est défini comme le point d’application de la résultante aérodynamique. Dans le cadre de la théorie fluide parfait, celle-ci se résume à l’effort de portance et son moment autour du point  $P$  doit être nul :

$$M_{z_P} = 2\pi\rho V_0^2 \mathcal{I}m[e^{-2i\alpha}(k^2 + z_P Re^{i\beta}) - z_P Re^{-i\beta}] = 0.$$

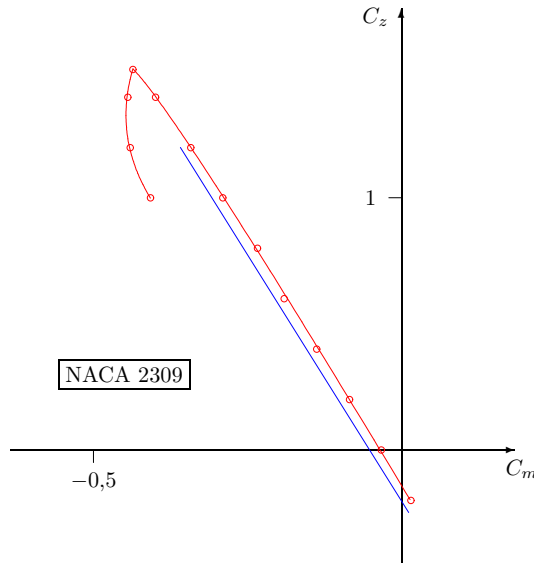


FIGURE 7.8 – Courbe  $C_m(C_z)$  pour le profil NACA 2309. Les symboles représentent des résultats expérimentaux (soufflerie) obtenus à  $Re = 3 \cdot 10^6$ , et la droite en trait bleu l'approximation issue de la théorie linéarisée. (Le coefficient de moment représenté correspond au moment au bord d'attaque.)

En considérant toujours que les angles sont faibles et que  $R \approx k$ , on pourra en déduire que

$$-2\alpha k^2 + (\beta - 2\alpha)kz_P + \beta kz_P = 0 \quad \text{puis} \quad z_P = \frac{k\alpha}{\beta - \alpha}.$$

La distance entre le centre de poussée et le bord d'attaque, rapportée à la corde du profil, est une mesure couramment utilisée de la position du centre de poussée. Ici, on obtient

$$\frac{x_P}{c} = \frac{z_P - z_{-2k}}{c} = \frac{1}{4k} \left( \frac{k\alpha}{\beta - \alpha} + 2k \right) = \frac{1}{4} \times \frac{2\beta - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

On remarque que  $x_P$  dépend de l'incidence  $\alpha$  et de l'incidence de portance nulle  $\beta$ . La position du centre de poussée n'est donc pas fixe en général : elle dépend non seulement de la forme du profil, mais également des conditions aérodynamiques autour de celui-ci. Toutefois, pour un profil symétrique ( $\beta = 0$ ), la position du centre de poussée se fixe à 25 % de la corde à partir du bord d'attaque.

Le *foyer*  $F$  est le second point remarquable du profil. Il est défini comme le point où le moment est indépendant de l'incidence (et donc du  $C_z$ ). En effectuant le transport du moment entre le bord d'attaque du profil et le foyer, on peut écrire

$$M_{z_F} = M_{-2k} - (z_F + 2k) |A|,$$

soit, en passant aux coefficients aérodynamiques :

$$C_{m,z_F} = C_{m,-2k} + \frac{x_F}{c} C_z = \left( \frac{x_F}{c} - \frac{1}{4} \right) C_z + C_{m0},$$

avec  $x_F = z_F + 2k$ . Comme  $C_{m,z_F}$  doit être indépendant du  $C_z$ , on obtient le résultat remarquable :

$$\frac{x_F}{c} = -\frac{\partial C_{m,-2k}}{\partial C_z} = \frac{1}{4}.$$

On constate donc que la position du foyer est fixe à 25 % de la corde à partir du bord d'attaque. Cette propriété en fait un point particulièrement intéressant pour l'étude de la stabilité d'un avion comme nous le verrons dans le cours d'aérodynamique de deuxième année. On remarque également que pour un profil symétrique, le centre de poussée et le foyer sont confondus. On notera enfin que la valeur du coefficient de moment au foyer est égale au coefficient de moment à portance nulle :  $C_{m,z_F} = C_{m0}$ .

### 7.3.3 Le coefficient de pression et la courbe des $k_p$

La répartition de pression sur le contour du profil est habituellement étudiée à partir du coefficient de pression — coefficient sans dimension —, défini de la manière suivante :

$$k_p = \frac{P - P_0}{\rho V_0^2 / 2},$$

où  $P_0$  est la valeur de la pression à l'infini. Pour un profil de Joukowski, on peut obtenir la valeur des  $k_p$  sans difficulté, en notant que

$$P - P_0 = \frac{1}{2} \rho (V_0^2 - \mathcal{V}^2),$$

où  $\mathcal{V}^2$  est la valeur locale du carré scalaire de la vitesse ; puis que

$$\mathcal{V}^2 = w(z) \overline{w(z)} = \mathcal{W}(Z) \overline{\mathcal{W}(Z)} \times \left( \frac{dZ}{dz} \right) \overline{\left( \frac{dZ}{dz} \right)}.$$

On accède ainsi à la répartition du coefficient de pression sur le profil. Elle s'étudie à partir de la courbe des  $k_p$  dont un exemple est porté sur la figure 7.9(a) : La valeur  $-k_p$  est tracée en fonction de  $x/c$ , où  $x$  est compté à partir du bord d'attaque ; pour chaque valeur de  $x/c$  on obtient deux valeurs du coefficient de pression, correspondant aux valeurs intrados et extrados. Pour un profil portant, la valeur extrados est généralement inférieure (dépression) à la valeur intrados (surpression) : le fait de porter en ordonnée la valeur de l'opposé du coefficient de pression permet donc de positionner naturellement les deux courbes (celle correspondant à l'extrados passe au-dessus de celle correspondant à l'intrados). On observe sur la figure 7.9(a) :

- la position du point d'arrêt ( $k_p = 1$ ) au voisinage du bord d'attaque ;
- la présence de « pics » de dépression à l'extrados au voisinage du bord d'attaque ;
- la présence d'un gradient de pression *adverse*<sup>3</sup> sur la majeure partie de l'extrados.

Une autre propriété intéressante de la courbe des  $k_p$  tient au fait que l'aire comprise entre les courbes intrados et extrados est strictement égale à la valeur du coefficient de portance. En effet, si on note respectivement  $k_{pe}$  et  $k_{pi}$  (resp.  $P_e$  et  $P_i$ ) les valeurs prises par

3. La pression augmente dans le sens de l'écoulement et, de ce fait, s'oppose au mouvement.

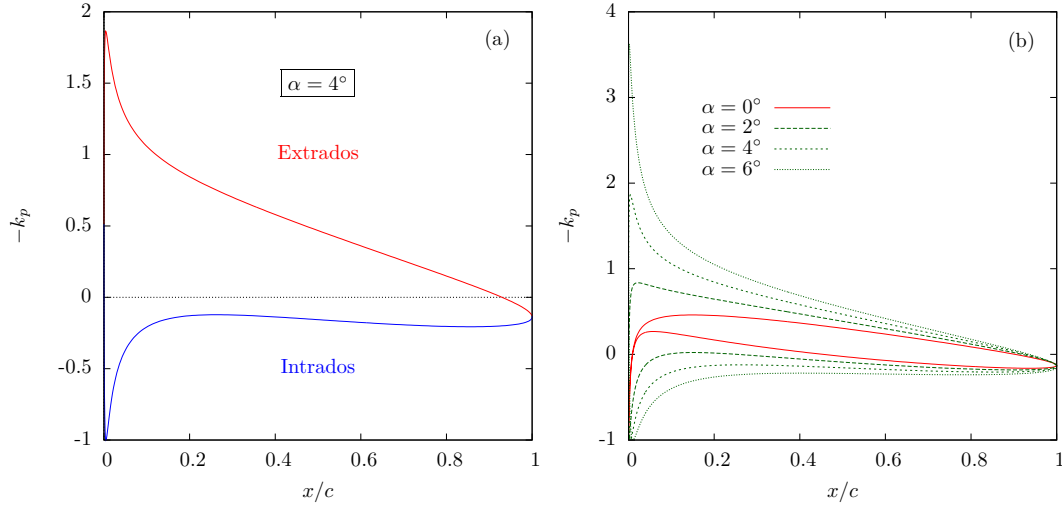


FIGURE 7.9 – Répartitions du coefficient de pression obtenues pour un profil de Joukowski dont l'épaisseur et la cambrure relatives sont respectivement de 9 % et 2 % ( $z_c = -0,07 + 0,04i$ ). (a)  $\alpha = 4^\circ$ . (b) évolution de la répartition des  $k_p$  en fonction de l'incidence.

le coefficient de pression (resp. la pression) à l'extrados et à l'intrados à une même abscisse  $x/c$ , cette aire s'exprime sous la forme :

$$\mathcal{A} = - \int_0^1 (k_{pe} - k_{pi}) d(x/c) = \frac{-1}{\rho c V_0^2 / 2} \int_0^1 (P_e - P_i) d(x/c),$$

puis, en intégrant le long du profil ( $\mathcal{P}$ ) parcouru dans le sens trigonométrique :

$$\mathcal{A} = \frac{-1}{\rho c V_0^2 / 2} \int_{\mathcal{P}} P(-dx) = \frac{1}{\rho c V_0^2 / 2} \int_{\mathcal{P}} -P(\vec{n} ds \cdot \vec{e}_y),$$

où  $\vec{n}$  est la normale extérieure au profil (voir figure 6.1 et section 6.3.2). On reconnaît, dans l'intégrale, l'expression de la composante verticale de l'effort et donc, dans  $\mathcal{A}$ , la définition du coefficient de portance.

La figure 7.9 présente l'évolution de la courbe des  $k_p$  quand l'incidence varie. On observe que l'aire comprise entre les deux branches augmente avec l'incidence comme on doit s'y attendre. Un point important, dont on discutera les conséquences un peu plus loin, réside dans le fait que les gradients de pression adverses présents à l'extrados du profil augmentent considérablement avec l'incidence.

Remarque Les courbes de  $k_p$  présentées dans ce paragraphe correspondent à un profil de Joukowski et possèdent, à ce titre, une particularité qui n'est pas observée sur les profils pour lesquels la jonction entre intrados et extrados forme un angle non nul. En effet, dans ce dernier cas le bord de fuite est un point d'arrêt et on observe une chute rapide du coefficient de pression à l'approche du bord de fuite : il y tend vers la valeur caractéristique d'un point d'arrêt  $k_p = 1$ . La figure 7.10 présente la courbe de  $k_p$  obtenue à l'aide de la transformation de Kármán-Trefftz à partir du même cercle générateur que celui utilisé avec la transformation de Joukowski pour tracer la figure 7.9(a), on note bien la différence dans l'allure des courbes au voisinage des bords de fuite.

