IUT RANGUEIL
3 420 127555 4

SCIENCES SUP

Exercices et problèmes résolus

Licences

PHYSIQUE
KANE / STERNHEIM

3e édition

Isabelle Derycke
Jean-Pol Vigneron

DUNOD

SCIENCES SUP



3e édition

Isabelle Derycke
Jean-Pol Vigneron

PHYSIQUE
KANE / STERNHEIM

Ce livre fournit aux étudiants de Licence, qui utilisent l'ouvrage de Kane et Sternheim, un recueil des solutions commentées des problèmes du livre (plus de 1000).

Une série de brefs rappels, au début de chaque chapitre, aide l'étudiant à situer l'information nécessaire à la résolution des questions posées. Les solutions traitées ne portent que sur les savoir-faire essentiels et sur les connaissances les plus proches de la matière étudiée. Un effort particulier est fait pour présenter des solutions à la fois concises et complètes, très proches du texte du cours.

Cet ensemble de solutions constitue un outil efficace pour un apprentissage autonome de l'usage des lois physiques développées dans le livre de cours.

ISABELLE DERYCKE
est docteur en physique, chargée des travaux dirigés de Licence (baccalauréat belge) en sciences aux facultés universitaires Notre-Dame de la Paix à Namur.

JEAN-POL VIGNERON
est professeur de physique aux facultés universitaires Notre-Dame de la Paix à Namur.

MATHÉMATIQUES
PHYSIQUE
CHIMIE
SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
INFORMATIQUE
SCIENCES DE LA VIE
SCIENCES DE LA TERRE



LICENCE 1 2 3 | MASTER 4 5 6 | DOCTORAT 7 8

6469183
ISBN 978-2-10-050398-8

www.dunod.com

DUNOD

530 KAN

PHYSIQUE
KANE/STERNHEIM

3e édition

Exercices et problèmes résolus

Isabelle Derycke
Facultés universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur

Jean-Pol Vigneron
Facultés universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur

Centre de Ressources
IUT Paul Sabatier
Documentaires Ranguell

DUNOD

Illustration de couverture : Digital Vision

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Interéditions, Paris, 1986
© Dunod, pour cette 3e édition, Paris, 2007
ISBN 978-2-10-050398-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Avant-Propos

Ce recueil de solutions accompagne la version française de la 3e édition du livre de physique de Kane et Sternheim. Il s'adresse exclusivement aux étudiants qui possèdent et utilisent déjà ce livre : guidés par le souci de réduire la longueur de l'ouvrage, nous avons choisi, d'une part, de ne pas reproduire le texte des énoncés et, d'autre part, de nous conformer scrupuleusement aux choix de ce manuel pour ce qui concerne la structure de l'exposé et l'ordonnancement des chapitres, sections et sous-sections. Nous avons également trouvé important de respecter au mieux les notations du texte de référence afin d'accentuer le lien entre nos schémas de résolution et les concepts introduits et discutés dans ce texte.

Ce solutionnaire est donc fait pour les étudiants qui souhaitent travailler avec plus d'autonomie la matière couverte par l'ouvrage de Kane et Sternheim. Ils trouveront ici des informations, des réponses, des voies de solution et des commentaires, pour la plupart des exercices et problèmes proposés dans le livre, y compris pour les questions qui concernent les compléments.

Un tel projet n'aurait pas abouti sans l'aide et les encouragements de nombreuses personnes. En particulier, nous devons des remerciements chaleureux aux co-auteurs de la version française du livre, Roger Evrard, Michel Delmelle et Jean Schmidt. Et puis, il y a surtout le travail considérable de l'équipe des assistants des Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix à Namur qui, suivant de près l'exposé de Kane et Sternheim, ont développé à partir de 1986 des séances de travaux dirigés de physique pour les sciences biologiques, pharmaceutiques et médicales. Ce recueil de solutions doit beaucoup à l'enthousiasme et à la compétence de Jean-Marc Themlin et Fabrizio Maseri.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Prologue

On n'enseigne pas la physique aux étudiants en sciences biologiques et médicales comme on le fait en s'adressant à de futurs chimistes, physiciens ou ingénieurs. Les lois de la nature sont évidemment les mêmes pour tous, mais le contexte dans lequel elles sont utiles impose dans chaque cas des priorités spécifiques. La structure du texte et le choix des questions examinées dans le livre "Physique" de Kane et Sternheim reflètent ces priorités pour le cas des études en sciences de la vie. Le développement important des chapitres de mécanique des fluides, d'acoustique et d'optique géométrique, par exemple, ou encore l'introduction d'un traitement physique de la conduction nerveuse et des effets biologiques des radiations ionisantes sont des choix dictés par la volonté de constituer une base solide pour la connaissance rationnelle du matériel vivant. Le texte de Kane et Sternheim, en recourant de manière systématique à des illustrations puisées dans les applications biologiques a, d'une certaine manière, profondément renouvelé l'exposé de la physique, trop longtemps assujettie aux seuls exemples tirés de la technologie.

Mais, au-delà de ces choix particuliers, une conséquence supplémentaire de l'orientation du texte vers les sciences appliquées est l'importance que prennent les exemples, questions, exercices et problèmes proposés par le livre. Contrairement à beaucoup d'ouvrages classiques d'inspiration française, ce texte se veut moins insistant sur l'origine axiomatique et les développements mathématisés des lois de la physique et met l'accent sur leur signification concrète en vue de leur utilisation pratique. Pour l'étudiant voué à la compréhension des mécanismes complexes qui interviennent dans les phénomènes naturels, il est important d'atteindre très rapidement une véritable connaissance opérationnelle de la physique. Dans un livre qui lui est destiné, les exercices et les problèmes font alors partie intégrante de la méthode pédagogique et les étudiants, en général, ne s'y trompent pas : ce sont les plus motivés d'entre eux qui ont appelé à l'écriture de ce recueil de solutions, exprimant le souhait d'atteindre une plus grande autonomie dans l'entraînement aux applications.

Mais le solutionnaire n'envisage pas de présenter une solution à tous les exercices du livre de Kane et Sternheim. Les rédacteurs ont voulu, en effet, distinguer les énoncés qui constituent une application plus ou moins directe des connaissances présentées par le manuel des problèmes qui font plus largement appel à la créativité des étudiants. On ne trouvera dans ce recueil que le traitement des applications les plus directes de la théorie, mais ceci représente tout de même près de trois quarts des énoncés. L'objectif de ce solutionnaire est d'abord de guider les étudiants dans un

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit

apprentissage plus personnel de l'usage des lois physiques et, dans cette perspective, les exercices traités ne portent que sur les savoir-faire essentiels et sur les travaux les plus proches de la matière exposée. Les énoncés des exercices et des problèmes qui laissent la place à une réflexion plus créative ne sont donc pas traités dans ce livre : leur analyse ne peut se concevoir sans l'expérience d'un enseignant. La liste de ces problèmes non résolus est dressée à la fin de l'ouvrage.

Les solutions sont toujours présentées d'une façon très concise, sans toutefois sacrifier la clarté. Les données numériques sont systématiquement présentées avec leur unité dans le système international, y compris dans l'écriture même des calculs : conserver constamment l'unité de mesure comme partie intégrante d'une donnée et combiner ces unités au moment où s'effectuent les évaluations permet de s'assurer de la cohérence dimensionnelle des formules manipulées. Par ailleurs, on remarquera qu'au début de chaque chapitre, quelques rappels permettent de situer rapidement les informations nécessaires à la résolution des exercices. Ces rappels sont l'occasion de revoir et de commenter brièvement les principales relations quantitatives utilisées dans les problèmes. De telles sections introductives présentent toujours des résultats très strictement sélectionnés. Ici, elles sont conçues pour guider l'étude vers les concepts les plus directement utilisables.

Les étudiants devraient trouver dans cet ouvrage les exemples et les méthodes qui leur permettent un apprentissage plus personnel et plus créatif du texte de Kane et Sternheim. Ce recueil de solutions est une invitation à s'investir dans une étude moins descriptive et plus opérationnelle de la physique : pour les étudiants en sciences biologiques ou médicales, la physique est une science étudiée d'abord pour son utilité.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Table des matières

AVANT-PROPOS III

PROLOGUE IV

CHAPITRE 1 • LE MOUVEMENT RECTILIGNE 1
Rappels 1
1.1 Mesures, étalons, unités et erreurs 2
1.2 Le déplacement ; la vitesse moyenne 3
1.3 La vitesse instantanée 5
1.4 L'accélération 6
1.5 Détermination du mouvement d'un objet 7
1.6 Accélération de la pesanteur et objets en chute libre 9
1.7 Le saut en hauteur 11
Solution des problèmes 13

CHAPITRE 2 • LE MOUVEMENT À DEUX DIMENSIONS 18
Rappels 18
2.1 Introduction aux vecteurs 19
2.2 La vitesse à deux dimensions 20
2.3 L'accélération à deux dimensions 21
2.4 Détermination du mouvement d'un objet ; les projectiles 22
2.5 Sauts horizontaux 25
Solution des problèmes 25

CHAPITRE 3 • LES LOIS DE NEWTON 31
Rappels 31
3.1 Forces, poids et masse gravitationnelle 32
3.2 La masse volumique 32
3.3 La première loi de Newton. L'équilibre 33
3.4 La troisième loi de Newton 34
3.5 La deuxième loi de Newton 35
3.6 Quelques exemples des lois de Newton 35
3.7 Les forces de gravitation 36
3.8 Le poids 36
3.9 Le poids effectif 37
3.10 Le frottement 38
Solution des problèmes 38

CHAPITRE 4 • LA STATIQUE 41
Rappels 41

4.1 Les moments de forces 41
4.2 Équilibre des corps solides 42
4.3 Le centre de gravité 42
4.4 Équilibre et stabilité 43
4.5 Les leviers, avantage mécanique 43
4.6 Les leviers du corps 43
4.7 Les mâchoires des animaux 43
4.8 Le centre de gravité des personnes 44
4.9 Systèmes de poulies 44
Solution des problèmes 45

CHAPITRE 5 • LE MOUVEMENT CIRCULAIRE 48
Rappels 48
5.1 L'accélération centripète 49
5.2 Exemples de mouvement circulaire 50
5.3 Variables angulaires 51
5.4 Moment, accélération angulaire et moment d'inertie 53
5.5 Charges électriques ; forces fondamentales 54
5.6 La loi de Coulomb 55
5.7 Satellites et marées 55
Solution des problèmes 56

CHAPITRE 6 • TRAVAIL, ÉNERGIE ET PUISSANCE 60
Rappels 60
6.1 Le travail 61
6.2 L'énergie cinétique 61
6.3 Énergie potentielle et forces conservatives 62
6.4 Les forces dissipatives 63
6.5 Principe de conservation 63
6.6 Énergie potentielle gravitationnelle 64
6.7 La puissance 65
6.8 Travail et énergie dans un mouvement de rotation 66
6.9 Les sauts ; les lois d'échelle en physiologie 66
6.10 La course à pied 67
Solution des problèmes 67

CHAPITRE 7 • QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET MOMENT CINÉTIQUE 73
Rappels 73
7.1 Impulsion et quantité de mouvement 74
7.2 Conservation de la quantité de mouvement 74
7.3 Mouvement du centre de masse 75
7.4 Collisions élastiques et inélastiques 75
7.5 Moment cinétique d'un corps solide 76
7.6 Moment cinétique d'une particule 77
7.7 La quantité de mouvement dans les exercices sportifs 77
7.8 Le gyroscope 78
Solution des problèmes 78

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

CHAPITRE 8 • PROPRIÉTÉS ÉLASTIQUES DES MATÉRIAUX 83
Rappels 83
8.1 Considérations générales sur les efforts et les déformations 84
8.2 Le module de Young 84
8.3 Résistance à la flexion 85
8.4 Résistance au flambage, éléments structurels de la nature 85
8.5 Cisaillement et torsion 86
8.6 Structure et fonction 86
Solution des problèmes 87

