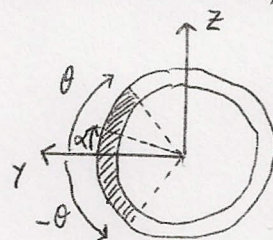


Question 1 : calcul des contraintes normales σ

- Calculer S , I_p , I_y , I_z , en fonction de e et de R , puis AN (m^2 ou cm^4)
- Calculer les contraintes normales en A_1 , A_2 , A_3 , A_4 (en MPa).

Question 2 : calcul des contraintes tangentielles τ

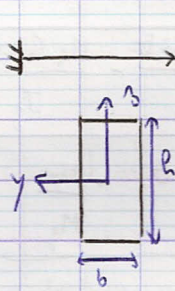
- Calculer les contraintes tangentielles dues à la torsion (MPa). Faire un schéma pour les représenter
- Calculer $p_z(\theta)$. AN en fonction de θ (en m^3). Calculer les contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant V_y , en A_1 , A_2 , A_3 , A_4 (MPa). Faire un schéma pour les représenter
- Calculer $\tau_{\text{torsion}} + \text{effort tranchant}$ en A_1 , A_2 , A_3 , A_4 . Faire un schéma pour les représenter



Question 3 : compléments

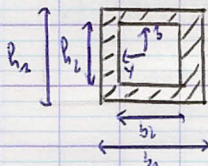
- Calculer les contraintes normales max et min, donner l'angle θ correspondant à σ_{max} , et celui correspondant à σ_{min} .
- Calculer la contrainte de von Mises $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ en A_1 , A_2 , A_3 , A_4 . La section est en acier de limite d'élasticité $f_y = 235 \text{ MPa}$. Résiste-t-elle aux efforts qui lui sont appliqués?

Calcul d'inerties

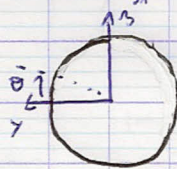


$$I_y = \int z^2 dS = \frac{bh^3}{12} \quad (\text{inertie de flexion})$$

$$I_z = \int y^2 dS = \frac{bh^3}{12}$$



$$I_y = \frac{b_1 h_1^3}{12} + \frac{b_2 h_2^3}{12}$$



$$I_z = \int y^2 dS$$

$$I_y = \int z^2 dS$$

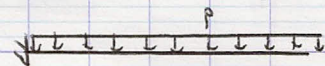
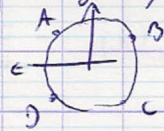
$$I_e = \int r^2 dS = \int (y^2 + z^2) dS = I_y + I_z \Rightarrow I_y = I_z = \frac{I_e}{2}$$

$$I_e = \int r^2 dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 r dr d\theta = \frac{\pi R^4}{2}$$

Calcul des contraintes normales

flexion déviée : charge $p \parallel Oz \rightarrow My$

ici: $My < 0$



A, B traction ($\sigma > 0$)

C, D compression

$$\sigma = + \frac{My z}{I_y} \quad (\text{car on a que de } My)$$

charge $p \parallel Oy \rightarrow M_z$

$$\sigma = - \frac{M_z y}{I_z}$$

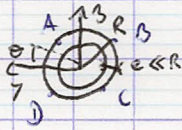
charge $p \parallel Ox \rightarrow$ effort normal

$$\sigma = N/S$$

Contrainte ca N, My, M_z

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{N}{S} + \frac{My z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z}$$

cas d'une section circulaire : $y = R \cos \theta$
et tubulaire $z = R \sin \theta$



$$\sigma_{x,y} = \frac{N}{S} + \frac{M_y R \sin \theta}{I_y} - \frac{M_z R \cos \theta}{I_z}$$

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 0 \Rightarrow \tan \theta = -\frac{M_y}{M_z}$$

θ correspondant à σ_{\max} et σ_{\min}

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{N}{S} \pm \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2} R}{I_{y,z}}$$

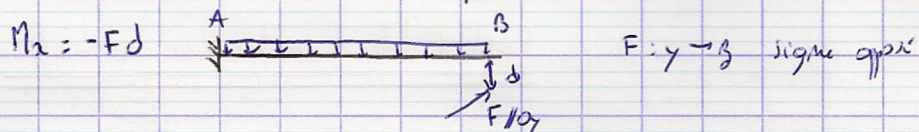
(σ en MPa)

Torsion

$$\tau_{\text{torsion}} = \frac{M_x r}{K}$$

↑
contrainte de cisaillement (en Pa)

← moment de torsion (en N.m)
← module de torsion (section circulaire $K = I_p$)



$$\tau_{\text{torsion}}(r) = \frac{-Fd r}{I_p} \quad I_p = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$\tau_{\text{torsion}}(R) = \frac{-Fd R L}{\pi R^4} = \frac{-2Fd}{\pi R^3}$$