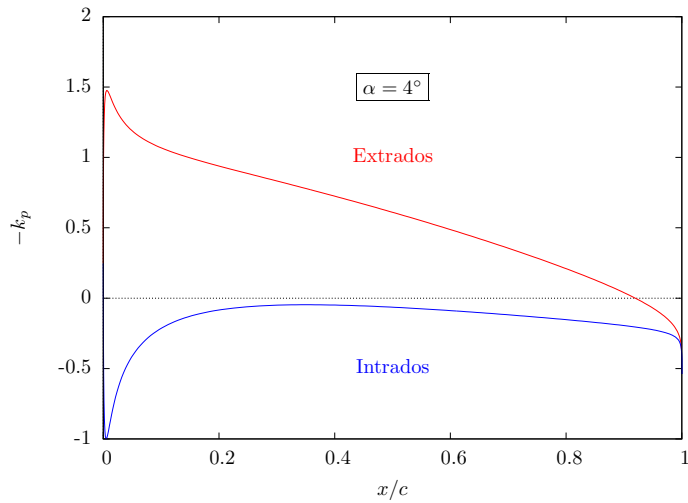


FIGURE 7.10 – Courbe des  $k_p$  obtenue à l'aide de la transformation de Kármán-Trefftz à partir d'un cercle générateur décalé de  $z_c = -0,07 + 0,04i$ , l'angle du bord de fuite est égal à  $10^\circ$ .

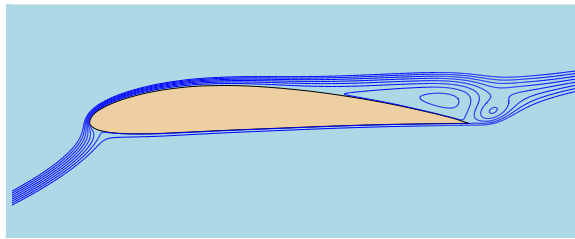


FIGURE 7.11 – Tracé des lignes de courant obtenues dans le cas d'un décollement sur profil en écoulement de fluide réel (profil NACA 4412 à  $15^\circ$  d'incidence). La zone de « recirculation » associée au phénomène de décollement est présente à l'extrados et au voisinage du bord de fuite, matérialisée par des lignes de courants refermées sur elles-mêmes.

### 7.3.4 Note sur les phénomènes de décollement et de décrochage

Le décollement est un phénomène fréquemment observé en pratique ; nous y reviendrons plus en détail dans le cours de deuxième année, mais il est intéressant, dès maintenant, d'en indiquer la nature et quelques propriétés. Ce phénomène intervient lorsque l'écoulement d'un fluide visqueux le long d'une paroi solide rencontre un gradient de pression adverse et se caractérise par l'apparition d'une zone de « recirculation » où localement — le long de la paroi — le fluide remonte l'écoulement général (cf. figure 7.11). Le rôle de la viscosité dans l'apparition de ce phénomène est essentiel et s'exerce par deux voies différentes : à travers (i) la condition d'adhérence, et (ii) la diffusion de quantité de mouvement. La condition d'adhérence est responsable d'une diminution de l'inertie du fluide au voisinage de la paroi de sorte que les forces de pression, qui s'opposent au mouvement, peuvent renverser le sens de l'écoulement dans cette zone. Au contraire, la diffusion moléculaire organise, en situation de gradient de pression adverse, un transfert de quantité de mouvement depuis la zone

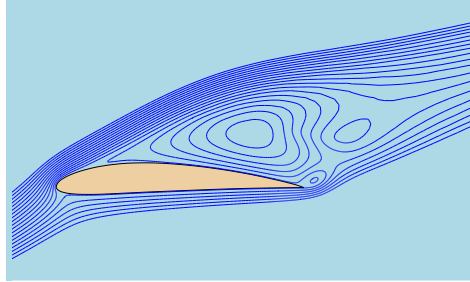


FIGURE 7.12 – Tracé des lignes de courant obtenues dans le cas du décrochage d'un profil en écoulement de fluide réel (profil NACA 4412 à  $20^\circ$  d'incidence). La zone de recirculation occupe maintenant la quasi-totalité de l'extrados. Noter que dans ce cas l'écoulement est le plus souvent instationnaire.

extérieure vers la zone proche de la paroi et, de ce fait, s'oppose au décollement. Ces deux effets expliquent des observations qui paraissent à première vue contradictoires :

- le phénomène de décollement n'apparaît qu'en écoulement de fluide visqueux ;
- il disparaît dans le cas de fluides très visqueux.

On notera, qu'en écoulement turbulent, le mécanisme de diffusion turbulente vient renforcer l'action de la diffusion moléculaire et peut ainsi retarder l'apparition du décollement.

Le décrochage d'un profil de voilure, tel qu'on l'a évoqué dans le paragraphe précédent, correspond à une situation où l'écoulement est décollé sur la totalité de l'extrados. Il intervient aux fortes incidences quand cette partie du profil subit d'intenses gradients de pression adverses (cf. figure 7.9(b)). On peut observer une illustration de ce phénomène sur la figure 7.12.

### 7.3.5 Signification physique de la condition de Kutta-Joukowski

On a introduit précédemment la condition de Kutta-Joukowski sur une base purement mathématique : en requérant simplement qu'il n'existe pas de singularité de vitesse au bord de fuite du profil. Cette singularité est directement liée au contournement du bord de fuite par le fluide et on va montrer pourquoi cette caractéristique n'est pas acceptable en pratique.

Dans un premier temps, on va considérer une valeur de circulation non adaptée conduisant à un positionnement du second point d'arrêt  $A$  à l'extrados. On définit les points  $I$  et  $E$  situés respectivement sur l'intrados et l'extrados du profil,  $F$  désigne le bord de fuite (cf. figure 7.13(a)). Chaque point du profil est repéré par son abscisse curviligne  $s$  comptée dans le sens  $I$ - $F$ - $A$ - $E$  et sur chaque arc, on note le signe de la vitesse  $U_s$  (projection sur  $\vec{s}$ ) et celui du gradient de pression  $\partial P/\partial s$  en remarquant

- que  $A$  est un point d'arrêt, la pression  $y$  est donc maximale (mais finie) ;
- qu'en  $F$  l'écoulement est localement assimilable à l'écoulement autour d'un angle saillant, la vitesse  $y$  tend donc vers l'infini et la pression vers  $-\infty$ .

On obtient alors les résultats portés sur la figure 7.13(a). On voit que, sur les arcs  $F$ - $A$  et  $E$ - $A$ , le gradient de pression s'oppose à l'écoulement. Le gradient de pression adverse est très intense sur l'arc  $F$ - $A$  car la pression est infinie au bord de fuite, on obtiendra donc systématiquement un décollement massif en fluide réel dans cette zone. En revanche la surpression reste finie au point  $A$  et conduira à un décollement limité sur l'arc  $E$ - $A$ . On

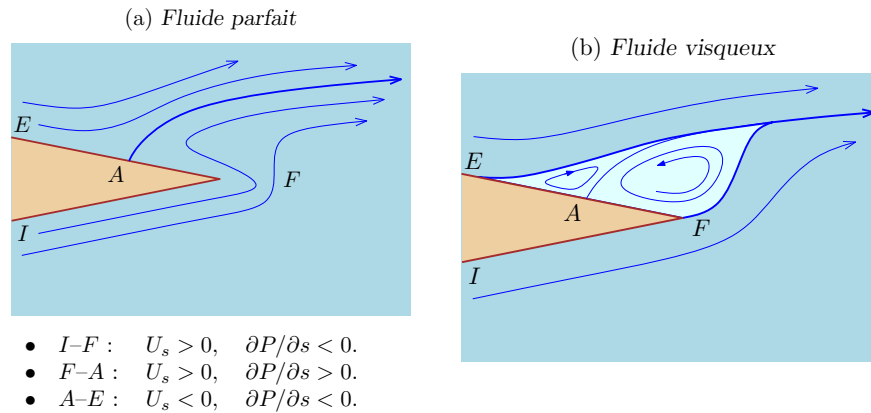


FIGURE 7.13 – Écoulement autour d'un bord de fuite en fluide parfait (a) et fluide visqueux (b) dans le cas où la circulation est non adaptée.

a schématisé sur la figure 7.13(b) la structuration d'écoulement correspondante. Elle est très différente de celle qu'on obtiendrait en fluide parfait dans les mêmes conditions, et la conclusion qui s'impose est que le modèle fluide parfait ne rend pas compte — même en première approximation — de la structuration de l'écoulement réel. On comprend dès lors le sens de l'hypothèse de Joukowski : son premier effet est d'exclure l'étude de configurations d'écoulement qui, par nature, ne peuvent être approchées par le modèle fluide parfait.

Dans un deuxième temps, on va discuter les conditions dans lesquelles ce modèle approche convenablement l'écoulement de fluide réel s'il est appliqué avec une valeur de circulation adaptée. Pour ceci, on réitère les raisonnements tenus dans le cas d'une circulation non adaptée, mais en considérant maintenant que la ligne de courant du point d'arrêt est issue de  $F$  et que, par conséquent, le contournement de bord de fuite est supprimé. Cette ligne de courant sépare l'écoulement en deux parties dans chacune desquelles il peut être assimilé à l'écoulement dans un coin. La vitesse s'annule donc au bord de fuite et on en déduit (cf. figure 7.14(a)) que la valeur de la pression  $y$  est maximale (mais finie). Les arcs  $I-F$  et  $F-E$  voient donc, tous deux, des gradients de pression faiblement adverses. Ceux-ci peuvent conduire aux décollements modérés qu'on a schématisés sur la figure 7.14(b). Comme on l'a vu plus haut, l'effet de la diffusion moléculaire s'oppose au décollement en situation de gradient de pression adverse. On peut en conclure que ces décollements sont susceptibles de disparaître à faible nombre de Reynolds. Si, par ailleurs, le nombre de Reynolds dépasse la valeur critique pour laquelle l'écoulement devient turbulent, c'est l'apparition d'une « diffusion turbulente » qui peut conduire à la suppression des décollements. On vérifie ceci en pratique, et il apparaît que l'écoulement de fluide parfait avec circulation adaptée se structure de la même façon que l'écoulement de fluide réel

- à faible nombre de Reynolds ;
- ou, en régime turbulent à grand nombre de Reynolds.

Le bon accord obtenu entre théorie et expérience sur la courbe  $C_z(\alpha)$  aux faibles incidences correspond au second cas. Cependant, les effets modérateurs d'une viscosité moléculaire élevée ou de la diffusion turbulente restent limités et ne pourront pas toujours compenser l'effet du gradient de pression adverse, notamment dans les cas d'incidence élevée. C'est ce qui explique l'apparition du décrochage sur la courbe  $C_z(\alpha)$ .