CHAPITRE 9 • LE MOUVEMENT RECTILIGNE 90
Rappels 90
9.1 Le mouvement harmonique simple : cas du système masse-ressort 91
9.2 Le mouvement oscillatoire d'une masse attachée à un ressort 91
9.3 Le pendule composé 92
9.4 L'énergie dans le mouvement harmonique simple 93
9.5 Oscillations amorties 94
9.6 Les effets vibratoires sur les personnes 94
Solution des problèmes 95

CHAPITRE 10 • LA TEMPÉRATURE ET LE COMPORTEMENT DES GAZ 99
Rappels 99
10.1 Échelles de température 100
10.2 Masses moléculaires 100
10.3 Pression 101
10.4 L'équation d'état des gaz parfaits 101
10.5 Mélanges de gaz 102
10.6 Températures et énergies moléculaires 102
10.7 Diffusion 103
10.8 Solutions diluées ; pression osmotique 103
Solution des problèmes 103

CHAPITRE 11 • THERMODYNAMIQUE 106
Rappels 106
11.1 Travail mécanique 107
11.2 Le premier principe de la thermodynamique 108
11.3 Le second principe de la thermodynamique 108
11.4 Le théorème de Carnot et la conversion de l'énergie 108
11.5 Conséquences du théorème de Carnot 109
11.6 Réfrigérateurs et pompes à chaleur 109
11.7 Métabolisme humain 110
Solution des problèmes 111

CHAPITRE 12 • PROPRIÉTÉS THERMIQUES DE LA MATIÈRE 115
Rappels 115
12.1 La dilatation thermique 117
12.2 Chaleur spécifique 117
12.3 Les changements de phase 118

12.4 La conduction de la chaleur 119
12.5 Transfert de chaleur par convection 119
12.6 Le rayonnement 120
Solution des problèmes 120

CHAPITRE 13 • LA MÉCANIQUE DES FLUIDES NON VISQUEUX 125
Rappels 125
13.1 Le principe d'Archimède 126
13.2 L'équation de continuité ; l'écoulement laminaire 126
13.3 Le théorème de Bernoulli 127
13.4 Conséquences statiques du théorème de Bernoulli 127
13.5 Le rôle de la gravitation dans la circulation sanguine 128
13.6 Mesure de la tension artérielle au sphygmomanomètre 129
13.7 Les débitmètres 129
13.8 Le vol des animaux et des avions 130
Solution des problèmes 130

CHAPITRE 14 • ÉCOULEMENT DES FLUIDES VISQUEUX 133
Rappels 133
14.1 Viscosité 134
14.2 Écoulement laminaire dans un tube, analyse dimensionnelle 135
14.3 Écoulement turbulent 136
14.4 L'écoulement du sang dans le système circulatoire 137
14.5 Forces de résistance visqueuse 137
14.6 Résistance des fluides à « haute vitesse » 138
14.7 Centrifugation 139
Solution des problèmes 140

CHAPITRE 15 • FORCES DE COHÉSION DANS LES LIQUIDES 144
Rappels 144
15.1 Tension superficielle 145
15.2 Angles de contact et capillarité 145
15.3 Les molécules tension-actives 146
15.4 Le cœur en tant que pompe 146
15.5 L'ascension de la sève dans les arbres ; pressions négatives 147
Solution des problèmes 147

CHAPITRE 16 • FORCES ÉLECTRIQUES, CHAMPS ET POTENTIELS 150
Rappels 150
16.1 Forces électriques 151
16.2 Le champ électrique, le champ électrique dû à des distributions de charges 152
16.3 Le potentiel électrique 153
16.4 Dipôles électriques 154
16.5 Capacité 155
16.6 Effets des diélectriques 155
16.7 Énergie emmagasinée dans un condensateur 156
Solution des problèmes 156

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

CHAPITRE 17 • COURANTS CONTINUS 159
Rappels 159
17.1 Courant électrique 160
17.2 La résistance 161
17.3 Sources d'énergie dans les circuits électriques 161
17.4 La puissance des circuits électriques 162
17.5 Résistances en série et en parallèle. Les règles de Kirchhoff 163
17.6 Voltmètres et ampèremètres 165
17.7 Circuits contenant une résistance et un condensateur 165
17.8 Sécurité électrique 166
17.8 Applications des mesures de résistance 166
Solution des problèmes 167

CHAPITRE 18 • CONDUCTION NERVEUSE 170
Rappels 170
18.1 La structure des cellules nerveuses 171
18.2 Résistance et capacité d'un axone 171
18.3 Concentrations ioniques et potentiel de repos 172
18.4 La réponse à des stimuli faibles 173
18.5 Le potentiel d'action 173
Solution des problèmes 174

CHAPITRE 19 • LE MAGNÉTISME 175
Rappels 175
19.1 Le champ magnétique 176
19.2 La force magnétique sur une charge en mouvement 176
19.3 La force magnétique sur un fil parcouru par un courant 178
19.4 Dipôles magnétiques 178
19.5 Champs magnétiques produits par des courants 179
19.6 La force entre deux fils parallèles parcourus par un courant 180
19.7 Spectromètre de masse 181
19.8 Cyclotrons 181
Solution des problèmes 182

CHAPITRE 20 • COURANTS ET CHAMPS INDUITS 185
Rappels 185
20.1 La loi de Faraday 187
20.2 Courants de Foucault 188
20.3 Générateurs électriques 188
20.4 Transformateurs 189
20.5 Les substances magnétiques 189
20.6 Self-induction (ou auto-induction) 189
20.7 Énergie accumulée dans une self 189
20.8 Circuits RL 190
20.9 Valeurs efficaces des tensions et des courants alternatifs 190

20.10 Réactance 191
20.11 Impédance 191
20.12 Puissance en courant alternatif 192
20.13 Adaptation d'impédance 193
Solution des problèmes 193

CHAPITRE 21 • LES ONDES 195
Rappels 195
21.1 Représentation d'un mouvement ondulatoire 197
21.2 La vitesse de propagation des ondes 197
21.3 Interférences 198
21.4 Les conditions aux limites 198
21.5 Ondes stationnaires résonnantes 199
21.6 Ondes complexes et battements 200
21.7 Énergie et quantité de mouvement transportées par les ondes. La polarisation des ondes transversales 200
21.8 L'effet Doppler 201
Solution des problèmes 202

CHAPITRE 22 • LES ONDES SONORES 206
Rappels 206
22.1 La nature physique et la vitesse de propagation du son 207
22.2 Ondes sonores stationnaires 208
22.3 L'intensité des ondes sonores 209
22.4 Les sources sonores. Les détecteurs sonores 210
22.5 La réponse auditive 210
22.6 Les ultrasons 211
Solution des problèmes 211

CHAPITRE 23 • PROPRIÉTÉS ONDULATOIRES DE LA LUMIÈRE 214
Rappels 214
23.1 L'indice de réfraction 215
23.2 La réflexion 216
23.3 La réfraction 216
23.4 La réflexion totale 217
23.5 Expérience des fentes de Young 217
23.6 La cohérence 218
23.7 Le réseau de diffraction 218
23.8 Le phénomène de diffraction 219
23.9 La polarisation de la lumière 220
23.10 Diffraction des rayons X et structure des molécules biologiques 221
23.11 L'holographie 221
23.12 Les effets d'interférence dans les films minces 221
Solution des problèmes 222

CHAPITRE 24 • MIROIRS, LENTILLES ET INSTRUMENTS D'OPTIQUE 225
Rappels 225
24.1 Les miroirs 226

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

24.2 Les lentilles 227
24.3 La formation de l'image 227
24.4 La puissance des lentilles ; les aberrations 228
24.5 La loupe 229
24.6 Le microscope optique 229
24.7 L'œil 230
24.8 L'appareil photographique 230
24.9 Résolution et contraste des microscopes 231
24.10 Les défauts optiques de l'œil 231
24.11 La perception des couleurs 232
Solution des problèmes 232

CHAPITRE 25 • LA RELATIVITÉ RESTREINTE 235
Rappels 235
25.1 Les principes fondamentaux de la relativité restreinte 236
25.2 Horloges en mouvement et dilatation du temps 236
25.3 Contraction des longueurs 237
25.4 Quantité de mouvement et énergie 237
25.5 Le problème des événements simultanés 239
25.6 L'addition des vitesses 239
Solution des problèmes 239

CHAPITRE 26 • PROPRIÉTÉS CORPUSCULAIRES DE LA LUMIÈRE : LE PHOTON 242
Rappels 242
26.1 L'effet photo-électrique 243
26.2 Le photon 244
26.3 Photons et vision 245
Solution des problèmes 246

CHAPITRE 27 • PROPRIÉTÉS ONDULATOIRES DE LA MATIÈRE 248
Rappels 248
27.1 Les échecs de la physique classique 249
27.2 L'hypothèse ondulatoire de De Broglie 249
27.3 L'atome de Bohr 251
27.4 Le principe d'incertitude 252
Solution des problèmes 252

CHAPITRE 28 • MÉCANIQUE QUANTIQUE ET STRUCTURE ATOMIQUE 255
Rappels 255
28.1 Les nombres quantiques de l'atome d'hydrogène 256
28.2 Structure atomique et tableau périodique 257
28.3 Émission atomique et spectres d'absorption 258
28.4 Masers et lasers 259
Solution des problèmes 259

CHAPITRE 29 • LA STRUCTURE ATOMIQUE DE LA MATIÈRE 261
Rappels 261
29.1 La liaison ionique 262

29.2 La liaison covalente 263
29.3 La liaison métallique 263
29.4 Isolants et semi-conducteurs 263
29.5 Les liaisons faibles 264
29.6 Le comportement d'un dipôle magnétique dans un champ magnétique 264
29.7 Mesure de la fréquence de précession 265
29.8 L'appareillage RMN 265
29.9 Le déplacement chimique 265
29.10 Le couplage spin-spin 266
Solution des problèmes 266

CHAPITRE 30 • PHYSIQUE NUCLÉAIRE 268
Rappels 268
30.1 La demi-vie 269
30.2 Datation en archéologie et en géologie 270
30.3 Les dimensions nucléaires 270
30.4 Protons et neutrons 271
30.5 Masses nucléaires et énergies de liaison 272
30.6 Les forces nucléaires 273
30.7 Niveaux d'énergie nucléaire et stabilité nucléaire 273
30.8 Les désintégrations radioactives 274
30.9 La fission nucléaire. Réacteurs et bombes à fission 274
30.10 La fusion nucléaire 275
Solution des problèmes 275

CHAPITRE 31 • RADIATIONS IONISANTES 278
Rappels 278
31.1 L'interaction des rayonnements avec la matière 279
31.2 Unités de dose de rayonnement 280
31.3 Effets nocifs des radiations. Exposition chronique aux radiations 282
31.4 Radiations en médecine 283
31.5 Autres applications des radiations 283
31.6 Détection et mesure des radiations 283
Solution des problèmes 284

NUMÉROS DES EXERCICES ET DES PROBLÈMES NON RÉSOLUS 287

CONSTANTES PHYSIQUES FONDAMENTALES 289

DONNÉES ASTRONOMIQUES 289

MASSES ATOMIQUES 291

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 1

Le mouvement rectiligne

RAPPELS

Les grandeurs mesurables s'expriment au moyen d'un nombre et d'une unité. Dans le système international, les longueurs sont évaluées en mètres et le temps en secondes, mais, dans la pratique, beaucoup d'autres unités dérivées sont également utilisées. Une expression telle que (24 h) signifie (24 fois une heure). 24 est un nombre sans dimension et le symbole h a les dimensions d'un temps : il représente 3600 s. Cette interprétation nous autorise à utiliser et à manipuler directement les symboles d'unité dans les formules et les calculs. Par exemple, partant de relations telles que 1 jour = 24 heures, 1 heure = 60 minutes, 1 minute = 60 secondes, on peut exprimer, en secondes, un intervalle de temps de 2 jours par de simples substitutions : 2 jours = 2 (1 jour) = 2 (24 h) = 2 (24) (60 min) = 2 (24) (60) (60 s) = 172800 s.