Effort tranchant

$$\tau_{xy} = \frac{p_y(z) V_z}{I_y b(z)}$$

(en MPa)

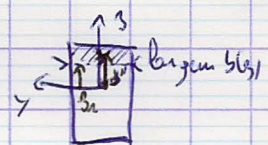
charge $p(z) \rightarrow V_z$

avec $p_y(z)$ moment statique (en m^3)

en A $V_z = +pL$

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

$b(z) = b$ ici



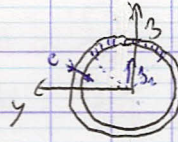
$$I_y = \int z^2 dS$$

$$\varphi_y(z) = \int z dS \text{ sur la partie la plus à l'extérieur : Arc la plus à l'extérieur \times bras de Lever d'}$$



τ effort tranchant

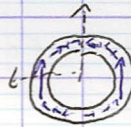
Cas d'une section circulaire



$$\varphi_y(z) = \int z dS \text{ zone la plus à l'extérieur}$$

$$Z(z) = \frac{\varphi_y(z) V_z}{I_y \cdot (2e)}$$

$$I_y \cdot (2e)$$

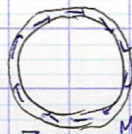


Z effort tranchant

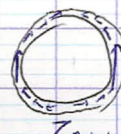
(il n'y a que le φ_y qui varie en fonction de z)



$$Z_{\text{tranchant}} = \frac{M_z R}{I_p}$$



$$Z_{\text{tranchant}} = \frac{M_z R}{I_p}$$



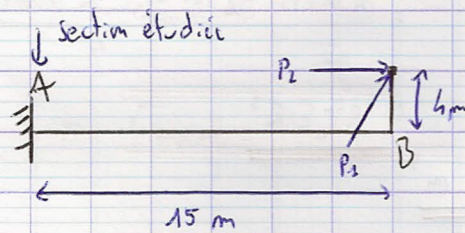
$$Z_{\text{effort tranchant}} = \frac{\varphi_y(z) V_z}{I_y \cdot (2e)}$$

($N > 0$ \Rightarrow compression)

($N < 0$ \Rightarrow traction)

DELEGRANGE Mathieu T₁

02/12/08

APPLICATION RESISTANCE DES MATERIAUX n° 5

$$P_1 \parallel O_y \quad P_1 = 600 \text{ kN}$$

$$P_2 \parallel O_x \quad P_2 = 700 \text{ kN}$$

(N) $-P_1 = -97 \text{ MN}$

(M_x) $P_1 \times h = 1,6 \text{ MN.m}$

(M_y) $-P_2 \times 15 \text{ m} = -2,8 \text{ MN.m}$
↑
bras de levier

(M_z) $-P_2 \times 15 \text{ m} = -6 \text{ MN.m}$

(V_y) $-P_1 = -0,4 \text{ MN}$

(V_z) 0

Question 1 calcul des contraintes normales σ

$$a) \quad S = \pi \left((R + e/2)^2 - (R - e/2)^2 \right)$$

$$S = \pi \left(R^2 + Re + e^2/4 - (R^2 - Re + e^2/4) \right)$$

$$S = 2\pi Re$$

$$\text{QM} \quad \underline{\underline{S = 0,1319 \text{ m}^2}}$$

$$I_e = \int e^2 dS = \int_{\rho=R-e}^{R+e} \int_0^{2\pi} \rho^3 d\theta d\rho = \frac{2\pi ((R+e)^4 - (R-e)^4)}{4} \quad \text{on néglige } e^2 \quad (\text{car } e \ll R)$$

$$= \frac{2\pi R^4}{4} + \frac{4R^3 e - R^4 + 4R^3 e}{4}$$

$$= \underline{\underline{2\pi e R^3}}$$

an $\underline{\underline{I_e = 0,0647 \text{ m}^4}}$

$$I_y = I_z = \frac{I_e}{2} = \underline{\underline{\pi e R^3}}$$

an $\underline{\underline{I_y = I_z = 0,0323 \text{ m}^4}}$

b)

	Y(m)	Z(m)	$\sigma \text{ (MPa)}$
A ₁	R = 0,07	0	124,62
A ₂	0	R = 0,07	-65,96
A ₃	-R = -0,07	0	-135,22
A ₄	0	-R = -0,07	55,32

$$\begin{aligned} \sigma_{A_1} &= \frac{N}{S} + \frac{M_{y(A_1)} z(A_1)}{I_y} - \frac{M_{z(A_1)} y(A_1)}{I_z} \\ &= \frac{-P_2}{2\pi R e} + \frac{-4P_2 \times 0}{\pi R^3 e} - \frac{-P_1 \times 15 \times R}{\pi R^3 e} \\ &= \frac{-P_2 R + 30 P_1}{2\pi R^2 e} \end{aligned}$$