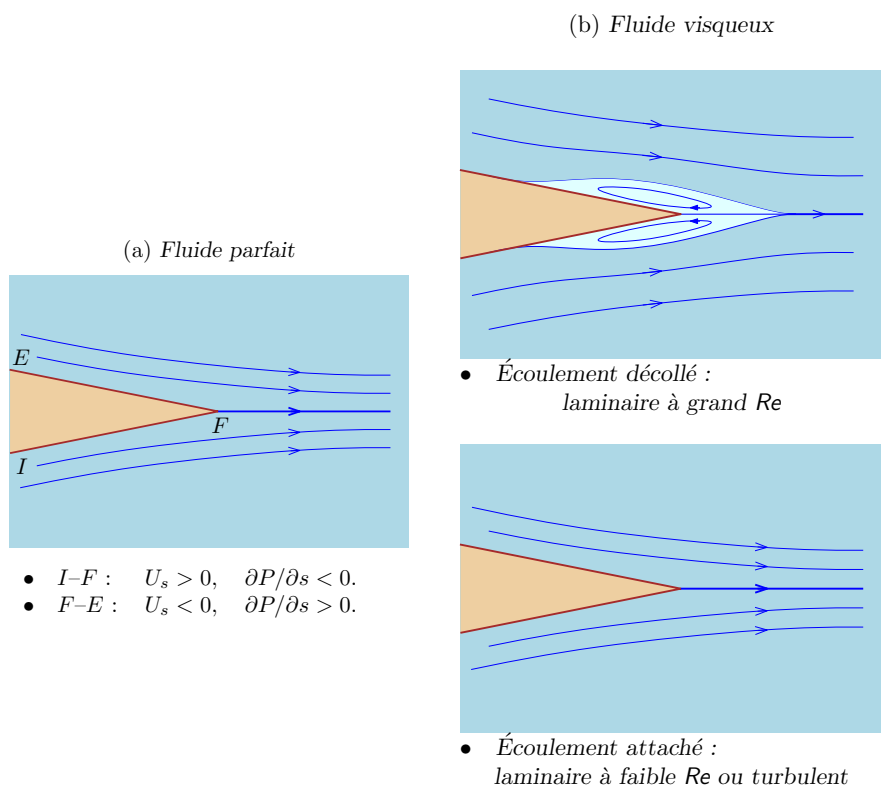


FIGURE 7.14 – Écoulement autour d'un bord de fuite en fluide parfait (a) et fluide visqueux (b) dans le cas où la circulation est adaptée.

# Annexes



## Annexe A

# Fonction courant scalaire en écoulement bidimensionnel

Dans un fluide en évolution isovolume, la fonction courant vectorielle existe et est définie par les relations

$$\vec{V} = \text{rot } \vec{\psi} \quad \text{et} \quad \text{div } \vec{\psi} = 0.$$

On va montrer qu'en écoulement bidimensionnel-plan, on peut la définir comme un champ de vecteurs alignés selon la direction d'invariance. En considérant que  $z$  est cette direction et qu'en tout point de l'espace la composante de vitesse  $w$  est nulle, la première des relations de définition s'écrit scalairement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} &= U(x, y), \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} &= V(x, y), \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Ceci constitue un système d'équations aux dérivées partielles linéaires pour les composantes du vecteur  $\vec{\psi}$ , dont la solution peut être construite comme la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène.

La solution générale du système homogène s'écrit  $\vec{\psi}_0 = \vec{\text{grad}} f$ , où  $f$  est une fonction quelconque suffisamment dérivable.

Une solution particulière peut être obtenue en remarquant que la condition isovolume en écoulement bidimensionnel constitue une condition de Cauchy pour les fonctions  $U(x, y)$  et  $-V(x, y)$  puisque

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial y}.$$

La quantité  $-V(x, y) dx + U(x, y) dy$  est donc une différentielle totale exacte, et on peut affirmer qu'il existe une fonction  $\psi(x, y)$  telle que

$$U(x, y) = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \quad \text{et} \quad V(x, y) = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}.$$

La solution particulière du système peut donc être construite comme

$$\psi_x = \psi_y = 0 \quad \text{et} \quad \psi_z = \psi(x, y),$$

et la solution complète sous la forme  $\vec{\psi} = \psi \vec{e}_z + \vec{\text{grad}} f$ . La condition  $\text{div} \vec{\psi} = 0$  impose seulement que  $f$  soit harmonique. On pourra donc prendre  $f = \text{Const.}$  et on retiendra :

$$\boxed{\vec{\psi} = \psi(x, y) \vec{e}_z},$$

où  $\psi$  est appelée fonction courant (scalaire).

## Annexe B

# Notation indicielle ou notation d'Einstein

### B.1 Définition

La notation indicielle ou notation d'Einstein est une convention selon laquelle tout produit d'éléments tensoriels faisant intervenir un ou plusieurs indices répétés représente la somme des produits obtenus pour toutes les combinaisons possibles du ou des indices répétés, par exemple :

$$\Pi_{ii} = \Pi_{11} + \Pi_{22} + \Pi_{33}$$

ou

$$\Pi_{iiij} = \Pi_{1111} + \Pi_{1122} + \Pi_{1133} + \Pi_{2211} + \Pi_{2222} + \Pi_{2233} + \Pi_{3311} + \Pi_{3322} + \Pi_{3333}$$

Les indices répétés sont appelés indices muets, le résultat développé ne doit pas faire figurer ces indices. Par contre si l'un des indices présent dans le produit n'est pas répété, le résultat sera nécessairement affecté de cet indice, par exemple :

$$\Pi_{iij} = \Pi_{11j} + \Pi_{22j} + \Pi_{33j}$$

### B.2 Définitions usuelles d'analyse vectorielle

**Symbole de Kronecker** Par définition, le symbole de Kronecker  $\delta_{ij}$  vaut 1 si  $i = j$ , et 0 si  $i \neq j$ . Noter que

$$\delta_{ii} = 3.$$

**Tenseur de Levi-Civita** Par définition, l'élément  $\varepsilon_{ijk}$  du tenseur de Levi-Civita (ou pseudo-tenseur alterné) vaut 1 si les indices  $i, j, k$  sont en permutation directe,  $-1$  s'ils sont en permutation inverse, et 0 si au moins deux des indices sont égaux. Noter que

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} &= \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}, \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} &= 2\delta_{kl}, \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} &= 6.\end{aligned}$$

### Définitions usuelles

Divergence d'un vecteur	$\operatorname{div} \vec{A}$	$\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$
Gradient d'une fonction	$[\vec{\operatorname{grad}} f]_i$	$\frac{\partial f}{\partial x_i}$
Rotationnel d'un vecteur	$[\vec{\operatorname{rot}} \vec{A}]_i$	$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}$
Produit scalaire de deux vecteurs	$\vec{A} \cdot \vec{B}$	$A_i B_i$
Produit vectoriel de deux vecteurs	$[\vec{A} \wedge \vec{B}]_i$	$\varepsilon_{ijk} A_j B_k$
Laplacien d'une fonction	$\Delta f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$
Laplacien vecteur	$[\vec{\Delta} A]_i$	$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j \partial x_j}$
Produit de deux tenseurs	$[\overline{\vec{T}} \overline{\vec{S}}]_{ik}$	$T_{ij} S_{jk}$
Premier invariant (trace) d'un tenseur	$\operatorname{tr} \overline{\vec{T}}$	$T_{ii}$
Deuxième invariant d'un tenseur	$T^2$	$T_{ij} T_{ji}$

## Annexe C

# Équations aux perturbations en écoulement de fluide parfait compressible

On s'intéresse à l'évolution de petites perturbations dans un fluide non visqueux et non-conducteur de chaleur initialement au repos. La manière la plus simple d'obtenir l'équation d'évolution de la perturbation de pression consiste à linéariser les trois équations qui permettent d'établir celle de la pression (Cf. paragraphe 3.3.2), à savoir

1. l'équation de la divergence ;
2. la dérivée particulaire de la relation  $P/\rho^\gamma = \text{Const.}$  ;
3. l'équation de continuité.

Ceci est fait en considérant que l'on passe d'un état de base :

$$P = P^\circ = \text{Const.}, \quad \rho = \rho^\circ = \text{Const.}, \quad \vec{V} = \vec{V}^\circ = 0,$$

à un état « perturbé » où

$$P = P^\circ + P', \quad \rho = \rho^\circ + \rho', \quad \vec{V} = \vec{V}'.$$

En tenant compte des simplifications applicables à l'état de base, on obtient les résultats portés dans le tableau ci-après.

---

**Équation de la divergence**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + U_i \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\ &\rightarrow \frac{\partial \vartheta'}{\partial t} + U_i^\circ \frac{\partial \vartheta'}{\partial x_i} + U_i' \frac{\partial \vartheta^\circ}{\partial x_i} = \\ &\quad -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho^\circ} \frac{\partial P'}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\rho'}{\rho^{\circ 2}} \frac{\partial P^\circ}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial U_j^\circ}{\partial x_i} \frac{\partial U_i'}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j'}{\partial x_i} \frac{\partial U_i^\circ}{\partial x_j} \\ (C.1) \quad &\rightarrow \frac{\partial \vartheta'}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho^\circ} \frac{\partial P'}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

---

**Dérivation particulière de la relation isentropique**

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + U_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) - \frac{\gamma}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + U_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) &= 0 \\ &\rightarrow \frac{1}{P^\circ} \frac{\partial P'}{\partial t} - \frac{P'}{P^{\circ 2}} \frac{\partial P^\circ}{\partial t} + \frac{U_i^\circ}{P^\circ} \frac{\partial P'}{\partial x_i} - \frac{U_i^\circ P'}{P^{\circ 2}} \frac{\partial P^\circ}{\partial x_i} + \frac{U_i'}{P^\circ} \frac{\partial P^\circ}{\partial x_i} \\ &\quad - \frac{\gamma}{\rho^\circ} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\gamma \rho'}{\rho^{\circ 2}} \frac{\partial \rho^\circ}{\partial t} - \frac{U_i^\circ \gamma}{\rho^\circ} \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} + \frac{U_i^\circ \rho' \gamma}{\rho^{\circ 2}} \frac{\partial \rho^\circ}{\partial x_i} - \frac{U_i' \gamma}{\rho^\circ} \frac{\partial \rho^\circ}{\partial x_i} = 0 \\ (C.2) \quad &\rightarrow \frac{1}{P^\circ} \frac{\partial P'}{\partial t} - \frac{\gamma}{\rho^\circ} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

---

**Équation de continuité**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + U_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \vartheta &= 0 \\ &\rightarrow \frac{\partial \rho'}{\partial t} + U_i^\circ \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} + U_i' \frac{\partial \rho^\circ}{\partial x_i} + \rho^\circ \vartheta' + \rho' \vartheta^\circ = 0 \\ (C.3) \quad &\rightarrow \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho^\circ \vartheta' = 0 \end{aligned}$$

---

En combinant les deux derniers résultats (C.2, C.3), on trouve que

$$\vartheta' = -\frac{1}{\gamma P^\circ} \frac{\partial P'}{\partial t}.$$

En reportant cette relation dans l'équation linéarisée de la divergence (C.1), il vient

$$\boxed{\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} = \frac{\gamma P^\circ}{\rho^\circ} \frac{\partial^2 P'}{\partial x_i \partial x_i}}$$

qui est le résultat recherché. La relation isentropique écrite sous la forme  $P'/P^\circ = \gamma \rho'/\rho^\circ$  permet, de plus, d'écrire la même relation pour la masse volumique :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\gamma P^\circ}{\rho^\circ} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i \partial x_i}}$$

On pourra encore une fois obtenir la même relation, pour la vitesse cette fois-ci, en linéarisant l'équation de quantité de mouvement, soit

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \\ \rightarrow \frac{\partial U'_i}{\partial t} + U_j^\circ \frac{\partial U'_i}{\partial x_j} + U'_j \frac{\partial U_i^\circ}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho^\circ} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + \frac{\rho'}{\rho^2} \frac{\partial P^\circ}{\partial x_i} \\ \rightarrow \frac{\partial U'_i}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho^\circ} \frac{\partial P'}{\partial x_i}\end{aligned}$$

puis, en dérivant et en tenant compte de l'équation linéarisée de la divergence (C.1), il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U'_i}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho^\circ} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial P'}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\gamma P^\circ}{\rho^\circ} \frac{\partial \vartheta'}{\partial x_i} \\ &= \frac{\gamma P^\circ}{\rho^\circ} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial U'_j}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{\gamma P^\circ}{\rho^\circ} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial U'_j}{\partial x_i} \right)\end{aligned}$$

L'écoulement est irrotationnel dans l'état de base, compte-tenu des hypothèses faites sur le gaz et l'écoulement, il le restera dans l'état perturbé. On peut donc remarquer que  $\partial U'_j / \partial x_i = \partial U'_i / \partial x_j$  quels que soient  $i$  et  $j$  pour obtenir en finale :

$$\boxed{\frac{\partial^2 U'_i}{\partial t^2} = \frac{\gamma P^\circ}{\rho^\circ} \frac{\partial^2 U'_i}{\partial x_j \partial x_j}}$$



## Annexe D

# Régime d'écoulement incompressible pour un gaz compressible

Il s'agit ici de montrer que, dans la limite des faibles nombres de Mach, l'écoulement d'un gaz compressible peut être considéré comme isovolume, on parle alors de *régime incompressible*.