Pour les exercices de ce chapitre, les définitions suivantes, et quelques autres, nous permettront de nous familiariser avec les conversions d'unités : 1 pied = 0,3048 m ; 1 mile = $1{,}609 \times 10^3$ m ; 1 pouce = 2,54 cm ; 1 Å = 1×10^{-10} m.

Lorsqu'un mobile parcourt une distance Δx en un temps Δt, on dit qu'il se déplace à la vitesse moyenne de $v_{moy} = \Delta x / \Delta t$. Si dans le même temps Δt, sa vitesse change de Δv, on dit qu'il subit une accélération moyenne $a_{moy} = \Delta v / \Delta t$. La vitesse instantanée est la limite de la vitesse moyenne calculée sur un intervalle de temps qui tend vers zéro. Ceci donne la dérivée par rapport au temps de la position du mobile

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

Le même passage à la limite fournit l'accélération instantanée égale à la dérivée seconde par rapport au temps de l'espace parcouru

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Certains mouvements ont une importance spéciale du fait de leur occurence particulièrement fréquente. Dans un mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA), la loi des espaces prend la forme suivante :

$$x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$$

et la loi des vitesses s'exprime par :

$$v(t) = v_0 + a (t - t_0)$$

Dans ces expressions, t_0 est l'instant initial, x_0 et v_0 sont respectivement la position et la vitesse du mobile à l'instant t_0 et a est l'accélération constante. Souvent on fixera l'origine du temps pour que $t_0 = 0$. Pour les corps en chute libre, le mouvement vertical suit les lois du MRUA avec une accélération $a = -g$ ($g = 9{,}8$ m s^{-2}).

SOLUTION DES EXERCICES

1.1 MESURES, ÉTALONS, UNITÉS ET ERREURS

1 1 acre = 43560 pied^2 = (43560) (0,3048 m^2) = 4,047 $\times$ 10^3 m^2.

2 40 mi h^{-1} = (40) (1,609 $\times$ 10^3 m) (3600 s)$^{-1}$ = 179 m s^{-1}.

3 1 gallon = (231) (2,54 cm)^3 = 3,79 $\times$ 10^3 cm^3 = 3,79 dm^3 = 3,79 l.

4 1 furlong = (220) (0,914 m) = 201,08 m. La distance parcourue est ici :
(2 m h^{-1}) (15 jours) (24 h jour^{-1}) = 720 m = (720 m) (201,08 m furlong^{-1})$^{-1}$
= 3,6 furlongs.

5 (a) Epaisseur = (70) (1 $\times$ 10^{-10} m) = 7,0 $\times$ 10^{-9} m.
(b) Epaisseur = (7,0 $\times$ 10^{-9}) (1 $\times$ 10^6 µm) = 7,0 $\times$ 10^{-3} µm.

6 (a) Oui, par exemple l'espace parcouru par un mobile est le produit de sa vitesse moyenne par le temps que dure le déplacement. (b) Non. Si la somme de deux longueurs peut prendre un sens physique, la somme d'une longueur et d'un temps n'en aura jamais. La même remarque vaut pour la somme de deux grandeurs ayant les mêmes dimensions lorsqu'elles sont exprimées dans des unités différentes.

On ne peut pas ajouter une vitesse exprimée en m s^{-1} à une vitesse exprimée en km h^{-1} sans ramener d'abord les deux grandeurs à la même unité.

7 La superficie est égale à :

$$100 \text{ acres} = (100)\ (43560 \text{ pieds}^2) = (100)\ (43560)\ (0{,}3048 \text{ m})^2$$
$$= (100)\ (43560)\ (0{,}3048)^2\ (1 \times 10^{-4} \text{ ha}) = 40{,}5 \text{ ha}.$$

8 (a) Volume = (100 acres) (20 pieds) = 20 x 102 acres pieds.
(b) Volume = (100) (43560 pieds^2) (20 pieds) = 87×10^6 pieds^3.
(c) Volume = (87×10^6) $(0{,}3048 \text{ m})^3 = 2{,}5 \times 10^6$ m^3.

9 Accidentelles : placement approximatif de l'extrémité origine du mètre ruban, mauvaise appréciation de la marque de mesure sur l'échelle imprimée, tension aléatoire donnée au mètre ruban. Systématiques : calibrage incorrect du ruban, raccourci ou allongé après sa fabrication; le mètre est trop ou trop peu tendu.

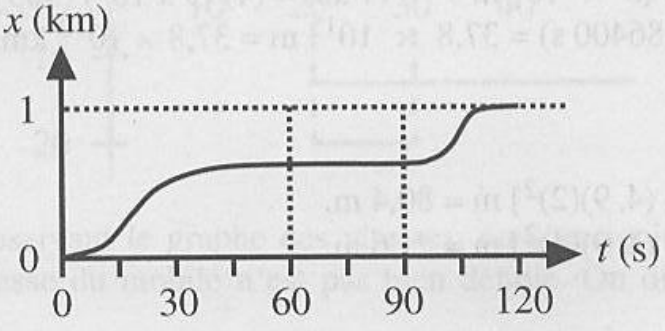
10 Accidentelles : le chronomètre est déclenché trop tôt ou trop tard, du fait d'une difficulté d'appréciation du moment du passage de la borne; erreur de lecture du chronomètre; imprécision du positionnement des bornes lors de leur implantation; présence de virages sur le parcours. Systématiques : erreur sur la distance entre deux bornes, induite par les défauts de construction de la roulette qui a servi à mesurer les distances le long de la route lors de l'implantation des bornes : usure de la roue, glissement sur le revêtement de la route.

1.2 LE DÉPLACEMENT ; LA VITESSE MOYENNE

11 Vitesse moyenne = (30 km)/(0,75 h) = 40 km h^{-1}.

12 Vitesse moyenne = (2000 km)/(4 h) = (2000/4) (1000 m)/(3600 s) = 139 m s^{-1}.

13 Par exemple,



© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Partant du repos, la voiture couvre près des deux tiers du kilomètre puis marque 30 secondes d'arrêt (entre 60 s et 90 s). Elle redémarre ensuite et arrive à destination après un voyage de deux minutes.

---

14 (a) Distance parcourue = (40 km h^{-1}) (1 h) + (60 km h^{-1}) (2 h) = 160 km.
(b) Vitesse moyenne = (160 km) / (3 h) = 53 km h^{-1}

---

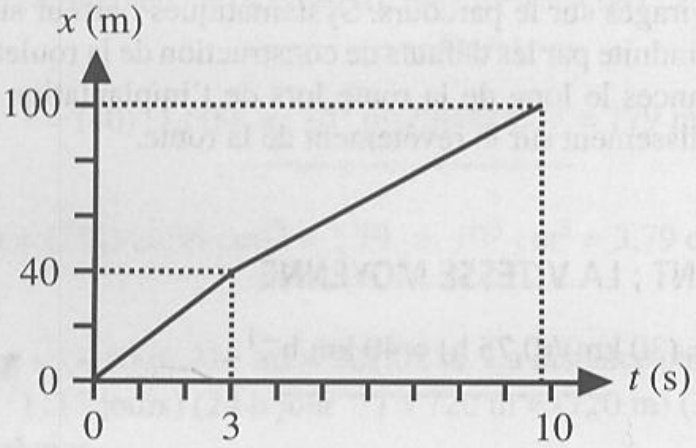
15 Pendant la première heure et demie, elle parcourt une distance x_1 donnée par x_1 = (40 km h^{-1}) (1,5 h) = 60 km; il lui reste donc (100 - x_1) km, c'est-à-dire 40 km, à effectuer à la vitesse moyenne v_2 pendant une demi-heure. La vitesse requise est v_2 = 80 km h^{-1}.

---

16 (a) Vitesse moyenne = (42 km)/(2,5 h) = 16,8 km h^{-1}.
(b) Vitesse moyenne = [(42 km/(2,5 h)] = (42/2,5)(1000 m)/(3600 s)
= 4,67 m s^{-1}.

---

17 (a) Vitesse moyenne = (100 m) / (9,83 s) = 10,2 m s^{-1}. (b) On doit admettre que le sprinter, partant du repos, passe par une vitesse maximale plus élevée que la vitesse moyenne.



---

18 4 années-lumière = (4) (3 × 10^8 m s^{-1}) (1 an) = (4) (3 x 10^8) (365 jours)
= (4) (3 × 10^8) (365) (86400 s) = 37,8 × 10^{15} m = 37,8 × 10^{12} km.

---

19 En t = 0 s: x = 100 m.
En t = 2 s : x = [100 – (4, 9)$(2)^2$] m = 80,4 m.
En t = 4 s : x = [100 – (4, 9)$(4)^2$] m = 21,6 m.

(a) Entre $t = 0$ s et $t = 2$ s, $v = (80,4 - 100)$ m/[(2 – 0) s] = -9,8 m s^{-1}.
(b) Entre $t = 2$ s et $t = 4$ s, $v = (21,6 - 80,4)$ m/[(4 – 2) s] = -29,4 m s^{-1}.

---

20 En $t = 0$ s: $x = 0$ m.
En $t = 2$ s : $x = [(19,6)(2) - (4,9)(2)^2)$ m = 19,6 m.
En $t = 4$ s : $x = [(19,6)(4) - (4,9)(4)^2]$ m = 0 m.
(a) Entre $t = 0$ s et $t = 2$ s, $v = (19,6 - 0)$ m/[(2 – 0) s] = 9,8 m s^{-1}.
(b)Entre $t = 2$ s et $t = 4$ s, $v = (0 - 19,6)$ m/[(4 – 2) s]= -9,8 m s^{-1}.

---

21 En $t = 0$ s : $x = 0$ m.
En $t = 10$ s : $x = 100$ m.
En $t = 20$ s : $x = 100$ m.
En $t = 40$ s : $x = 0$ m.
(a) Entre $t = 0$ s et $t = 10$ s, $v = (100 - 0)$ m/[(10 – 0) s] = 10 m s^{-1}.
(b) Entre $t = 0$ s et $t = 20$ s, $v = (100 - 0)$ m/[(20 – 0) s] = 5 m s^{-1}.
(c) Entre $t = 0$ s et $t = 40$ s, $v = (0 - 0)$ m/[(40 – 0) s] = 0 m s^{-1}.

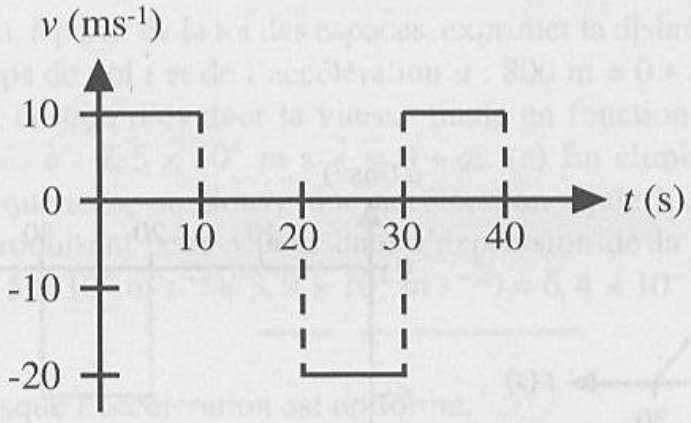
---

22 Vitesse moyenne = (100 m)/(51,9 s) = [(100) (0,001 km)]/[(51,9) (1/3600) h] = 6,94 km h^{-1}.

1.3 LA VITESSE INSTANTANÉE

23 (a) En t = 5 s : v = (50 m)/(5 s) = 10 m s^{-1} (pente du segment de droite).
(b) En t = 15 s : v = 0 m s^{-1} (pas de mouvement entre 10 et 20 s).
(c) En t = 25 s : v = - 20 m s^{-1} (changement du sens du mouvement).
(d) En t = 35 s : v = 10 m s^{-1} (même pente qu'en (a)).

24



En observant le graphe des vitesses, on s'aperçoit qu'en t = 10, 20 et 30 s, la vitesse du mobile n'est pas bien définie. On dit en mathématiques que la

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

vitesse n'est pas continue, parce qu'à ces instants, les dérivées à gauche et à droite calculées sur la trajectoire ne sont pas égales. En effet, la vitesse y saute brusquement d'une valeur à une autre, ce qui suppose une accélération infinie, impossible à réaliser dans notre monde physique. L'exercice suivant présente un exemple plus réaliste de mouvement où la vitesse est continue à chaque instant.