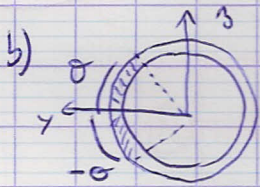
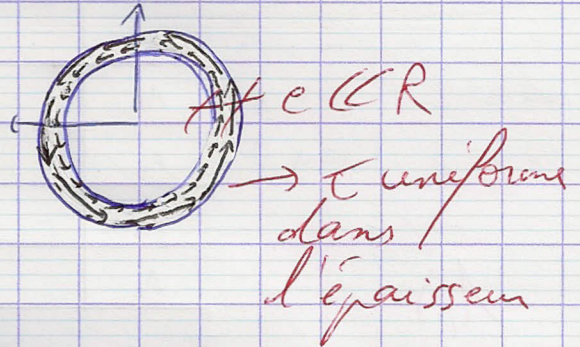
an $\sigma_{A_1} = 124,62 \text{ MPa}$

de même pour $\sigma_{A_2}, \sigma_{A_3}, \sigma_{A_4}$

Question 2 calcul des contraintes tangentielles τ

a) $\tau_{\max} = \frac{M_x R}{I_p}$

on $\tau_{\max} = 17,31 \text{ MPa}$



moment statique

$$I_3(\theta) = \int_{\text{ligne mediane}} y ds$$

$$I_3(\theta) = \int_{-\theta}^{\theta} \int_{R-e/2}^{R+e/2} \rho \cos \theta \rho d\rho d\theta$$

$$I_3(\theta) = \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{R-e/2}^{R+e/2} \left[\sin \theta \right]_{-\theta}^{\theta}$$

$$I_3(\theta) = \left(\frac{(R+e/2)^3 - (R-e/2)^3}{3} \right) (\sin \theta - \sin(-\theta))$$

$$I_3(\theta) = \left(\frac{R^3 + 3R^2 e/2 - R^3 + 3R^2 e/2}{3} \right) (2 \sin \theta)$$

$$\underline{I_3(\theta) = 2 R^2 e \sin \theta}$$

on $\underline{I_3(\theta) = 0,0294 \sin \theta \text{ m}^3}$

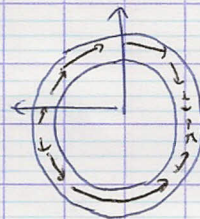
$\tau_{xy} = \frac{I_3(\theta) V_y}{I_z 2e}$ contraintes tangentielles dus à l'effet tranchant

on: en A_1 $\theta = 0 \Rightarrow \underline{\tau_{xy} = 0 \text{ MPa}}$

en A_2 $\theta = \pi/2 \Rightarrow \underline{\tau_{xy} = -6,07 \text{ MPa}}$

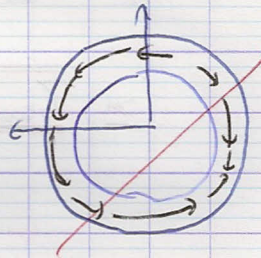
en A_3 $\theta = \pi \Rightarrow \underline{\tau_{xy} = 0 \text{ MPa}}$

en A_4 $\theta = 3\pi/2 \Rightarrow \underline{\tau_{xy} = 6,07 \text{ MPa}}$



c) $\sigma_{\text{torsion + effort tranchant}} = \sigma_{\text{torsion}} + \sigma_{\text{effort tranchant}}$

	$\sigma_{\text{torsion + effort tranchant}} \text{ (MPa)}$
A ₁	17,31
A ₂	11,25
A ₃	17,31
A ₄	23,38



Question 3 Compliments

a) $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \tan \theta = -\frac{M_y}{M_z} \Rightarrow \theta = \text{Arctan}\left(-\frac{M_y}{M_z}\right) \Rightarrow \theta = 335^\circ [180^\circ]$

$\sigma_{\text{max}} = \frac{N}{S} + \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{I_3} R = \underline{\underline{138,05 \text{ MPa}}}$ pour $\theta_{\text{max}} = 335^\circ$

$\sigma_{\text{min}} = \frac{N}{S} - \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{I_3} R = \underline{\underline{-148,67 \text{ MPa}}}$ pour $\theta_{\text{min}} = 155^\circ$

b)

	$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \text{ (MPa)}$
A ₁	128,16
A ₂	68,75
A ₃	138,51
A ₄	68,56

La section est en acier à limite d'élasticité $f_y = 235 \text{ MPa}$

On observe que toutes les contraintes de Von Mises sont inférieures à cette valeur limite \Rightarrow la section résiste aux efforts qui lui sont appliqués.