La base de l'analyse consiste à rendre les équations adimensionnelles de sorte que les valeurs des variables et de leurs dérivées restent proches de l'unité, puis à considérer la limite quand  $M_0$  tend vers zéro. À partir du problème générique d'aérodynamique externe présenté dans le paragraphe 3.4, on distinguera deux cas où la démonstration peut être faite : le cas où les parois seraient adiabatiques et celui où les parois seraient chauffées/refroidies à une température donnée.

### D.1 Parois adiabatiques

Dans ce cas, la normalisation retenue initialement convient. On le vérifie immédiatement pour toutes les variables, quoique les normalisations de la température et de la pression nécessitent quelques explications. Si c'est  $V_0^2/C_p$  qui est retenue comme échelle de normalisation pour la température, c'est que dans le cas où les parois sont adiabatiques, il n'y a pas de source extérieure de température, les variations de température sont donc essentiellement liées au mouvement. On retient donc, comme échelle caractéristique de la *variation de température*, la différence entre température statique et température d'arrêt isentropique<sup>1</sup>. Cette différence représente le niveau maximal de température statique « récupérable » à la suite d'une modification des conditions d'écoulement (arrêt). On tient un raisonnement similaire pour la normalisation de la pression en prenant  $\rho_0 V_0^2$  comme échelle caractéristique.

Les équations du modèle sous forme adimensionnelle peuvent être reprises telles qu'elles

---

1. Voir le cours de thermodynamique.

ont été établies au paragraphe 3.4, soit :

$$(D.1) \quad \frac{d\rho^*}{dt^*} = -\rho^* \vartheta^*$$

$$(D.2) \quad \rho^* \frac{dU_i^*}{dt^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \left( 2 \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial x_j^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} \right) \quad \text{avec } i = 1, 2, 3$$

$$(D.3) \quad \rho^* \frac{dT^*}{dt^*} = -\left( \frac{1}{M_0^2} + \gamma P^* \right) \vartheta^* + \frac{\gamma}{Pr Re} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*} + \frac{2\gamma}{Re} \left( S^{*2} - \frac{\vartheta^{*2}}{3} \right)$$

$$(D.4) \quad 1 + \gamma M_0^2 P^* = \rho^* [1 + (\gamma - 1) M_0^2 T^*]$$

où  $S^2 = S_{ij} S_{ij}$ . Si on fait tendre  $M_0$  vers zéro, l'équation d'état (D.4) montre que  $\rho^* = 1$ . Ce résultat peut être reporté dans le système modèle, qui devient :

$$(D.5) \quad \vartheta^* \approx 0$$

$$(D.6) \quad \frac{dU_i^*}{dt^*} \approx -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \left( 2 \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial x_j^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} \right) \quad \text{avec } i = 1, 2, 3$$

$$(D.7) \quad \frac{dT^*}{dt^*} \approx -\frac{\vartheta^*}{M_0^2} + \frac{\gamma}{Pr Re} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*} + \frac{2\gamma}{Re} \left( S^{*2} - \frac{\vartheta^{*2}}{3} \right)$$

$$(D.8) \quad \rho^* \approx 1$$

L'équation de continuité (D.5) indique que  $\text{div} \vec{V}$  tend vers zéro, et donc, qu'on tend bien vers une évolution à caractère isovolume. On pourra utiliser ce résultat pour simplifier davantage le modèle, à l'exception du terme en  $\vartheta^*/M_0^2$  dans l'équation (D.7) puisque son dénominateur tend également vers zéro. Pour aller plus loin, il faut reprendre l'équation d'état exacte sous forme différentielle, soit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^*} \frac{d\rho^*}{dt^*} &= \frac{\gamma M_0^2}{1 + \gamma M_0^2 P^*} \frac{dP^*}{dt^*} - \frac{(\gamma - 1) M_0^2}{1 + (\gamma - 1) M_0^2 T^*} \frac{dT^*}{dt^*}, \\ &\approx \gamma M_0^2 \frac{dP^*}{dt^*} - (\gamma - 1) M_0^2 \frac{dT^*}{dt^*}, \end{aligned}$$

d'où

$$-\frac{\vartheta^*}{M_0^2} \approx \gamma \frac{dP^*}{dt^*} - (\gamma - 1) \frac{dT^*}{dt^*}.$$

En reportant ce résultat dans l'équation (D.7) on obtient une forme simplifiable de l'équation de l'énergie :

$$\frac{dT^*}{dt^*} \approx \frac{dP^*}{dt^*} + \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*} + \frac{2}{Re} \left( S^{*2} - \frac{\vartheta^{*2}}{3} \right).$$

Il est important de remarquer que ceci correspond à la forme *exacte* de l'équation de l'énergie sous forme enthalpique et que le résultat aurait pu être obtenu directement. Cependant, le raisonnement ci-dessus a l'avantage de montrer que les deux formes de l'équation de l'énergie restent compatibles, ce qu'une simplification abusive de la première ( $\vartheta/M_0^2 \rightarrow 0$ ) aurait mis en cause.

Le modèle peut maintenant être simplifié en négligeant la divergence devant les autres composantes du tenseur des taux de déformation pour donner :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}^* \vec{V}^* &\approx 0 \\ \frac{dU_i^*}{dt^*} &\approx -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{2}{Re} \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial x_j^*} \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \\ \frac{dT^*}{dt^*} &\approx \frac{dP^*}{dt^*} + \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*} + \frac{2 S^{*2}}{Re} \\ \rho^* &\approx 1\end{aligned}$$

où, en revenant à la forme dimensionnelle :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{V} &= 0 \\ \frac{du_i}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ C_p \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2 \\ \rho &= \rho_0\end{aligned}$$

On voit bien que, comme dans un problème de fluide incompressible, l'aspect dynamique est découplé de l'aspect thermique. Ce dernier présente, par ailleurs, peu d'intérêt dans la mesure où les variations de température restent faibles dans ce type de problème.

## D.2 Parois faiblement chauffées où refroidies

On procède de la même manière qu'au paragraphe précédent : les variations de pression restent de l'ordre de  $\rho_0 V_0^2$ , car la forme de l'équation de la dynamique est inchangée, tandis que la présence d'une source de chaleur à  $T_p$  impose maintenant de normer la température sous la forme :

$$T^* = \frac{T - T_0}{T_p - T_0} = \frac{T - T_0}{\Delta T},$$

pour pouvoir considérer que la température et ses dérivées restent de l'ordre de l'unité. On ne considérera que le cas où les variations de température sont faibles, soit :

$$\frac{\Delta T}{T_0} \ll 1, \quad \text{mais fini.}$$

Sous forme adimensionnelle, le modèle s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho^*}{dt^*} &= -\rho^* \vartheta^* \\
\rho^* \frac{dU_i^*}{dt^*} &= -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \left( 2 \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial x_j^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} \right) \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \\
\rho^* \frac{dT^*}{dt^*} &= -(\gamma - 1) (1 + \gamma M_0^2 P^*) \frac{T_0}{\Delta T} \vartheta^* + \frac{\gamma}{Pr Re} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*} \\
&\quad + \gamma(\gamma - 1) \frac{2M_0^2}{Re} \frac{T_0}{\Delta T} \left( S^{*2} - \frac{\vartheta^{*2}}{3} \right) \\
1 + \gamma M_0^2 P^* &= \rho^* \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} T^* \right)
\end{aligned}$$

On peut faire tendre le nombre de Mach vers zéro pour obtenir :

$$(D.9) \quad \frac{d\rho^*}{dt^*} = -\rho^* \vartheta^*$$

$$(D.10) \quad \rho^* \frac{dU_i^*}{dt^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \left( 2 \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial x_j^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} \right) \quad \text{avec } i = 1, 2, 3$$

$$(D.11) \quad \rho^* \frac{dT^*}{dt^*} \approx -(\gamma - 1) \frac{T_0}{\Delta T} \vartheta^* + \frac{\gamma}{Pr Re} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*}$$

$$(D.12) \quad 1 \approx \rho^* \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} T^* \right)$$

Si on considère que  $\Delta T/T_0$  est faible, l'équation d'état (D.12) montre que  $\rho^* \approx 1$  et que la divergence est petite. On pourra utiliser ceci pour simplifier davantage le modèle à l'exception, encore une fois, du terme en  $\vartheta^* T_0/\Delta T$  dans l'équation (D.11). Pour résoudre cette difficulté, on revient comme précédemment à l'équation d'état exacte et écrite sous forme différentielle, qui permet d'établir que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho^*} \frac{d\rho^*}{dt^*} &= \frac{\gamma M_0^2}{1 + P^* \gamma M_0^2} \frac{dP^*}{dt^*} - \frac{\Delta T/T_0}{1 + T^* \Delta T/T_0} \frac{dT^*}{dt^*} \\
&\xrightarrow{M_0 \rightarrow 0} -\frac{\Delta T}{T_0} \frac{dT^*}{dt^*},
\end{aligned}$$

soit, en tenant compte de l'équation de continuité :

$$-\frac{T_0}{\Delta T} \vartheta^* = -\frac{dT^*}{dt^*}.$$

Ceci permet de lever l'indétermination dans l'équation (D.11) et d'écrire, toutes simplifications faites :

$$\begin{aligned}
\vartheta^* &\approx 0 \\
\rho^* \frac{dU_i^*}{dt^*} &\approx -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{2}{Re} \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial x_j^*} \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \\
\frac{dT^*}{dt^*} &\approx \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*} \\
\rho^* &\approx 1
\end{aligned}$$

Ici encore, on aurait obtenu le même résultat pour l'équation de l'énergie en partant de la forme enthalpique exacte sous forme adimensionnelle :

$$\rho^* \frac{dT^*}{dt^*} = (\gamma - 1) M_0^2 \frac{T_0}{\Delta T} \frac{dP^*}{dt^*} + \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*} + (\gamma - 1) \frac{2M_0^2}{Re} \frac{T_0}{\Delta T} \left( S^{*2} - \frac{\vartheta^{*2}}{3} \right),$$

et en faisant tendre  $M_0$  vers zéro.