25 Si on observe l'évolution de la pente de la tangente à la courbe représentant la position du mobile en fonction du temps, on constate que (a) v s'annule lorsque $t = T/4, 3T/4$. (b) u est positive pour $0 < t < T/4, 3T/4 < t < T$, lorsque la pente de la tangente est positive. (c) Elle est négative pour $T/4 < t < 3T/4$, lorsque la pente de la tangente est négative.

26 La vitesse atteint sa valeur maximale positive en $t = 0$ et en $t = T$; elle atteint sa vitesse maximale négative en $t = T/2$, là où la pente de la tangente est maximale.

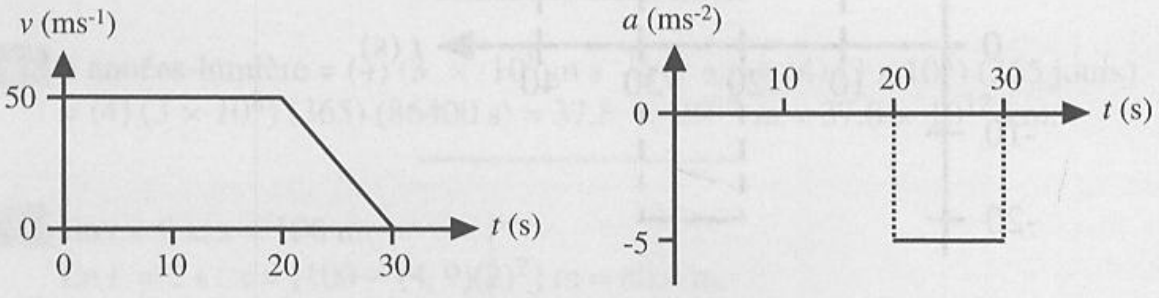
27 (a) Vitesse moyenne = (33,8 km)/(21,75 h) = 1,55 km h^{-1}.
(b) Vitesse moyenne = (60 km)/(21,75 h) = 2,8 km h^{-1}.

28 Vitesse moyenne = (100 m)/(9,9 s) = 10,1 m s^{-1}. Puisque le nageur part du repos, la vitesse moyenne doit être inférieure à la vitesse maximale; les deux valeurs sont donc compatibles.

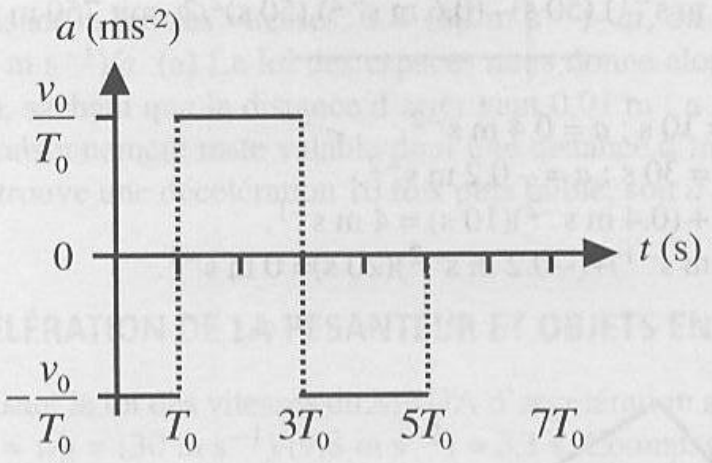
1.4 L'ACCÉLÉRATION

29 Accélération moyenne = (50 km h^{-1})/(4 s) = [(50)/(4 s)) (1000 m)/(3600 s) = 3,47 m s^{-2}.

30



31



32 (a) L'accélération est constante en chaque période où la vitesse est représentée par un segment de droite; elle est maximale (et positive) entre T_0 et $3T_0$. (b) L'accélération a la même valeur pendant les deux périodes où elle décroît, c'est-à-dire entre 0 et T_0 et entre $3T_0$ et $5T_0$. (c) L'accélération est nulle lorsque la vitesse reste constante; ceci reste vrai pour tout temps supérieur à $5T_0$.

33 L'accélération valant $a = -2\ \text{m s}^{-2} = (0 - 20)\ \text{m s}^{-1}/\Delta t$, le temps nécessaire est $\Delta t = 10\ \text{s}$.

1.5 DÉTERMINATION DU MOUVEMENT D'UN OBJET

34 (a) La loi des espaces nous donne la distance parcourue après 5 s :

$$\Delta x = (4\ \text{m s}^{-2})\ (5\ \text{s})^2/2 = 50\ \text{m}.$$

(b) La loi des vitesses nous donne $v = (4\ \text{m s}^{-2})(5\ \text{s}) = 20\ \text{m s}^{-1}$.

35 On peut, à partir de la loi des espaces, exprimer la distance parcourue en fonction du temps de vol t et de l'accélération a : $800\ \text{m} = 0 + at^2/2$. La loi des vitesses permet ensuite d'évaluer la vitesse finale en fonction de t et de l'accélération cherchée a : $2,5 \times 10^8\ \text{m s}^{-1} = 0 + at$. (a) En éliminant le temps t entre les deux équations, on trouve une accélération égale à $a = 3,9 \times 10^{13}\ \text{m s}^{-2}$. (b) Introduisant cette valeur dans l'expression de la vitesse finale, on trouve $t = (2,5 \times 10^8\ \text{m s}^{-1})/(3,9 \times 10^1\ \text{m s}^{-2}) = 6,4 \times 10^{-6}\ \text{s}$.

36 (a) Puisque l'accélération est uniforme,

$$a = (0 - 30)\ \text{m s}^{-1}/(50 - 0)\ \text{s} = -0,6\ \text{m s}^{-2}$$

(le signe moins indique une décélération).

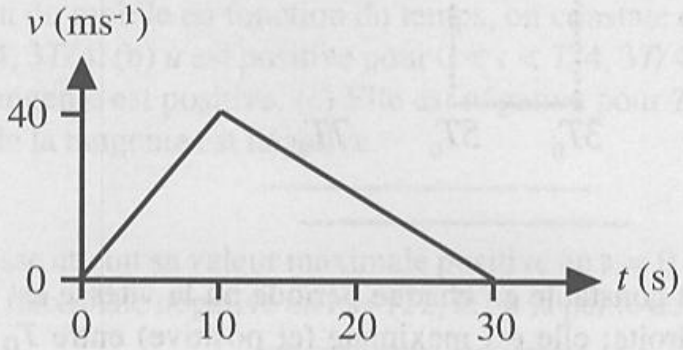
© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(b) Par la loi du mouvement, on trouve :

$$\Delta x = (30 \text{ m s}^{-1})\,(50 \text{ s}) - (0{,}6 \text{ m s}^{-2})\,(50 \text{ s})^2/2, \text{ soit } 750 \text{ m}.$$

---

37 Entre $t = 0$ s et $t = 10$ s : $a = 0.4 \text{ m s}^{-2}$.
Entre $t = 10$ s et $t = 30$ s : $a = -0.2 \text{ m s}^{-2}$.
(a) $v(t = 10 \text{ s}) = 0 + (0.4 \text{ m s}^{-2})(10 \text{ s}) = 4 \text{ m s}^{-1}$.
(b) $v(t = 30 \text{ s}) = (4 \text{ m s}^{-1}) + (-0.2 \text{ m s}^{-2})(20 \text{ s}) = 0 \text{ m s}^{-1}$.



---

39 Traitons le problème en deux étapes : 1) il faut que la voiture, partant du repos, atteigne une vitesse de 20 m s^{-1} ; 2) il faut que la distance entre cette voiture et les autres, dans la file, représente au moins 25 m. 1) Le moment où la vitesse atteint la valeur 20 m s^{-1} se déduit de la loi des vitesses $v = at$ qui devient : $20 \text{ m s}^{-1} = (1 \text{ m s}^{-2})\,t$, ce qui donne $t = 20$ s. A ce moment, l'espace parcouru vaut : $x = at^2/2 = (1 \text{ m s}^{-2})\,(20 \text{ s})^2/2 = 200$ m. 2) L'espace nécessaire à son insertion dans la file doit être $(200 + 25)$ m $= 225$ m.

---

40 (a) La loi des vitesses lie le temps t à la décélération a : $t = (15 \text{ m s}^{-1})/a$. La loi des espaces, $1 \text{ m} = v_0 t - a(\Delta t)^2/2 = v_0^2/(2a) = (15 \text{ m s}^{-1})^2/(2\,a)$, nous donne alors la valeur de cette décélération : $a = 112{,}5 \text{ m s}^{-2}$. (b) Le même raisonnement vaut pour une décélération sur une distance 100 fois plus faible; on trouve que la décélération est alors 100 fois plus grande et vaut $a = 11250 \text{ m s}^{-2}$.

---

41 On peut, à partir de la loi des espaces, exprimer la distance parcourue en fonction du temps t et de l'accélération a : $500 \text{ m} = 0 + at^2/2$. La loi des vitesses permet ensuite d'évaluer la vitesse finale en fonction de t et de l'accélération cherchée a : $100 \text{ m s}^{-1} = 0 + at$. (a) En éliminant le temps t entre les deux équations, on trouve une accélération égale à $a = 10 \text{ m s}^{-2}$. (b) Cette valeur étant introduite dans l'expression de la vitesse finale, on trouve :

$$t = (100 \text{ m s}^{-1})/(10 \text{ m s}^{-2}) = 10 \text{ s}.$$

---

43 En utilisant la loi des vitesses, $0 = (30\ \text{m s}^{-1}) - at$, on trouve l'expression de $t = (30\ \text{m s}^{-1})/a$. (a) La loi des espaces nous donne alors la valeur de la décélération, sachant que la distance d'arrêt vaut 0,01 m : $a = 45000\ \text{m s}^{-2}$. (b) Le même raisonnement reste valable pour une distance d'immobilisation de 0,1 m et l'on trouve une décélération 10 fois plus faible, soit $a = 4500\ \text{m s}^{-2}$.

1.6 ACCÉLÉRATION DE LA PESANTEUR ET OBJETS EN CHUTE LIBRE

44 En utilisant la loi des vitesses du MRUA d'accélération g, on trouve la valeur de Δt : $\Delta t = v/g = (30\ \text{m s}^{-1})/(9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 3{,}1$ s. Connaissant ce temps, la loi des espaces nous donne la hauteur demandée :

$$x = (x_{final} - x_{initial}) = (0 - h) = -g(\Delta t)^2/2,$$

ce qui donne immédiatement $h = (9,8\ \text{m s}^{-2})\ (3{,}1\ \text{s})^2/2 = 47$ m.

---

45 (a) (b) La hauteur maximale est atteinte lorsque la vitesse, initialement dirigée vers le haut, s'annule avant de changer de sens. La loi des vitesses nous donne donc $\Delta t = v_0/g = (500\ \text{m s}^{-1})/(9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 51$ s. Cette valeur du temps nous permet d'évaluer l'altitude maximale atteinte par l'obus :

$$\Delta x = (h_{max} - 0)\ \text{m} = v_0\,\Delta t - g(\Delta t)^2/2$$
$$= (500\ \text{m s}^{-1})\ (51\ \text{s}) - (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (51\ \text{s})^2/2 = 12755\ \text{m}.$$

(c) On obtient ce temps en utilisant la loi des espaces; après simplification de l'expression, on obtient $(\Delta t)^2 - (100\ \text{m s}^{-1})\ \Delta t + (200\ \text{m}) = 0$. Cette équation est une équation du second degré permettant de déterminer Δt : les deux solutions possibles sont $\Delta t = 2{,}04$ s et $\Delta t = 97{,}9$ s, deux temps qui correspondent aux passages de l'obus à la hauteur de 1000 m pendant son ascension et sa descente vers le sol.