Sous forme dimensionnelle, le modèle s'écrit :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} &= 0 \\ \frac{dU_i}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ C_p \frac{dT}{dt} &= \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \\ \rho &= \rho_0 \end{aligned}$$



## Annexe E

# Calcul du moment aérodynamique exercé sur un profil de Joukovski

Dans le cadre de la théorie des écoulements à potentiels complexes, le calcul du moment aérodynamique qui s'exerce sur un profil de Joukovski peut s'effectuer en utilisant la seconde formule de Blasius (Cf. paragraphe 6.3.2). Ainsi, le moment autour d'un point d'affixe  $z_0$  des efforts appliqués au profil  $\mathcal{P}$  peut s'écrire sous la forme

$$M_{z_0} = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_{\mathcal{P}} (z - z_0) w^2(z) dz \right].$$

Pour exploiter ce résultat, il est nécessaire de connaître l'expression analytique de  $w^2(z)$  le long du profil. Cependant, du fait de sa complexité, on préfère en reporter l'évaluation à l'infini (c.-à-d. loin du profil, en considérant  $z \rightarrow \infty$ ). Pour ce faire, on va considérer le contour fermé décrit dans la figure E.1. Ce dernier se décompose en plusieurs parties :

$$\mathcal{C} = AB + \Sigma + BA + \mathcal{P}$$

avec

$\mathcal{P}$  : partie de  $\mathcal{C}$  correspondant au profil de Joukovski considéré,

$\Sigma$  : partie de  $\mathcal{C}$  située à l'infini,

$AB$  : partie de  $\mathcal{C}$  reliant  $\mathcal{P}$  et  $\Sigma$ .

Comme la fonction  $(z - z_0) w^2(z)$  est holomorphe, son intégrale est nulle le long d'un contour fermé. Ainsi, en parcourant  $\mathcal{C}$  dans le sens trigonométrique, on pourra écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} (z - z_0) w^2(z) dz = 0 &= \int_{AB} (z - z_0) w^2(z) dz + \int_{\Sigma} (z - z_0) w^2(z) dz \\ &+ \int_{BA} (z - z_0) w^2(z) dz - \int_{\mathcal{P}} (z - z_0) w^2(z) dz, \end{aligned}$$

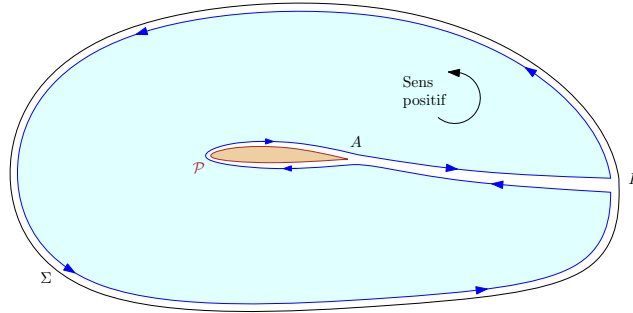


FIGURE E.1 – Description du contour fermé  $\mathcal{C}$  servant de support à l'application de la seconde formule de Blasius au profil de Joukowski pour le calcul du moment.

puis, en remarquant que

$$\int_{AB} (z - z_0) w^2(z) dz = - \int_{BA} (z - z_0) w^2(z) dz,$$

on obtient

$$\int_{\mathcal{P}} (z - z_0) w^2(z) dz = \int_{\Sigma} (z - z_0) w^2(z) dz.$$

Il apparaît ainsi que l'intégrale de  $(z - z_0) w^2(z)$  le long du profil peut être remplacée par son intégrale sur un contour entourant le profil et situé à l'infini.

La poursuite du calcul nécessite d'inverser la transformation de Joukowski afin d'accéder à l'expression de la vitesse complexe dans le plan transformé ( $\mathbf{z}$ ) à partir de la connaissance du potentiel complexe dans le plan générateur ( $\mathbf{Z}$ ). On rappelle que les profils de Joukowski sont obtenus à partir de la transformation conforme du même nom, appliquée à un cercle du plan générateur passant par le point critique  $Z = k$ , et dont le centre est faiblement décalé de  $X_c < 0$  et  $Y_c > 0$  par rapport à l'origine du plan complexe. La transformation s'écrit

$$z = T(Z) = Z + \frac{k^2}{Z}.$$

Il s'agit d'une fonction holomorphe qui admet donc à l'infini un développement en série de Laurent de la forme

$$z = T(Z) = Z + a_0 + \frac{a_1}{Z} + \frac{a_2}{Z^2} + \dots$$

On peut montrer que la fonction inverse admet alors, toujours à l'infini, un développement en série de Laurent du type

$$Z = T^{-1}(z) = z - a_0 - \frac{a_1}{z} - \frac{(a_0 a_1 + a_2)}{z^2} + \dots$$

Dans le cas de la transformation de Joukowski, on a par définition  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = k^2$  et  $a_i = 0$  dès que  $i$  est supérieur ou égal à 2, de sorte que l'on peut écrire

$$z = T(Z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} Z + \frac{k^2}{Z} \quad \text{et} \quad Z = T^{-1}(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} z - \frac{k^2}{z}.$$

On se souvient aussi que le potentiel complexe correspondant à l'écoulement uniforme incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe des abscisses, autour d'un cylindre de centre  $C(X_c, Y_c)$  avec circulation  $\Gamma$  s'écrit

$$F(Z) = V_0 \left( (Z - Z_c) e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{Z - Z_c} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(Z - Z_c),$$

où  $R = \sqrt{(k - X_c)^2 + Y_c^2}$ . La vitesse complexe associée s'obtient par simple dérivation :

$$\mathcal{W}(Z) = \frac{dF}{dZ} = V_0 e^{-i\alpha} - \frac{V_0 R^2 e^{i\alpha}}{(Z - Z_c)^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi(Z - Z_c)}.$$

Si la circulation est choisie de manière à vérifier la condition de Kutta-Joukowski, c.-à-d.  $\Gamma = \Gamma_J = -4\pi R V_0 \sin(\alpha - \beta)$  avec  $\tan \beta = -Y_c/(k - X_c)$ , l'écoulement obtenu dans le plan transformé correspond à l'écoulement uniforme d'incidence  $\alpha$  autour d'un profil de Joukowski. La vitesse complexe dans le plan transformé est donnée par la relation

$$w(z) = \mathcal{W}(Z) \frac{dZ}{dz}.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} w(z) &= \left( V_0 e^{-i\alpha} - \frac{V_0 R^2 e^{i\alpha}}{\left(z - \frac{k^2}{z} - z_c\right)^2} - \frac{i\Gamma_J}{2\pi \left(z - \frac{k^2}{z} - z_c\right)} \right) \left( 1 + \frac{k^2}{z^2} \right) \\ &= \left( V_0 e^{-i\alpha} - \frac{V_0 R^2 e^{i\alpha}}{z^2 \left(1 - \frac{k^2}{z^2} - \frac{z_c}{z}\right)^2} - \frac{i\Gamma_J}{2\pi z \left(1 - \frac{k^2}{z^2} - \frac{z_c}{z}\right)} \right) \left( 1 + \frac{k^2}{z^2} \right). \end{aligned}$$

En considérant que  $\left(1 - \frac{k^2}{z^2} - \frac{z_c}{z}\right) \approx 1$  quand  $z \rightarrow \infty$ , il vient :

$$w(z) = V_0 e^{-i\alpha} - \frac{i\Gamma_J}{2\pi} \frac{1}{z} + (V_0 k^2 e^{-i\alpha} - V_0 R^2 e^{i\alpha}) \frac{1}{z^2} - \frac{i\Gamma_J k^2}{2\pi} \frac{1}{z^3} - V_0 k^2 R^2 e^{i\alpha} \frac{1}{z^4},$$

puis

$$w^2(z) = V_0^2 e^{-2i\alpha} - \frac{V_0 i\Gamma_J e^{-i\alpha}}{\pi} \frac{1}{z} + \left[ -\frac{\Gamma_J^2}{4\pi^2} + 2V_0 e^{-i\alpha} (V_0 k^2 e^{-i\alpha} - V_0 R^2 e^{i\alpha}) \right] \frac{1}{z^2} + \dots$$

On peut donc maintenant appliquer la formule de Blasius :

$$\begin{aligned} M_{z_0} &= -\frac{\rho}{2} \Re \left[ \int_{\mathcal{P}} (z - z_0) w^2(z) dz \right] \\ &= -\frac{\rho}{2} \Re \left[ \int_{\Sigma} (z - z_0) w^2(z) dz \right] \\ &= -\frac{\rho}{2} \Re \left[ \int_{\Sigma} z w^2(z) dz \right] + \frac{\rho}{2} \Re \left[ z_0 \int_{\Sigma} w^2(z) dz \right]. \end{aligned}$$

Le calcul des intégrales sera effectué à l'aide du théorème des résidus, en remarquant que  $w^2(z)$  ne possède que 0 comme singularité à l'intérieur de  $\Sigma$ . Le résidu en 0 de  $w^2(z)$  est

donc le coefficient du terme en  $1/z$  de son développement précédent, tandis que le résidu en 0 de  $zw^2(z)$  est le coefficient du terme en  $1/z^2$  de ce même développement. On obtient donc

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} w^2(z) dz &= 2i\pi \operatorname{Res} [w^2(z)] \\ &= 2i\pi \times \left( -\frac{V_0 i \Gamma_J e^{-i\alpha}}{\pi} \right) \\ &= 2V_0 \Gamma_J e^{-i\alpha} \quad ; \\ \int_{\Sigma} zw^2(z) dz &= 2i\pi \operatorname{Res} [zw^2(z)] \\ &= 2i\pi \times \left[ -\frac{\Gamma_J^2}{4\pi^2} + 2V_0 e^{-i\alpha} (V_0 k^2 e^{-i\alpha} - V_0 R^2 e^{i\alpha}) \right] \\ &= 2i\pi \left[ -\frac{\Gamma_J^2}{4\pi^2} + 2V_0^2 k^2 e^{-2i\alpha} - 2V_0^2 R^2 \right].\end{aligned}$$

Ainsi, en rappelant que  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $\Re e(iz) = -\Im m(z)$ , on écrit :

$$M_{z_0} = \frac{\rho}{2} \Im m [4\pi V_0^2 k^2 e^{-2i\alpha}] - \frac{\rho}{2} \Im m [-2iz_0 V_0 \Gamma_J e^{-i\alpha}],$$

puis en remarquant que  $\Gamma_J = -4\pi R V_0 \sin(\alpha - \beta) = 2i\pi R V_0 [e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)}]$ , on aboutit finalement après quelques manipulations à la formule exprimant le moment calculé au point d'affixe  $z_0$  pour un profil de Joukovski :

$$M_{z_0} = 2\pi\rho V_0^2 \Im m [e^{-2i\alpha}(k^2 + z_0 R e^{i\beta}) - z_0 R e^{-i\beta}].$$

**Annexe F**

**Recueil des textes de PC/BE**

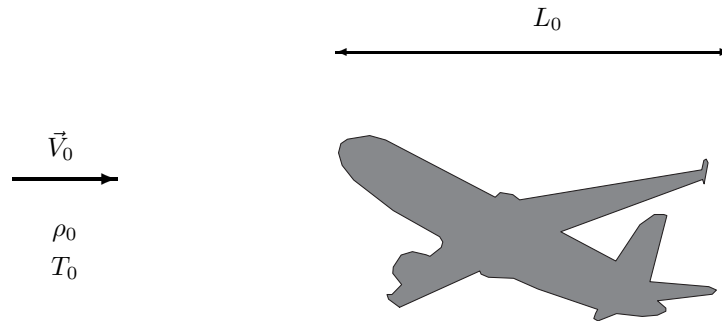


# MÉCANIQUE DES FLUIDES

## PC1 – Analyse dimensionnelle et conditions de similitude

### Exercice 1 : Analyse dimensionnelle d'un problème d'aérodynamique externe

On considère un mobile dont la géométrie est paramétrée par une dimension  $L_0$  se déplaçant à la vitesse  $V_0$  dans fluide non-pesant à la température  $T_0$ , de masse volumique  $\rho_0$  et régi par le modèle de Navier-Stokes avec des propriétés physiques constantes ( $\mu, \lambda, C_v, r$ ).



On étudie le problème en similitude de Reynolds et de Mach, les différentes fonctions et variables étant rendues adimensionnelles conformément au tableau suivant :

Pression	Masse volumique	Température	Vitesse	Longueur	Temps
$P^* = \frac{P-P_0}{\rho_0 V_0^2}$	$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}$	$T^* = \frac{T-T_0}{V_0^2/C_p}$	$\vec{V}^* = \frac{\vec{V}}{V_0}$	$\vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{L_0}$	$t^* = \frac{t}{L_0/V_0}$

Établir les équations adimensionnelles de continuité, quantité de mouvement et d'état.

### Exercice 2 : Similitude en soufflerie

On souhaite caractériser en soufflerie la croisière d'un avion léger. L'appareil étudié possède une envergure de 9,97 m et croise à 8500 ft à la vitesse de 163 kn. On dispose d'une soufflerie, pressurisable jusqu'à 3,85 bar, dont la veine accepte des maquettes de 3 m d'envergure. La soufflerie opère à une température de 288 K et la vitesse maximale du courant d'air dans la veine varie en fonction de la pression de fonctionnement conformément au schéma ci-dessous (le nombre de Reynolds est donné pour une longueur de 1 m).

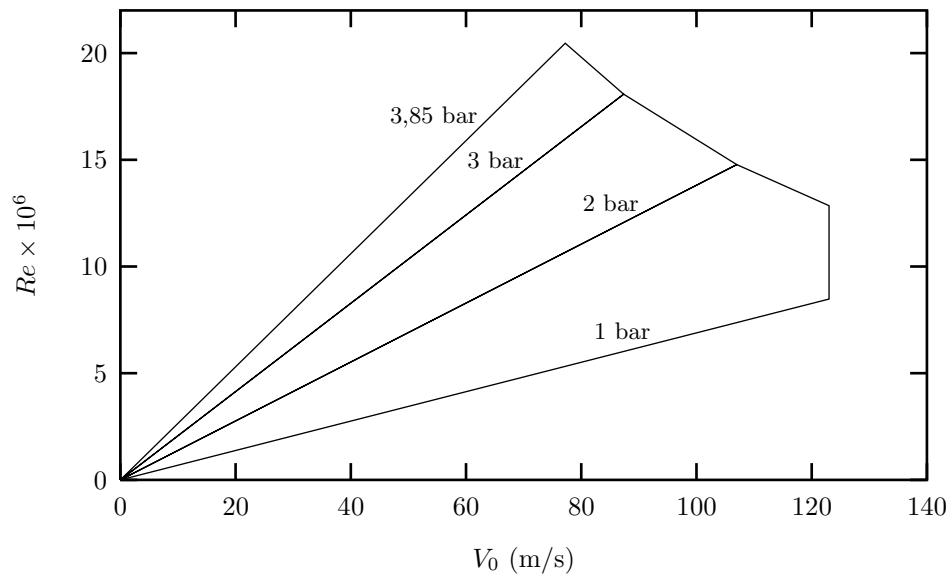
Peut-on effectivement caractériser le vol de l'avion dans cette installation et à quel point de fonctionnement (vitesse et pression) ?

On considérera que la viscosité *dynamique* ne varie pas en fonction de la pression et évolue en température conformément à la formule de Sutherland :

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0} \frac{1 + C/T_0}{1 + C/T}} \text{ avec } \mu_0 = 1,711 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(ms)}, C = 113 \text{ K, et } T_0 = 273,15 \text{ K,}$$

et que l'avion vole dans l'atmosphère standard pour laquelle, à 8500 ft, on a  $T=271$  K et  $P=760$  mbar. On donne de plus :  $1 \text{ kn}=0,5144 \text{ m/s}$ ,  $1 \text{ ft}=0,3048 \text{ m}$ ,  $\gamma=1,4$  et  $r=287 \text{ m}^2/(\text{s}^2\text{K})$ .

Même question pour un avion de 12,68 m d'envergure croisant à 243 kn et 30.000 ft ( $P=300$  mbar,  $T=228$  K).



## MÉCANIQUE DES FLUIDES

### PC2 – Exemple de solution exacte des équations de Navier-Stokes : Écoulement de Couette plan

On considère l'écoulement bidimensionnel plan d'un fluide visqueux, incompressible et non pesant entre deux plaques parallèles. Les deux plaques sont infinies et séparées d'une distance égale à  $2h$  (Cf. Fig. F.1). L'une d'elles est mobile à la vitesse  $U_0 \times \vec{x}$ . On suppose que l'écoulement est parallèle aux parois et aligné avec la direction  $x$ .

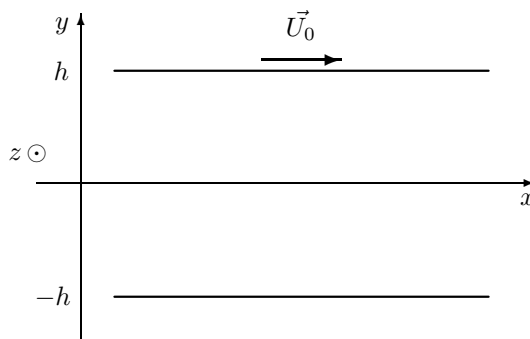


FIGURE F.1 – Configuration générale de l'écoulement.

- 1) Quelles sont les causes possibles de mise en mouvement du fluide ?
- 2) Écrire le système d'équations régissant le mouvement du fluide.
- 3) En supposant que l'écoulement est permanent, montrer que le gradient de pression longitudinal est constant.
- 4) Déterminer le profil de vitesse dans une section du canal quand  $U_0 = 0$  et que le gradient longitudinal de pression imposé est non-nul (négatif). Quelle est la vitesse maximale ( $U_{\max}$ ) dans cette section ? Proposer une écriture adimensionnelle du profil de vitesse.
- 5) Calculer la vitesse moyenne de débit ( $U_m$ ) dans une section. Quelle est son expression en fonction de  $U_{\max}$  ?
- 6) Écrire l'équation de l'énergie cinétique, donner l'évolution de chacun des termes dans la section et expliquer les aspects physiques du bilan énergétique de cet écoulement.
- 7) On suppose maintenant que  $U_0$  est non nul et positif. Quelle est la répartition de vitesse dans une section. Discuter ce résultat en fonction de la valeur du paramètre

$$\Lambda = \frac{h^2}{2\mu U_0} \frac{dP}{dx}.$$

En particulier, pour quelle valeurs de  $\Lambda$  existe-t-il un courant de retour et un débit global négatif ?

## MÉCANIQUE DES FLUIDES

### PC3 – Exemple de solution exacte des équations de Navier-Stokes : Écoulement de Couette en rotation

On considère l'écoulement d'un fluide entre deux cylindres coaxiaux de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ). Ces deux cylindres sont animés de mouvements de rotation uniforme aux vitesses  $\omega_1$  et  $\omega_2$  autour de leur axe (axe  $z$ ). Ils sont fermés à leurs extrémités et suffisamment longs pour que l'on puisse considérer qu'il n'y a pas de mouvement suivant  $z$ . Le fluide est Newtonien (viscosité dynamique  $\mu$ ), incompressible et pesant ( $\vec{g}$  est orienté selon les  $z$  négatifs).

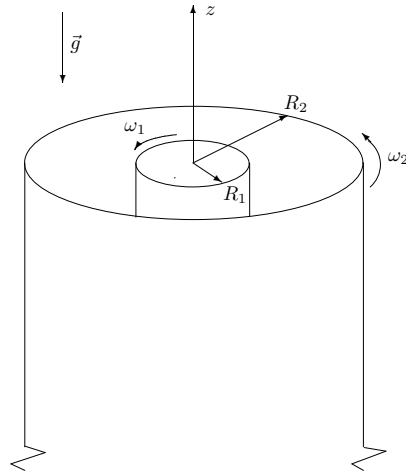
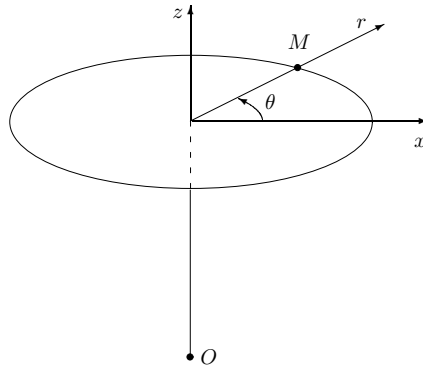


FIGURE F.2 – Configuration générale de l'écoulement.

- 1) Quelles hypothèses peut-on faire sur l'écoulement ? En déduire le système d'équations simplifiées régissant le mouvement (les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques sont données à la fin du texte).
- 2) Déterminer les champs de vitesse et de pression appliqués au fluide contenu dans l'espace annulaire.
- 3) On considère que le cylindre extérieur est au repos. Quelle est le couple qu'il faut lui appliquer pour le maintenir ainsi ? Proposer une application pratique de ce dispositif.
- 4) On considère maintenant que seul le cylindre intérieur est présent et qu'il tourne à la vitesse  $\omega_1$  dans le même fluide qui occupe à présent tout l'espace environnant. Donner les champs de vitesse et de pression dans le fluide. Déterminer le couple appliqué par le fluide sur le cylindre.
- 5) Calculer les champs de rotationnel et de déformation appliqués au fluide.
- 6) On considère enfin que seul le cylindre extérieur est présent et qu'il tourne à la vitesse  $\omega_2$ . Mêmes questions que 5) pour le fluide contenu dans le cylindre.