---

46 (a) La hauteur atteinte par la fusée lorsque le moteur s'arrête s'obtient par la loi des espaces : $h = at_1^2/2 = (50\ \text{m s}^{-2})\ (4\ \text{s})^2/2 = 400$ m. (b) La hauteur maximale atteinte s'obtient en additionnant à la hauteur précédente la distance parcourue par la fusée, moteur arrêté. Pour cette seconde phase, sa vitesse initiale est la vitesse finale de la première phase, c'est-à-dire :

$$v = at_1 = (50\ \text{m s}^{-2})\ (4\ \text{s}) = 200\ \text{m s}^{-1}.$$

A l'altitude maximale, la vitesse de la fusée s'annule; le temps qu'elle met pour atteindre cette position est donné par :

$$t_2 = v/g = (200\ \text{m s}^{-1})/(9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 20{,}4\ \text{s}.$$

Après t_2 , la position de la fusée est donnée par :

$$h_{max} = h + vt_2 - gt_2^2/2$$
$$= (400\ \text{m}) + (200\ \text{m s}^{-1})\ (20{,}4\ \text{s}) - (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (20{,}4\ \text{s})^2/2 = 2441\ \text{m}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(c) La durée de retombée s'obtient par :

$$t_3 = \sqrt{2gh_{max}} = [2\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (2441\ \text{m})]^{1/2} = 22{,}3\ \text{s}.$$

La durée du vol est donné par $t_1 + t_2 + t_3 = 46{,}7$ s.

---

47 (a) La vitesse moyenne vaut :

$$\Delta x/\Delta t = (g(\Delta t)^2/2)/\Delta t = g\,\Delta t/2 = (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (3\ \text{s})/2 = 14{,}7\ \text{m s}^{-1}.$$

(b) La vitesse instantanée est égale à 14,7 m s^{-1} quand :

$$t = v/g = (14,7\ \text{m s}^{-1})/(9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 1{,}5\ \text{s}.$$

(c) La pierre atteint le sol quand $0 = y_0 - gt^2/2$ c'est-à-dire quand :

$$t = \sqrt{2y_0/g} = [2\ (60\ \text{m})/(9{,}8\ \text{m s}^{-2})]^{1/2} = 3{,}5\ \text{s}.$$

---

48 (a) (b) Le temps est déterminé par la loi des vitesses :

$$t = v_0/g = (15\ \text{m s}^{-1})/\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 1{,}5\ \text{s},$$

tandis que la hauteur atteinte à cet instant est donnée par la loi des espaces :

$$h_{max} = v_0t - gt^2/2 = (15\ \text{m s}^{-1})\ (1{,}5\ \text{s}) - (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (1{,}5\ \text{s})^2/2 = 11{,}5\ \text{m}.$$

(c) La balle atteint une hauteur $y = 6$ m aux temps t donnés par la loi des espaces $gt^2/2 - v_0t + y = 0$; on trouve $t = 0,47$ s et $t = 2{,}58$ s.

---

49 (a) La vitesse finale est donnée par la loi des vitesses :

$$v = -\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (4\ \text{s}) = -\ 39{,}2\ \text{m s}^{-1}.$$

(b) La hauteur de la tour est, elle, donnée par la loi des espaces :

$$y_0 = gt^2/2 = (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (4\ \text{s})^2/2 = 78{,}4\ \text{m}.$$

---

51 (a) Si le ballon est immobile ($v_0 = 0$ m s^{-1}), la hauteur initiale du sac de sable est donnée par $y_0 = gt^2/2 = (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (15\ \text{s})^2/2 = 4410$ m. (b) Si le ballon descend ($v_0 = -20$ m s^{-1}), la hauteur du sac au moment où il est lâché en tient compte sous la forme :

$$y_0 = v_0t + gt^2/2 = (20\ \text{m s}^{-1})\ (15\ \text{s}) + (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (15\ \text{s})^2/2 = 1402\ \text{m}.$$

---

52 (a) La hauteur maximale est atteinte lorsque la vitesse de la boîte s'annule; le temps nécessaire pour parvenir à cette hauteur est donné par :

$$t = (2\ \text{m s}^{-1})/(9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 0{,}204\ \text{s}.$$

(b) La position initiale est donnée par la loi des espaces :

$$y_0 = -v_0t + gt^2/2 = -(2\ \text{m s}^{-1})\ (3\ \text{s}) + (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (3\ \text{s})^2/2 = 38{,}1\ \text{m}.$$

(c) L'ascenseur poursuit son mouvement ascensionnel à vitesse constante; sa position après 0,204 s est donnée par :

$$y = y_0 + v_0t = (38{,}1\ \text{m}) + (2\ \text{m s}^{-1})\ (0{,}204\ \text{s}) = 38{,}5\ \text{m}.$$

---

53 Orientons l'axe des x vers le bas et prenons comme origine la position initiale de l'objet; le sol est donc à la position $x = 84$ m. Dans ces conditions, l'accélération de la pesanteur est une grandeur positive puisqu'elle est dirigée suivant l'axe des x croissants. (a) Dans ce cas, la position et la vitesse initiales étant nulles, la chute dure : $[2\ (84\ \text{m})/(9{,}8\ \text{m s}^{-2})]^{1/2} = 4{,}14$ s. (b) La vitesse au sol est donnée par $v = (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (4{,}14\ \text{s}) = 40{,}6\ \text{m s}^{-1}$.

---

54 En orientant l'axe des x vers le bas, la vitesse initiale de l'objet est ici une grandeur négative ($v_0 = -19{,}6\ \text{m s}^{-1}$). Prenons à nouveau l'hypothèse que la position initiale x_0 est nulle et que le sol est à 58,8 m. (a) (b) La hauteur maximale est atteinte lorsque la vitesse de l'objet s'annule; ce temps est déduit de $v = 0\ \text{m s}^{-1} = (-19{,}6\ \text{m s}^{-1}) + (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ t$, soit $t = 2$ s. La position de l'objet après ces 2 s est évaluée par :

$$y = (-19{,}6\ \text{m s}^{-1})\ (2\ \text{s}) + (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (2\ \text{s})^2/2 = -19{,}6\ \text{m}.$$

(c) Pour calculer le temps mis par l'objet pour atteindre le sol, il faut résoudre l'équation du second degré en t : $y = v_0 t + gt^2/2$ soit, après simplifications,

$$t^2 - (4\ \text{m s}^{-1})\ t - (12\ \text{m}) = 0\ ;$$

cette équation a deux solutions : $t = 6$ s et $t = -2$ s; cette dernière possibilité est inacceptable puisque la balle ne peut pas retomber au sol avant d'être partie...

---

55 Nous supposons que « subir les mêmes dommages » signifie atteindre la même vitesse. Pour avoir une vitesse de $30\ \text{m s}^{-1}$ au niveau $y = 0$ m en partant du repos, il faut un temps donné par $t = (30\ \text{m s}^{-1})/(9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 3{,}1$ s. La hauteur initiale est alors donnée par $y_0 = gt^2/2 = (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (3{,}1\ \text{s})^2/2 = 45{,}9$ m.

1.7 LE SAUT EN HAUTEUR

56 (a) La vitesse du saumon s'annule quand il atteint sa hauteur maximale; le temps nécessaire pour atteindre cette hauteur est donné par :

$$t = v_0/g = (6\ \text{m s}^{-1})/(9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 0{,}612\ \text{s}.$$

Sa hauteur à cet instant se calcule par :

$$y = v_0 t - gt^2/2 = (6\ \text{m s}^{-1})\ (0{,}612\ \text{s}) - (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{,}612\ \text{s})^2/2 = 1{,}84\ \text{m}.$$

(b) Le temps mis par le saumon pour retomber dans l'eau est le même que celui qui est requis pour atteindre sa hauteur maximale; le temps que le saumon passe hors de l'eau est donc égal à $t = 2\ (0{,}612\ \text{s}) = 1{,}224$ s.

---

57 Recherchons d'abord la vitesse initiale de la puce lors de son saut vertical. Si l'on décompose le saut en une étape d'élan (vitesse initiale nulle) suivie d'une phase aérienne (vitesse initiale = vitesse finale de l'élan), nous pouvons déduire

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

la vitesse initiale de la puce à partir de la valeur de la hauteur verticale atteinte ; $v = \sqrt{2gh} = [2\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{,}1\ \text{m})]^{1/2} = 1{,}4\ \text{m s}^{-1}$. Nous pouvons à présent calculer la hauteur atteinte par une athlète lors d'un saut : le temps nécessaire pour atteindre sa hauteur maximale est donné par :

$$t = v/g = (1{,}4\ \text{m s}^{-1})/(9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 0{,}143\ \text{s} ;$$

sa position à cet instant est évaluée au moyen de :

$$y = vt - gt^2/2 = (1{,}4\ \text{m s}^{-1})\ (0{,}143\ \text{s}) - (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{,}143\ \text{s})^2/2 = 0{,}1\ \text{m}.$$

---

58 Analysons en détails les deux phases d'un saut. Dans la phase d'élan, l'accélération est contrôlée par l'effort du sauteur : la hauteur atteinte après une poussée appliquée pendant un temps t_1 vaut $d = at_1^2/2$ et la vitesse vaut, à ce moment, $v_1 = at_1$. Dans la phase aérienne, la vitesse évolue suivant la loi $v_1 - gt^2$. Le temps t_2 est compté ici à partir du moment où la sauterelle quitte le sol avec la vitesse v_1. La hauteur maximale est atteinte lorsque la vitesse verticale s'annule, soit en $t_2 = v_1/g$. La loi des espaces, celle d'un mouvement libre avec vitesse initiale dans le champ de pesanteur, donne la hauteur atteinte à ce moment : $h = v_1 t_2 - gt_2^2/2$. Cette équation lie la hauteur h atteinte à la vitesse v_1 au décollage. A partir de la valeur donnée dans le tableau 1.4, on peut déduire la vitesse de décollage de la sauterelle :

$$v_1 = [2\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{,}3\ \text{m})]^{1/2} = 2{,}42\ \text{m s}^{-1}.$$

La loi du mouvement donne alors l'accélération :

$$a = (2{,}42\ \text{m s}^{-1})^2/[(2)\ (0{,}03\ \text{m})] = 98\ \text{m s}^{-2}.$$

---

59 La vitesse à la hauteur maximale s'annule ; le temps pour y parvenir est donné par $t = v_0/g$; la hauteur du saut se calculera alors par la formule $h = v_0^2/(2g)$. On suppose que les vitesses initiales, sur la Terre et sur Mars, sont identiques. En comparant les hauteurs atteintes sur Terre h_T et sur Mars h_M, on trouve le rapport $h_T/h_M = g_M/g_T = 0,4$. La hauteur du saut sur Mars sera donc donnée par $h_M = (0{,}5\ \text{m})/(0{,}4) = 1{,}25\ \text{m}$.

---

60 A partir de la valeur de h (tableau 1.4), on peut déduire la vitesse de décollage de la puce comme dans l'exercice 58 :

$$v_1 = [2\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{,}1\ \text{m})]^{1/2} = 1{,}4\ \text{m s}^{-1}.$$

On en déduit l'accélération $a = (1{,}4\ \text{m s}^{-1})^2/[2\ (0{,}0008\ \text{m})] = 1225\ \text{m s}^{-2}$. Si un sauteur ($d = 0,5$ m) pouvait se doter d'une accélération comparable, il atteindrait une vitesse initiale $v_1 = 35\ \text{m s}^{-1}$. On trouve, dans ces conditions, une hauteur maximale $h = 62,5$ m.