## RAPPEL : Équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques

Repérage du point :  $M(r, \theta, z)$



Vecteur vitesse :  $\vec{V} = (v_r, v_\theta, v_z)$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{V} = \begin{bmatrix} \Omega_r \\ \Omega_\theta \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

Tenseur des déformations :  $\mathbf{S}$

$$S_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$S_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}$$

$$S_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$S_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$S_{rz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]$$

$$S_{\theta z} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right]$$

### Équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0$$

### Équations de quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= \rho g_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \\ \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) &= \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{aligned}$$

### Tenseur des contraintes

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= 2\mu \left( S_{rr} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) = 2\mu \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right] \\ \tau_{\theta\theta} &= 2\mu \left( S_{\theta\theta} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) = 2\mu \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right] \\ \tau_{zz} &= 2\mu \left( S_{zz} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) = 2\mu \left[ \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right] \\ \tau_{r\theta} &= 2\mu S_{r\theta} = \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \\ \tau_{rz} &= 2\mu S_{rz} = \mu \left[ \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] \\ \tau_{\theta z} &= 2\mu S_{\theta z} = \mu \left[ \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

# MÉCANIQUE DES FLUIDES

## PC4 – Application du théorème d’Euler

Action d’un jet sur une plaque plane

On se propose de déterminer l’effort engendré par l’action d’un jet de fluide sur une plaque plane inclinée d’un angle  $\alpha$  par rapport à la direction du jet. Le fluide émis est un liquide *incompressible* de masse volumique  $\rho$ , *non-visqueux* et non-miscible avec l’air ambiant. Ce dernier est lui aussi considéré comme non visqueux et soumis à la pression atmosphérique  $P_a$ .

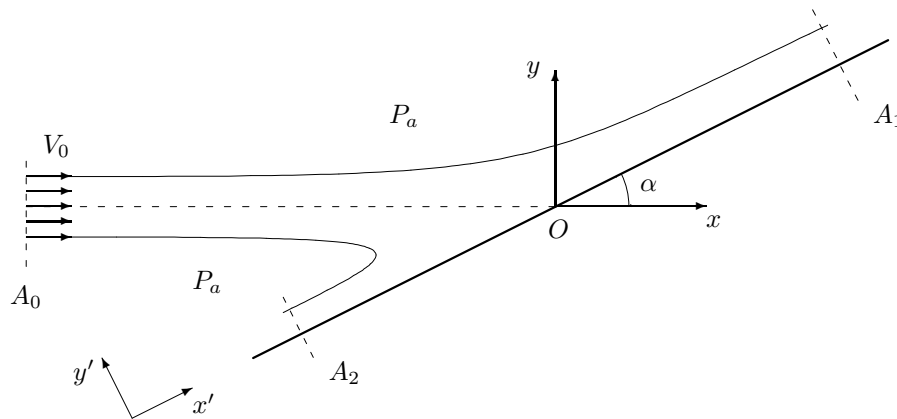


FIGURE F.3 – Configuration générale de l’écoulement et conventions de notation

La configuration générale de l’écoulement ainsi que les conventions de notation sont représentées sur la figure F.3. Le jet est issu d’un orifice rectangulaire de grand allongement, de sorte que l’écoulement peut être considéré comme *bidimensionnel* (invariant en  $z$ ) et *plan* ( $W = 0$ ). Les sections  $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$  sont rectangulaires et profondes d’une unité suivant  $z$ . La vitesse est supposée uniforme dans la section  $A_0$  et sa proximité, égale à  $V_0$  en module. Les conditions d’émission et les conditions atmosphériques ne varient pas dans le temps, on supposera donc que l’écoulement est *stationnaire*. Enfin, la quantité de mouvement à l’émission est suffisamment grande pour que l’on puisse négliger l’effet de la pesanteur.

1. Montrer que, suffisamment loin du point  $O$  et moyennant une hypothèse sur la forme des lignes de courant au voisinage des sections  $A_1$  et  $A_2$ , on peut considérer que la vitesse  $y$  est uniforme et de même module que dans la section d’émission.
2. Quelle relation existe alors entre les sections  $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$  ?
3. Expliciter l’intégrale déterminant l’effort exercé par le fluide sur la plaque. En déduire la définition d’une surface  $\Sigma$  permettant, par application du théorème d’Euler, de calculer cet effort.
4. Appliquer le théorème d’Euler sous forme vectorielle à la surface  $\Sigma$ .

5. Par projection sur un système d'axes judicieusement choisi, en déduire
  - la valeurs des sections  $A_1$  et  $A_2$  ;
  - la résultante  $F$  des efforts exercés par le fluide sur la plaque en fonction de  $A_0$ ,  $V_0$  et  $\alpha$ .
6. Comment évoluent ces résultats si le fluide est visqueux ?
7. Peut-on déterminer la position du point d'application de la résultante  $F$  ?

## MÉCANIQUE DES FLUIDES

### PC5 – Application du théorème d’Euler :

Évaluation de la traînée de sillage d’un profil de voilure en soufflerie

On s’intéresse ici à une méthode pratique couramment utilisée en soufflerie pour évaluer la traînée d’un profil. Elle s’appuie sur l’utilisation du théorème d’Euler appliqué à une tranche de fluide d’envergure unité et comprise entre la paroi du profil et une surface située “suffisamment” loin. On a représenté sur la figure 1 la trace  $S_\infty$  de cette surface dans le plan  $(x,y)$ , elle est composée de deux lignes de courant  $C_a$  et  $C_b$  fermées par les deux segments  $S_0$  et  $S_1$  perpendiculaires à la vitesse amont  $\vec{V}_0$ . On note  $S_p$  la trace du profil dans le plan  $(x,y)$ .

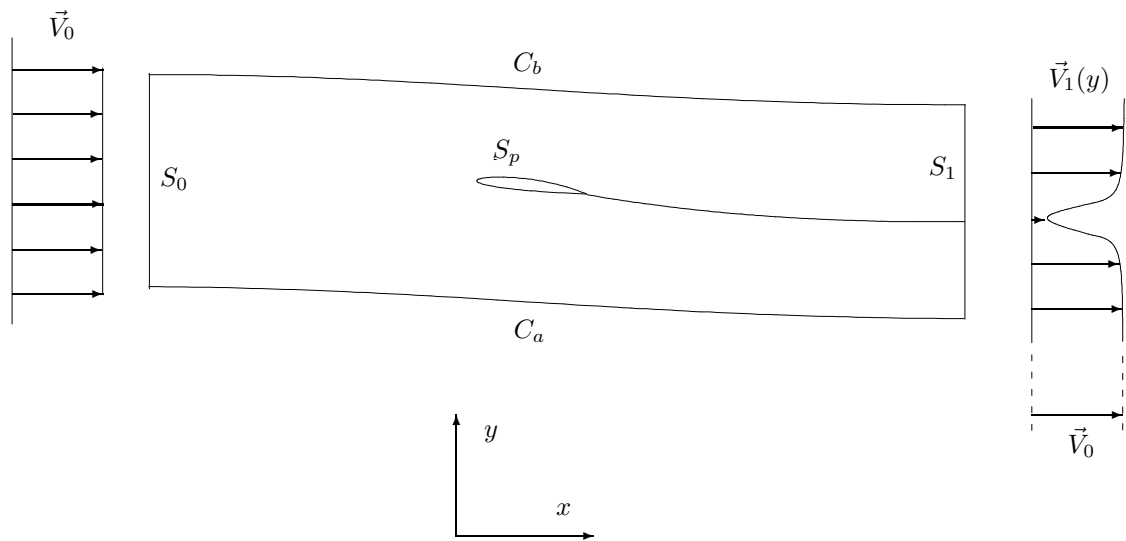


FIGURE F.4 – Configuration générale de l’écoulement, définition de la trace dans le plan  $(x,y)$  de la surface de contrôle.

L’écoulement est stationnaire et bidimensionnel, le fluide est incompressible et non pesant. En fluide réel un sillage se développe en aval du bord de fuite, matérialisé par un profil de vitesse déficitaire : la vitesse tend vers  $V_0$  à l’extérieur du sillage et est sensiblement diminuée à l’intérieur (voir figure F.4).

Le théorème d’Euler sera appliqué *en fluide réel* à la surface  $\Sigma = S_p \cup S_\infty$ . Toutefois, pour la surface  $S_\infty$  on pourra considérer que les effets visqueux sont devenus négligeables loin du profil.

1. Montrez que l'on peut écrire en projection sur  $x$  :

$$-\underbrace{\int_{S_0} \rho V_0 \times (\vec{V}_0 \cdot \vec{n}_0) ds_0}_{I_0} - \underbrace{\int_{S_1} \rho u_1 \times (\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1) ds_1}_{I_1} = R_x + \underbrace{\int_{S_\infty} P \vec{n} \cdot \vec{i} ds}_{J},$$

où  $R_x$  est la force de traînée par unité d'envergure,  $u_1$  la composante de  $\vec{V}_1$  suivant  $x$ . Quelle est la nature des efforts "cachés" dans  $R_x$  ?

2. On suppose que  $S_\infty$  est en tout point suffisamment éloignée du profil pour que la pression puisse y être considérée comme uniforme égale à  $P_\infty$  ; que peut on en déduire pour la valeur de  $J$  ?
3. Montrez que les intégrales  $I_0$  et  $I_1$  peuvent s'écrire :

$$I_0 = - \int_{\psi_a}^{\psi_b} \rho V_0 d\psi \quad \text{et} \quad I_1 = \int_{\psi_a}^{\psi_b} \rho u_1 d\psi,$$

où  $\psi$  est la fonction courant. En déduire que :

$$-I_0 - I_1 = \int_{S_1} \rho(V_0 - u_1) \times (\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1) ds_1.$$

4. En supposant que  $\vec{V}_1$  est alignée avec  $x$ , donnez l'expression finale de  $R_x$ . En déduire l'expression du coefficient de traînée comme l'intégrale d'une fonction de  $u_1/V_0$  en  $\eta = y/C$ .  $C$  est la corde du profil et le coefficient de frottement  $C_x$  est défini par :

$$R_x = \frac{1}{2} \rho (C \times 1) V_0^2 C_x.$$

5. On convient maintenant d'approximer le profil de vitesse dans le sillage par l'expression suivante :

$$\frac{u_1}{V_0} = \frac{1}{2} \left[ 1 + b - (1 - b) \cos \left( 2\pi a \frac{y}{C} \right) \right],$$

où  $a$  et  $b$  peuvent être reliés à l'épaisseur du sillage et au déficit de vitesse conformément à la figure F.5. Le résultat de mesures de vitesse effectuées en soufflerie dans le sillage d'un profil de voilure NACA0012 à une distance de  $C/2$  du bord de fuite donne les résultats portés dans le tableau F.1. Calculer les valeurs du coefficient de traînée correspondantes.

$\alpha$	0°	5°	10°	14°
$b$	0,85	0,84	0,83	0,785
$1/a$	0,054	0,070	0,091	0,136

TABLEAU F.1 – Résultats de mesures effectuées dans le sillage d'un profil NACA0012 à une distance de  $C/2$  comptée à partir du bord de fuite.

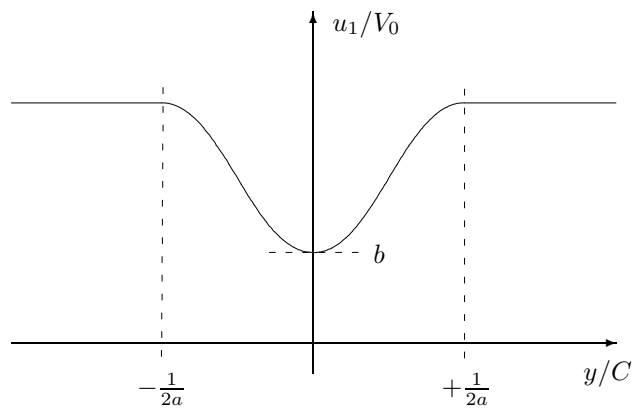


FIGURE F.5 – Approximation du profil de vitesse dans le sillage.

## MÉCANIQUE DES FLUIDES

### PC6 – Superposition d'écoulements à potentiel

On considère le potentiel complexe constitué par la superposition d'une source de débit  $D$ , placée à l'origine du plan  $(x, y)$ , et d'un courant uniforme à la vitesse  $V_0$  parallèle à l'axe des  $x$ .

- 1) Montrer qu'il existe un point d'arrêt dans l'écoulement correspondant. Déterminer les lignes de courant passant par ce point d'arrêt. À quelle situation pratique d'écoulement peut-on rattacher ce potentiel complexe ?
- 2) Utiliser le théorème de la quantité de mouvement pour calculer l'effort exercé par le fluide sur la ligne de courant passant par le point d'arrêt.
- 3) On déplace maintenant la source au point  $(-\epsilon, 0)$ , et on ajoute un puits de même débit au point  $(\epsilon, 0)$ . Que devient la ligne de courant passant par le (ou les) points d'arrêt ?
- 4) Que devient l'écoulement précédent si on fait tendre  $\epsilon$  vers zéro tout en augmentant les débits de la source et du puits de sorte que le produit  $D\epsilon$  reste constant ?

## MÉCANIQUE DES FLUIDES

### PC7 – Écoulement autour d'un cylindre

On considère l'écoulement de fluide parfait, incompressible et irrotationnel obtenu par la superposition d'un écoulement uniforme de vitesse  $V_0$  alignée avec l'axe des  $x$ , et d'un doublet de moment  $m$  placé à l'origine.

- 1) Écrire le potentiel complexe de l'écoulement résultant ainsi que l'expression de la vitesse complexe.
- 2) Déterminer l'équation de la ligne de courant passant par l'un des points d'arrêt et décrire qualitativement l'écoulement. Étudier la variation de vitesse et de pression le long de cette ligne de courant.
- 3) À partir des résultats précédents, donner l'effort exercé sur un cylindre circulaire de rayon  $R$  par un vent uniforme à la vitesse  $V_0$ .

On superpose maintenant à l'écoulement un tourbillon ponctuel de circulation  $\Gamma$  placé à l'origine.

- 4) Discuter l'existence et la position des points d'arrêt en fonction de la valeur de  $\Gamma$ .
- 5) Déterminer les évolutions du module de la vitesse et de la pression le long de la paroi de l'obstacle.
- 6) Déterminer par différentes manières l'effort exercé par le fluide sur l'obstacle.

## MÉCANIQUE DES FLUIDES

### BE1 – Application des théorèmes généraux Calcul d'un circuit aérodynamique

On se propose de calculer les éléments nécessaires à la motorisation d'une soufflerie à retour à l'issue d'un premier dimensionnement. À ce stade les principales caractéristiques géométriques du circuit aérodynamique sont connues ; elles découlent des dimensions de la veine d'essai et du niveau de "qualité" requis pour l'écoulement dans celle-ci. Un schéma général de la soufflerie est donné dans la figure F.6, on y trouve également la dénomination des différents tronçons et les sections caractéristiques repérées par des lettres.

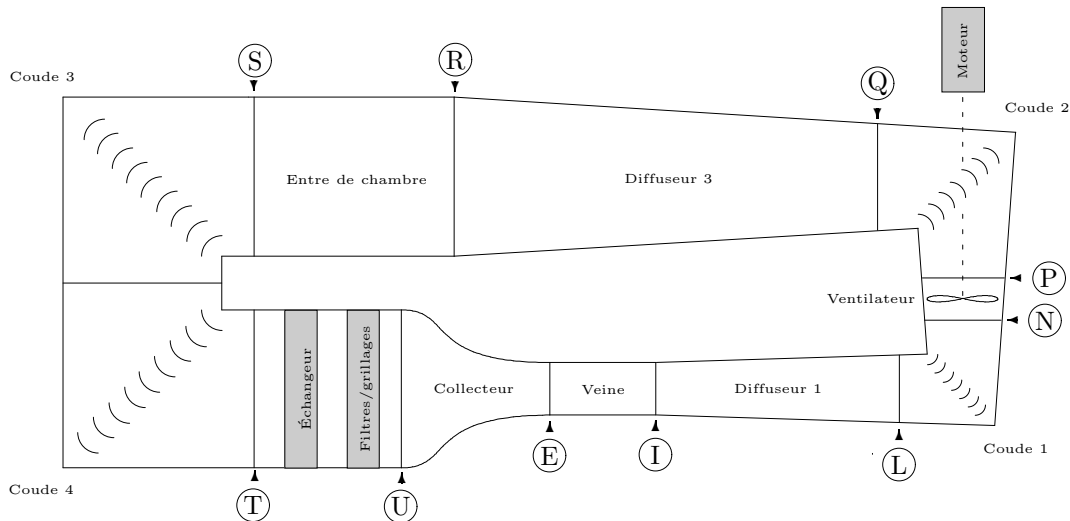


FIGURE F.6 – Schéma d'ensemble et désignation des différents tronçons et repères.

Le tableau F.2 donne les caractéristiques dimensionnelles de l'ensemble des éléments du circuit. On supposera que toutes les sections sont circulaires. Les longueurs de tronçons données dans le tableau sont comptées le long de l'axe du circuit, y compris pour les coudes.

Le point de fonctionnement nominal de l'installation est défini par les valeurs de vitesse, pression et température dans la section d'entrée de la veine d'essai :

$$P_E = 1,013 \text{ bar}, \quad V_E = 75 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad T_E = 20 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Plan	Repère	Section $S$ (m <sup>2</sup> )	Abscisse sur l'axe (m)	Longueur du tronçon (m)	
Entrée veine	E	0,175	0	Veine	1
Sortie veine	I	0,183	1	Diffuseur 1	2,16
Sortie diffuseur 1	L	0,305	3,16	Coude 1	1,3
Sortie coude 1	N	0,482	4,46	Ventilateur	0,46
Entrée coude 2	P	0,501	4,92	Coude 2	1,77
Entrée diffuseur 3	Q	0,804	6,69	Diffuseur 3	3,93
Sortie diffuseur 3	R	1,746	10,62	Entrée de chambre	1,94
Entrée coude 3	S	1,746	12,56	Coude 3	2,03
Entrée coude 4		1,746	14,59	Coude 4	2,03
Entrée échangeur	T	1,746	16,62	Échangeur	1,4
Entrée collecteur	U	1,746	18,02	Collecteur	1,5
Entrée veine		0,175	19,52		

TABLEAU F.2 – Caractéristiques géométriques des différents tronçons.

On considèrera que pression et température varient peu le long du circuit. Masse volumique et viscosité seront donc considérées comme constantes. On les obtient à l'aide de la loi d'état et de la formule de Sutherland :

$$\rho = \frac{P}{rT} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{287 \times 293} = 1,2 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = \mu_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} \frac{1 + C/T_0}{1 + C/T} = 1,711 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{293}{273}} \frac{1 + 113/273}{1 + 113/293} = 1,81 \cdot 10^{-5} \text{ et } \nu = 1,510^{-5}.$$

### Pertes de charges dans le circuit

On donne la valeur moyenne du coefficient de perte de charge linéaire applicable dans l'ensemble du circuit

$$\lambda = 0,017$$

ainsi que les coefficients de perte de charge dus à

- un diffuseur conique :

$$\zeta_{\alpha} = 3,2 (\tan \alpha)^{1,25} \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

$S_1$  est la section amont,  $S_2$  la section aval et  $\alpha$  le demi angle au sommet du cône ;

- un coude muni d'aubage :  $\zeta_c = 0,3$  ;
- un échangeur à faisceau de tube :

$$\zeta_f = 0,32 \times n \times Re^m \times \left[ \frac{D_1 - d_e}{D_2 - d_e} - 0,9 \right]^{-0,68} \left[ \frac{D_1}{d_e} - 1 \right]^{-0,5} \quad \text{avec} \quad m = -0,2 \left[ \frac{D_1 - d_e}{D_2 - d_e} \right]^{-2}$$

où  $n$  est le nombre de rangées de tubes,  $D_1$  le pas des tubes dans une rangée,  $D_2$  l'espacement entre chaque rangée,  $d_e$  le diamètre des tubes et  $Re$  est le nombre de Reynolds basé sur la vitesse moyenne et le diamètre de la section ;

- un grillage :

$$\zeta_g = k_{Re} \left[ 1,3 (1 - \bar{f}) + \left( \frac{1}{\bar{f}} - 1 \right)^2 \right]$$

où  $\bar{f}$  est le rapport entre la section de passage et la surface frontale totale de la grille,  $k_{Re}$  sera pris ici égal à 1,05.

L'échangeur est constitué de 8 rangées de 12 tubes de diamètre  $d_e = 42$  mm, séparées de 52 mm. La grille (filtre) est à maille carrée de 0,5 mm, constituée de fils de 0,16 mm de diamètre.

Pour simplifier les calculs de pertes de charge linéaires, on conviendra de prendre une section de référence égale à la moyenne des sections d'entrée et de sortie de chaque tronçon. La vitesse de référence sera la vitesse qui assure la continuité du débit dans cette section.

### Questions

- 1) Calculez, tronçon par tronçon, l'ensemble des pertes de charge présentes dans le circuit (On présentera les résultats obtenus dans le tableau F.3).
- 2) Donnez, pour chaque section repérée, les valeurs de la pression totale, dynamique et statique (On présentera les résultats obtenus dans le tableau F.4). Que se passe-t-il entre les sections P et N, au niveau du ventilateur ?
- 3) Le rendement du ventilateur est de 90%, quelle est la puissance mécanique à fournir sur l'arbre ?
- 4) Calculez la puissance aérodynamique du courant d'air dans la veine. Comparez avec la puissance fournie et commentez.
- 5) Quelle est la puissance thermique dissipée dans l'installation ? Commentez.

Tronçon	$L$	$S$	$V$	$S_m$	$D_m$	$V_m$	$\xi_\lambda$	$\zeta_\alpha$	$\xi_\alpha$	$\zeta_{\text{autre}}$	$\xi_{\text{autre}}$
Veine	1	0.175								—	—
Diffuseur 1	2.16	0.183								—	—
Coude 1	1.3	0.305									
Ventilateur	0.46	0.482								—	—
Coude 2	1.77	0.501									
Diffuseur 3	3.93	0.804								—	—
Entrée chambre	1.94	1.746						—	—	—	—
Coude 3	2.03	1.746						—	—		
Coude 4	2.03	1.746						—	—		
Fin chambre	1.4	1.746						—	—	—	—
Échangeur	—	—	—	—	—	—	—	—	—		
Filtre	—	—	—	—	—	—	—	—	—		
Collecteur	1.5	1.746						—	—	—	—

TABLEAU F.3 – Pertes de charge, résultats.

	$P_i - P_{iE}$	$\rho V^2 / 2$	$P - P_E$
E			
I			
L			
N			
P			
Q			
R			
S			
T			
U			

TABLEAU F.4 – Pressions totale, dynamique et statique, résultats.