---

61 On peut exprimer la vitesse de décollage par $v_1 = \sqrt{2gh}$, l'accélération par $a = gh/d$ et le temps de décollage par $t = v_1/a$:

pour le singe : $v_1 = [2\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (2{,}2\ \text{m})]^{1/2} = 6{,}57\ \text{m s}^{-1}$,

$a = (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (2{,}2\ \text{m})/(0{,}16\ \text{m}) = 135\ \text{m s}^{-2}$,

$t_1 = (6{,}57\ \text{m s}^{-1})/(135\ \text{m s}^{-2}) = 0{,}05\ \text{s}$;

pour l'homme : $v_1 = [2\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (1\ \text{m})]^{1/2} = 4{,}43\ \text{m s}^{-1}$,

$a = (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (1\ \text{m})/(0{,}5\ \text{m}) = 19{,}6\ \text{m s}^{-2}$,

$t_1 = (4{,}43\ \text{m s}^{-1})/(19{,}6\ \text{m s}^{-2}) = 0{,}226\ \text{s}$;

pour la puce : $v_1 = [2\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{,}1\ \text{m})]^{1/2} = 1{,}4\ \text{m s}^{-1}$,

$a = (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{,}1\ \text{m})/(0{,}0008\ \text{m}) = 1225\ \text{m s}^{-2}$,

$t_1 = (1{,}4\ \text{m s}^{-1})/(1225\ \text{m s}^{-2}) = 1,14 \times 10^{-3}\ \text{s}$.

SOLUTION DES PROBLÈMES

62 La première pierre part, à l'instant $t = 0$ d'une hauteur de 30 m sans vitesse initiale : l'équation du mouvement accéléré vers le sol est donc :

$$y = 30 - (1/2)\ g\ t^2.$$

La seconde pierre est lancée du même endroit avec une vitesse initiale de $20\ \text{m s}^{-1}$ et donc son équation du mouvement est $y' = 30 - 20\ t' - (1/2)\ g\ t'^2$ où t' est le temps écoulé à partir du lancé. Puisque la deuxième pierre est lancée au moment où $t = 0{,}5$ s, on a $t' = t - 0{,}5$ s. Le moment de la rencontre est le moment où les deux pierres sont à la même hauteur, soit lorsque $y' = y$. L'équation :

$$30 - (1/2)\ g\ t^2 = 30 - 20\ (t - 0{,}5) - (1/2)\ g\ (t - 0{,}5)^2$$

a pour unique solution $t = 0{,}58$ s (0,08 s après l'envoi de la seconde pierre), ce qui situe les deux pierres à une hauteur identique de 28,3 m.

---

63 Le ballon est lâché de l'altitude $h_0 = 18$ m à l'instant $t = 0$ et passe au cours du temps par les altitudes $h(t) = h_0 - (1/2)\ gt^2$. Il atteint la tête du passant lorsque $h(t) = 1{,}7$ m, c'est-à-dire lorsque $(1/2)\ gt^2 = (18 - 1{,}7)$ m. Le temps écoulé pendant la chute du ballon est donc :

$$t = \left[(2 / 9{,}81\ \text{m s}^{-2})\ (16{,}3\ \text{m})\right]^{1/2} = 1{,}82\ \text{s}.$$

Pendant ce temps, le passant avancera, sur le trottoir, d'une distance $x = v\ t$, soit $x = (0{,}45\ \text{m s}^{-1})\ (1{,}82\ \text{s}) = 0{,}82$ m.

---

64 Il faut ici sommer toutes les vitesses relatives pour obtenir la vitesse absolue de lancement :

$$(0{,}82\ \text{m s}^{-1}) + (0{,}55\ \text{m s}^{-1}) + (5{,}27\ \text{m s}^{-1}) + (1{,}43\ \text{m s}^{-1}) = 8{,}07\ \text{m s}^{-1}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

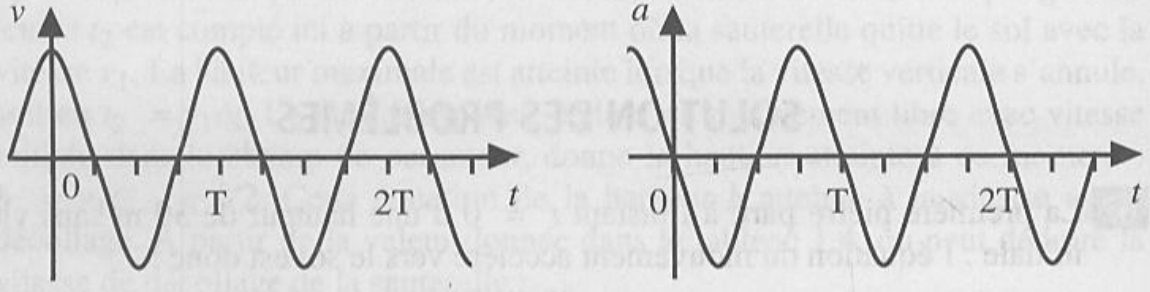
65 Dans le sens du courant, la vitesse atteinte, (12 km)/(2 h) = 6 km h^{-1}, est la somme des vitesses de la rameuse v_r et du courant v_c. En sens inverse, la vitesse (12 km)/(3 h) = 4 km h^{-1} est la différence $v_r - v_c$. La moyenne arithmétique des deux vitesses $(1/2)(v_r + v_c) + (1/2)(v_r - v_c)$ est donc la vitesse v_r de la rameuse. On trouve $v_r = 5$ km h^{-1}.

66 (a) Dans le sens de la marche, la vitesse par rapport au sol vaut :

$$(70 \text{ km h}^{-1}) + (15 \text{ km h}^{-1}) = 85 \text{ km h}^{-1}.$$

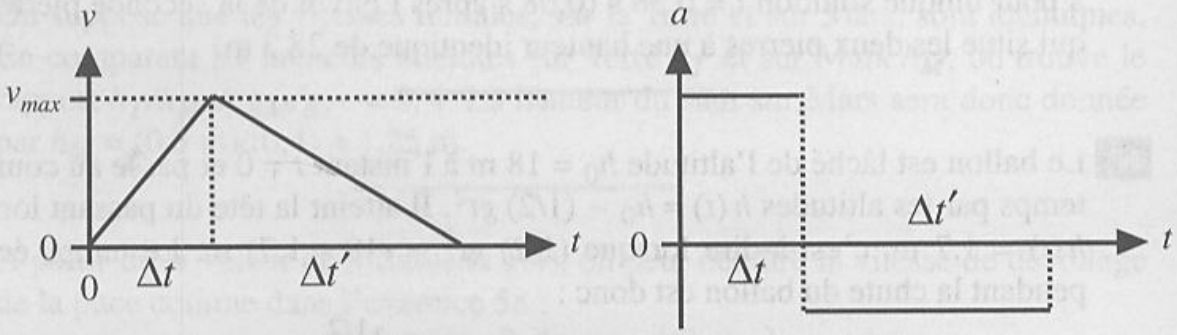
(b) En sens inverse, on obtient $(70 \text{ km h}^{-1}) - (15 \text{ km h}^{-1}) = 55 \text{ km h}^{-1}$.

67



68 L'espace parcouru par le traîneau ($x = 12$ m) est lié à la durée du parcours ($t = 4$ s) par la relation $x = at^2/2$, à partir de laquelle on trouve l'accélération $a = 1{,}5$ m s^{-2}. La vitesse atteinte à l'instant t étant le produit at, elle atteint la valeur de 4 m s^{-1} en $t = (4 \text{ m s}^{-1})/(1{,}5 \text{ m s}^{-2}) = 2{,}7$ s.

69



En supposant des accélérations constantes, la vitesse maximale vaut :

$$v_{max} = a\,\Delta t = |a'|\,\Delta t',$$

où a est l'accélération dans la phase d'accroissement de la vitesse, a' l'accélération dans la phase de diminution de la vitesse, Δt la durée de la phase d'accélération et $\Delta t'$ la durée de la phase de décélération. Les distances ($x = 250$ m et $x' = 500$ m) parcourues dans les phases d'accélération et de décélération valent $x = (1/2)(a\,\Delta t)\,\Delta t$ et $x' = (1/2)(a'\,\Delta t')\,\Delta t'$, ce qui montre que Δt et $\Delta t'$ sont dans le même rapport que x et x', soit $\Delta t' = 2\,\Delta t$.

70 La loi du mouvement du missile, tiré à l'instant $t = 0$ en $x = 0$, s'écrit $x_m = v_0 t + at^2/2$, avec $v_0 = 500\ \text{m s}^{-1}$ et $a = 100\ \text{m s}^{-2}$. La cible se déplace suivant la loi $x_c = x_{0c} + v_c t$, avec $x_{0c} = 10000$ m et $v_c = 400\ \text{m s}^{-1}$. L'impact sur la cible se produit lorsque $x_m = x_c$, à l'instant $t = 13,9$ s.

---

71 Pour le lapin, $x_\ell = (30\ \text{m}) + (5\ \text{m s}^{-1})\ t$; pour le chien, $x_c = (10\ \text{m s}^{-1})\ t$. La capture ($x_c = x_\ell$) se produit à l'instant $t = 6$ s.

---

72 La décélération du traîneau vaut, en grandeur,

$$a = \Delta v / \Delta t, \text{ où } \Delta v = v_0 = 200\ \text{m s}^{-1}.$$

Il s'arrête donc après un laps de temps $\Delta t = v_0/a$. A cet instant, il se trouve à la distance $d = v_0 \Delta t - (112) a \Delta t^2$, soit $d = (1/2) v_0^2/a$. Si l'accélération doit rester inférieure à $6g$, la distance d'arrêt doit être supérieure à $d = (1/2) v_0^2/(6g)$, soit $(200\ \text{m s}^{-1})^2/[2\ (6)\ (9,8\ \text{m s}^{-2})] = 340$ m.

---

73 Pour résoudre ce problème, on admettra que l'athlète, en courant le 100 m ou le 60 m, ne « s'économise » pas, et qu'il développe, au départ, la même accélération pour les deux courses. L'évolution supposée de la vitesse du coureur est la suivante : pendant une première phase, qui dure un temps T, l'athlète accélère et la vitesse est proportionnelle au temps : $v = at$; après le temps T, la vitesse garde la valeur constante aT. L'espace parcouru peut être décrit de la même façon : au départ, le mouvement est uniformément accéléré $x = (1/2) at^2$, puis, après le temps t, il devient uniforme : avec le temps T comme origine, on trouve $x = (1/2) aT^2 + v(t - T)$. En utilisant, dans cette dernière expression la valeur $v = aT$, on trouve que la distance parcourue au cours du temps vaut $x = aT(t - T/2)$. Les données sur la durée d'un 100 m (9,95 s) et d'un 60 m (6,45 s), introduites dans cette relation, permettent de déterminer l'accélération a au départ et la durée T de cette accélération. Le système des deux équations :

$$100 = aT(9,95 - T/2) \text{ et } 60 = aT(6,45 - T/2)$$

fournit les solutions (a) $a = 4,76\ \text{m s}^{-2}$ et (b) $T = 2,4$ s. Ces solutions supposent que l'accélération a et sa durée T sont les mêmes pour les deux courses. (c) La vitesse maximale atteinte vaut $v = aT$, soit 11,4 m s^{-1}. (d) La relation entre la durée t de la course et sa longueur x étant $t = T/2 + x/(aT)$, avec la même accélération que ci-dessus, un 200 m se courrait en 18,7 s et un 1000 m en 88,9 s. Les records enregistrés dans ces disciplines, respectivement 19,83 s et 133,9 s, montrent que les accélérations développées sont plus faibles dans ces courses où l'endurance joue un plus grand rôle.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

74 Le sac lâché est en MRUA, avec une accélération $-9,8\ \text{m s}^{-2}$, une vitesse initiale $v_0 = 10\ \text{m s}^{-1}$ et une altitude initiale de 300 m. La loi du mouvement s'écrit $x = (300\ \text{m}) + (10\ \text{m s}^{-1})\ t - (4,9\ \text{m s}^{-2})\ t^2$ et la loi des vitesses $v = (10\ \text{m s}^{-1}) - (9,8\ \text{m s}^{-2})\ t$. (a) Le moment où le sac passe par une altitude maximale correspond au moment où la vitesse s'annule : $v = 0$ pour $t = 1,02$ s; à ce moment, le sac se trouve à une altitude $x = 305$ m. (b) 5 s après le lâché, le sac se trouve en $x = 227$ m. (c) Il touche le sol lorsque $x = 300 + 10t - 4,9t^2 = 0$, soit $t = 8,9$ s (rejeter la solution $t = -6,9$ s, antérieure au lâché).

---

75 La loi du mouvement du colonel est $x_a = v_a t$, où $v_a = 30\ \text{m s}^{-1}$. La voiture qu'il poursuit a un mouvement uniformément accéléré : $x_b = x_0 + (1/2)at^2$, où x_0 est l'avance initiale (100 m), et a l'accélération ($5\ \text{m s}^{-2}$). La distance qui les sépare, $r = x_b - x$, dépend du temps et passe par un minimum lorsque la dérivée $\text{d}r/\text{d}t$ s'annule :

$$\frac{\text{d}r}{\text{d}t} = \frac{\text{d}\,(x_b - x_a)}{\text{d}t} = at - v_a = 0$$

A ce moment, en $t = v_b/a = (30\ \text{m s}^{-1})/(5\ \text{m s}^{-2}) = 6$ s, la vitesse relative de la voiture par rapport au colonel s'annule. Il s'agit bien d'une distance minimale, puisque la dérivée seconde de r est positive. La distance $x_b - x_a$ la plus courte vaut encore :

$x_0 + (1/2)at^2 - v_a t = 100\ \text{m} + (1/2)\ (5\ \text{m s}^{-2})\ (6\ \text{s})^2 - (30\ \text{m s}^{-1})\ (6\ \text{s}) = 10\ \text{m}$

et ne peut donc jamais s'annuler.

---

76 Le rectangle représente le terme $v_0 \Delta t$; le triangle représente le terme $(1/2)\ (a \Delta t)\ \Delta t$.

---

77 La vitesse du guépard, $70\ \text{km h}^{-1}$, représente 70 (1000 m)/(3600 s), soit $19,4\ \text{m s}^{-1}$. (a) L'accélération moyenne est donc $(19,4\ \text{m s}^{-1})/(2\ \text{s}) = 9,72\ \text{m s}^{-2}$, soit un peu moins que l'accélération de la pesanteur. (b) Si le guépard parcourt 60 m dans ces deux secondes de mouvement uniformément accéléré, la loi du mouvement $x = (1/2)at^2$ impose une accélération :

$$a = 2x/t^2 = 2\ (60\ \text{m})/(2\ \text{s})^2 = 30\ \text{m s}^{-2}.$$

Cette accélération, nettement supérieure à g, est peu vraisemblable : la distance de 60 m donnée dans l'article n'est pas très plausible.

---

78 Si t_1 représente le temps de chute de la pierre, la profondeur du puits peut s'exprimer par $d = (1/2)gt_1^2$. Si t_2 représente le temps de propagation du son, la même profondeur de puits peut encore s'écrire $d = v_s t_2$, où $v_s = 344\ \text{m s}^{-1}$ est la vitesse du son dans l'air. Comme le bruit de chute est perçu 3 s après le lâché

de la pierre, $t_1 + t_2 = T = 3$ s. On peut d'abord éliminer t_1 et d de ces trois relations et obtenir l'équation :

$$t_2^2 - 2\left(T + \frac{v_s}{g}\right) t_2 + T^2 = 0$$

dont on tire la valeur de t_2 :

$$t_2 = \left(T + \frac{v_s}{g}\right) \pm \sqrt{\left(T + \frac{v_s}{g}\right)^2 - T^2}$$

ce qui donne les deux solutions $t_2 = 0,118$ s et $t_2 = 76,1$ s. La deuxième solution doit être rejetée comme supérieure à 3 s, la première conduit à une profondeur du puits égale à $d = v_s t_2 = 41$ m.

---

79 On néglige le temps de propagation de la lumière, du fait de la valeur très élevée de sa vitesse de propagation. Si le son s'est propagé pendant 5 s, il a parcouru une distance de (344 m s^{-1}) (5 s) = 1720 m.

---

80 (a) La vitesse moyenne d'un vaisseau spatial entre la Terre et la Lune est le rapport : $v = (3,84 \times 10^8 \text{ m})/[(24)\ (3600 \text{ s})] = 4444 \text{ m s}^{-1}$. (b) 4 années-lumière représentent une distance $d = 4$ (1 année-lumière) = 4 c (1 an), où c est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide ($c = 3,00 \times 10^8$ m s^{-1}) : donc $d = 4\ (3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})\ [(365)\ (24)\ (3600 \text{ s})] = 3,78 \times 10^{16}$ m. La durée du voyage est, dans ces conditions :
$t = d/v = (3,78 \times 10^{16} \text{ m})/(4444 \text{ m s}^{-1}) = 8,5 \times 10^{12}$ s, soit $2,7 \times 10^5$ années.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 2

Le mouvement à deux dimensions

RAPPELS

Le mouvement à deux dimensions se décrit à l'aide de *vecteurs* : les vecteurs position **s**, vitesse **v** et accélération **a** décrivent simultanément les lois du mouvement sur les deux axes perpendiculaires (x et y) qui repèrent la position du mobile. Ainsi, la donnée du vecteur vitesse $\mathbf{v}(t) = \mathrm{d}\mathbf{s}/\mathrm{d}t$ équivaut à la donnée des deux vitesses $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ et $v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ des coordonnées du mobile. De même, l'accélération $\mathbf{a}(t) = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$ représente collectivement les accélérations :

$$a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 \text{ et } a_y = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2.$$

On notera que la grandeur de la vitesse et la grandeur de l'accélération sont données par les expressions :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{et} \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Lorsque le mobile est soumis verticalement à l'accélération de la pesanteur $-g$ et ne subit aucune accélération dans une direction horizontale, le déplacement Δx et la vitesse finale v_x dans la direction x valent respectivement, après un laps de temps Δt :

$$\Delta x = v_{0x}\,\Delta t \quad \text{et} \quad v_x = v_{0x}.$$

De la même façon, dans la direction y, on trouve :

$$\Delta y = v_{0y}\,\Delta t - \frac{1}{2}\,g\,(\Delta t)^2 \quad \text{et} \quad v_y = v_{0y} - g\,\Delta t.$$

Dans ces expressions, les vitesses v_{0x} et v_{0y} sont les vitesses initiales, fixées au début de l'intervalle de temps Δt. Dans ce cas, la trajectoire est une parabole, caractéristique du mouvement libre dans le champ de pesanteur. Partant d'une altitude donnée, un

objet lancé vers le haut avec une vitesse (v_{0x}, v_{0y}) retombera au même niveau à une distance (portée du jet P)

$$P = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}.$$

Insistons sur le fait que cette « formule de la portée » n'est utilisable que si le mobile revient exactement à l'altitude de départ.

SOLUTION DES EXERCICES

2.1 INTRODUCTION AUX VECTEURS

1 Dans chaque cas, on utilise l'addition vectorielle. (a) **E** et **C** forment les côtés d'un rectangle; leur somme est donc égale au vecteur diagonal **D**. (b) On peut construire un parallélogramme dont **A** et **F** sont deux côtés; leur somme vaut **G**. (c) Comme au point (b), **A** et **D** sont les côtés d'un parallélogramme; leur somme vaut **C**. (d) **A** et **E** sont des vecteurs de même module mais de directions opposées; leur somme vaut donc 0. (e) $\mathbf{E} + 2\,\mathbf{A} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}$; comme $\mathbf{E} + \mathbf{A} = 0$, il reste que $\mathbf{E} + 2\,\mathbf{A} = \mathbf{A}$. (f) Le vecteur $-\mathbf{B}$ correspond au vecteur **F** : l'opération $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ revient donc à $\mathbf{A} + \mathbf{F}$ qui vaut **G**. (g) Le vecteur $-\mathbf{A}$ correspond au vecteur **E** : l'opération $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ revient donc à $\mathbf{B} + \mathbf{E}$ qui vaut **C** puisqu'à nouveau, **B** et **E** définissent un parallélogramme. (h) $-\mathbf{A}$ est équivalent au vecteur **E**; **E** et **C** sont les côtés d'un rectangle; leur somme vaut **D**.

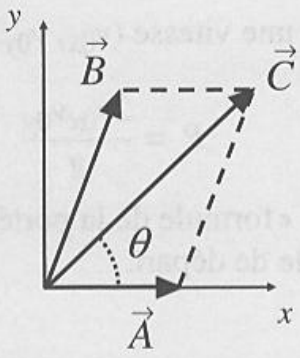
---

2 Une variation de l'angle θ ne modifie que la grandeur des composantes de **B** puisque A_x et A_y sont indépendantes de θ. La grandeur de **C** dépend donc de la valeur des composantes de **B**. (a) Pour que la valeur de **C** soit minimale, il faut que le vecteur **B** soit perpendiculaire à **A** : $B_y = 12$ et $B_x = 0$. Dans ce cas, $\theta = 90\,°$. (b) Pour que la valeur de **C** soit maximale, il suffit que les deux composantes en x s'additionnent : $B_y = 0$ et $B_x = 12$. Ceci nécessite un angle θ égal à $0\,°$. (c) On utilise le théorème de Pythagore : $C = \sqrt{A^2 + B^2} = 13$.

---

4 (a) On construit d'abord le parallélogramme dont deux côtés sont constitués par les vecteurs **A** et **B**. On mesure ensuite, à l'aide du rapporteur, l'angle entre les directions de **A** et de **C** ; le module de **C** est donné par la longueur du vecteur, estimée grâce à la latte graduée. (b) On calcule la grandeur des composantes du vecteur **C** par $C_x = A_x + B_x = 5 + 12\cos 72\,° = 8{,}7$ cm et $C_y = A_y + B_y = 0 + 12\sin 72\,° = 11{,}4$ cm. Le module de **C** est donné par le théorème de Pythagore : $C = \sqrt{8,72 + 11,42} = 14{,}3$ cm. L'angle entre l'horizontale et la direction de **C** est donné par $\theta = \arctan C_y/C_x = 52{,}65\,°$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.



6 Les quatre vecteurs **A**, **B**, **C** et **D** se décomposent comme suit suivant les axes orthogonaux x et y : $(A_x = -10, Ay = 0)$, $(B_x = 15\cos 45°, B_y = 15\sin 45°)$, $(C_x = 0, C_y = 8)$, $(D_x = 12\cos 30°, D_y = -12\sin 30°)$. Pour trouver les composantes du vecteur **E**, on additionne les composantes de chacun des vecteurs suivant chaque axe de coordonnées :

$$E_x = -10 + 15\left(\sqrt{2}/2\right) + 0 + 12(\sqrt{3}/2) = 11 \quad \text{et}$$

$$E_y = 0 + 15\left(\sqrt{2}/2\right) + 8 - 12(1/2) = 12,6.$$

Le module du vecteur se calcule par le théorème de Pythagore soit :

$$\sqrt{11^2 + 12,6^2} = 16,73.$$

La direction du vecteur, vers le nord-est puisque les composantes suivant x et y sont toutes deux positives, se mesure par l'angle θ qui sépare la direction du vecteur avec une direction privilégiée (horizontale ou verticale) :

$$\tan\theta = E_y/E_x = 12,6/11 = 1,14 \text{ soit } \theta = 48,9° \text{ avec l'horizontale.}$$

10 Considérons la direction de l'est horizontalement et vers la droite (axe x) et celle du nord verticalement et vers le haut (axe y). La personne qui marche vers le nord-est se déplace donc, pendant deux heures, de $[(3 \text{ km h}^{-1})\cos 45°]$ (2 h), soit 4,24 km selon l'axe x et de $[(3 \text{ km h}^{-1})\sin 45°]$ (2 h), soit 4,24 km selon l'axe y. La personne qui se déplace vers le sud parcourt, elle, une distance selon l'axe des y négatifs de (4 km h^{-1}) (2 h) = 8 km. Après deux heures, leur séparation verticale est de (4,24 + 8) = 12,24 km et, horizontalement 4,24 km. Le théorème de Pythagore permet donc de trouver la distance réelle qui les sépare après deux heures : $\sqrt{4,24^2 + 12,24^2} = 12,96$ km.

2.2 LA VITESSE À DEUX DIMENSIONS

14 (a) Un tour complet correspond à une distance totale de $2\pi R$, soit 6283 m, parcourue à vitesse constante. Le temps nécessaire pour couvrir cette distance se calcule par $t = x/v = (6283 \text{ m})/(10 \text{ m s}^{-1}) = 628,3$ s. (b) La vitesse moyenne est un vecteur; on peut donc en calculer les composantes selon les axes de coordonnées x et y. Or, comme la voiture revient à son point de départ, les écarts Δx et Δy sont

nuls. Les composantes de la vitesse moyenne $\Delta x/\Delta t$ et $\Delta y/\Delta t$ sont nulles aussi. La vitesse moyenne de la voiture est donc nulle.

---

15 La composante verticale de la vitesse initiale est le produit $(30\ \text{m s}^{-1}) \sin 20°$, soit $10{,}3\ \text{m s}^{-1}$, alors que la composante horizontale est donnée par $(30\ \text{m s}^{-1}) \cos 20°$, soit $28{,}2\ \text{m s}^{-1}$.

---

16 La composante verticale de la vitesse moyenne vaut :

$$\Delta y / \Delta t = (600\ \text{km})/(3\ \text{h}) = 200\ \text{km h}^{-1}$$

alors que la composante horizontale est donnée par :

$$\Delta x / \Delta t = (800\ \text{km})/(3\ \text{h}) = 267\ \text{km h}^{-1}.$$

La direction de la vitesse moyenne est donnée par l'angle formé entre la direction de cette vitesse et l'horizontale :

$$\theta = \arctan \Delta y / \Delta x = \arctan [(600\text{km})/(800\text{km})] = 37°.$$

Le théorème de Pythagore permet de calculer la grandeur de la vitesse moyenne :

$$\sqrt{200^2 + 267^2} = 334\ \text{km h}^{-1}.$$

2.3 L'ACCÉLÉRATION À DEUX DIMENSIONS

17 (a) La durée t du mouvement est donnée par la relation $x = v\,t$, où x représente l'espace parcouru pendant le demi-tour, soit πR. Puisque la vitesse est constante, $t = 25\ \pi = 78{,}5$ s. (b) La voiture se dirigeant initialement vers le nord, les composantes sud-nord et ouest-est de la vitesse initiale sont respectivement $(20\ \text{m s}^{-1})$ et $(0\ \text{m s}^{-1})$ alors que les composantes de la vitesse finale, après le demi-tour sont $(-20\ \text{m s}^{-1})$ et $(0\ \text{m s}^{-1})$. Les composantes de l'accélération moyenne se calculent par :

$$\Delta v_y / \Delta t = [(-20 - 20)\ \text{m s}^{-1}] / (78{,}5\ \text{s}) = -0{,}509\ \text{m s}^{-2} \text{ et } \Delta v_x / \Delta t = 0\ \text{m s}^{-2}.$$

La grandeur de cette accélération moyenne vaut donc :

$$\sqrt{0^2 + 0{,}509^2} = 0{,}509\ \text{m s}^{-1} ;$$

puisque la composante ouest-est de l'accélération est nulle, on en déduit qu'elle est dirigée vers le sud.

---

18 (a) L'accélération se calcule par $\Delta v / \Delta t$. Puisque la vitesse initiale de la balle est nulle, la variation de vitesse correspond à la vitesse finale. L'accélération vaut donc $(250\ \text{m s}^{-1}) / (0{,}006\ \text{s}) = 41667\ \text{m s}^{-2}$. (b) Pour retrouver les composantes de l'accélération, il faut considérer celles des vitesses initiale et finale : les composantes de la vitesse initiale sont nulles alors que celles de la vitesse finale sont :

$$v_x = 250 \cos 30° = 216{,}5\ \text{m s}^{-1} \text{ et } v_y = 250 \sin 30° = 125\ \text{m s}^{-1}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

La composante a_x vaut $v_x / \Delta t = (216{,}5 \text{ m s}^{-1}) / (0{,}006 \text{ s}) = 36083 \text{ m s}^{-2}$ et $a_y = v_y / \Delta t = (125 \text{ m s}^{-1}) / (0{,}006 \text{ s}) = 20833 \text{ m s}^{-2}$.

---

20 Nous pouvons considérer le mouvement de la Terre autour du Soleil comme une rotation dans le sens anti-horlogique dans le plan de cette feuille. Supposons que l'on prenne l'origine du temps ($t = 0$ s) au moment où la Terre se trouve à droite du Soleil, sur un axe Terre-Soleil horizontal. A ce moment, les composantes de la vitesse "initiale" sont $v_{xi} = 0 \text{ m s}^{-1}$ et $v_{yi} = 2 R \pi / T$ où R est la distance moyenne Terre-Soleil et T la période de rotation de la Terre

[= 1 an = (365,25 jours) (86400 s jour^{-1}) = 31557600 s].

Après 6 mois, la Terre a effectué, à vitesse constante, un demi-tour. La composante horizontale de sa vitesse est toujours nulle alors que $v_{yf} = -v_{yi}$. La composante a_x de l'accélération moyenne est donc nulle alors que la composante a_y vaut :

$$\Delta v_y / \Delta t = \left(v_{yf} - v_{yi}\right) / \Delta t = [-2 (2 \pi R) / T] / (6 \text{ mois}) = -3{,}8 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}.$$

La grandeur de l'accélération moyenne vaut donc $3{,}8 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$.

2.4 DÉTERMINATION DU MOUVEMENT D'UN OBJET ; LES PROJECTILES

21 (a) La composante horizontale de la vitesse moyenne s'évalue par :

$$\Delta x / \Delta t = (30 \text{ m})/(4 \text{ s}) = 7{,}5 \text{ m s}^{-1}$$

alors que sa composante horizontale est nulle puisque $\Delta y = 0$ m. (b) La composante a_x vaut :

$$\Delta v_x / \Delta t = 0 \text{ m s}^{-2} \text{ et } a_y = \Delta v_y / \Delta t = (v_y - v_{0y}) / \Delta t = -g \Delta t / \Delta t = -g$$

en utilisant la loi des vitesses du MRUA.

---

22 Le mouvement de l'objet peut être représenté par une parabole décomposée dans un plan défini par les deux axes x horizontal et y vertical. La vitesse initiale de la balle est horizontale : sa composante verticale v_{0y} est donc nulle alors que sa composante horizontale vaut $v_{0x} = 20 \text{ m s}^{-1}$. Suivant la direction horizontale, la vitesse gardera la valeur qu'on lui a communiquée à son lancement : il s'agit d'un mouvement rectiligne uniforme selon l'axe x alors que l'accélération de la pesanteur agit sur la balle pour la faire retomber vers le sol. Le mouvement selon l'axe y est un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération g. (a) La balle touche le sol en $y = 0$ m. La loi des espaces du MRUA en y ($0 = y_0 - g t^2 / 2$) nous donne le temps nécessaire à la balle pour arriver au sol : $t = 1{,}75$ s. (b) En introduisant cette valeur du temps dans la loi des espaces du MRU, on trouve la distance horizontale parcourue par la balle avant d'atteindre le sol : $x = (20 \text{ m s}^{-1}) (1{,}75 \text{ s}) = 35$ m.

---

23 (a) Le mouvement de la balle à l'intérieur du canon est un mouvement rectiligne accéléré. La vitesse initiale de la balle étant nulle, les lois du MRUA nous permettent d'écrire les deux équations suivantes : $0{,}7 = a\,t^2 / 2$ et $500 = a\,t$. En remplaçant la valeur du produit $(a\,t)$ dans la première équation, on déduit le temps nécessaire à la balle pour quitter le canon du fusil : $t = 2{,}8 \times 10^{-3}$ s. De la seconde équation, on peut alors déduire la valeur de l'accélération :

$$a = 500 / t = 1{,}79 \times 10^5 \text{ m s}^{-2}.$$

(b) Connaissant l'angle d'inclinaison du fusil, la composante a_x vaut :

$$a \cos 30° = 1{,}55 \times 10^5 \text{ m s}^{-2}$$

et la composante a_y vaut $a \sin 30° = 8{,}93 \times 10^4$ m s^{-2}.

---

26 En décomposant la trajectoire de la balle suivant les deux directions x et y de l'espace, le mouvement suivant l'axe horizontal est rectiligne uniforme alors que dans la direction verticale, il est accéléré. La vitesse initiale de la balle étant inclinée sur l'horizontale, on peut en calculer les composantes :

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta = 40 \cos 30° \text{ m s}^{-1} \text{ et } v_{0y} = v_0 \sin\theta = 40 \sin 30° \text{ m s}^{-1}.$$

(a) A la hauteur maximale, la vitesse verticale de la balle s'annule. La loi des vitesses du MRUA permet de trouver l'expression du temps nécessaire pour atteindre cette hauteur : $t = v_{0y} / g$. En introduisant cette expression dans la loi des espaces, on peut déterminer la hauteur maximale :

$$y = h_{max} = v_{0y}^2 / (2\,g) = [(40 \text{ m s}^{-1}) \sin 30°]^2 / [(2)\,(9{,}8 \text{ m s}^{-2})] = 20{,}4 \text{ m}.$$

(b) On peut calculer le temps écoulé entre le départ de la balle et son arrivée à cette hauteur : $t = v_{0y} / g = (40 \text{ m s}^{-1}) \sin 30° / (9{,}8 \text{ m s}^{-2}) = 2{,}04$ s. (c) En utilisant cette valeur de t dans la loi des espaces du MRU, on détermine la distance qui la sépare de son point de lancement :

$$x = v_{0x}\,t = [(40 \text{ m s}^{-1}) \cos 30°]\,(2{,}04 \text{ s}) = 70{,}7 \text{ m}.$$

---

27 (a) Comme les positions verticales initiale et finale de la balle sont identiques, la position horizontale au moment où la balle atteint sa hauteur maximale vaut la moitié de la portée du jet. Elle arrivera donc au sol en $x = 2\,(70{,}7 \text{ m}) = 141$ m. (b) De même, la durée totale du vol correspond au double du temps nécessaire à la balle pour atteindre sa hauteur maximale soit $t = 2\,(2{,}04 \text{ s}) = 4{,}08$ s.

---

28 La trajectoire parabolique de la balle est décrite dans un plan défini par les deux axes de coordonnées x et y. Suivant l'axe horizontal, le mouvement est rectiligne uniforme alors que suivant l'axe vertical, il s'agit d'un MRUA d'accélération g. La loi des espaces du MRU nous permet de déterminer le temps nécessaire à la balle pour atteindre la position de la cible : $t = (200 \text{ m}) / (500 \text{ m s}^{-1}) = 0{,}4$ s. La déviation verticale $\Delta y = y_{final} - y_0$ est donnée par $-g\,t^2 / 2$, grandeur négative puisque la position verticale finale de la balle est inférieure à sa position initiale.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

La balle manque donc la cible et s'en écarte d'une distance égale à :

$$(9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{,}4\ \text{s})^2 / 2 = 0{,}784\ \text{m}.$$

---

30. Puisque le ballon retourne à l'altitude initiale, au niveau du sol, on peut utiliser directement l'expression de la portée d'un jet, rappelée ci-dessus.

(a) $P = (20\ \text{m s}^{-1})^2 \sin(2(30\,°)) / (9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 35{,}3\ \text{m}$.

(b) Comme $\sin 60\,°$ est égal à $\sin 120\,°$, la portée vaut aussi 35,3 m.

(c) $P = (20\ \text{m s}^{-1})^2 \sin(2(45\,°)) / (9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 40{,}8\ \text{m}$.

---

31 Dans chaque cas, le temps de vol s'exprime par $\Delta t = 2\ v_{0y} / g$.

(a) $\Delta t = 2\ (20\ \text{m s}^{-1}) \sin 30\,° / (9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 2{,}04\ \text{s}$.

(b) $\Delta t = 2\ (20\ \text{m s}^{-1}) \sin 60\,° / (9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 3{,}53\ \text{s}$.

(c) $\Delta t = 2\ (20\ \text{m s}^{-1}) \sin 45\,° / (9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 2{,}89\ \text{s}$.

---

32 La portée sur la planète peut s'exprimer par $P_p = v_0^2 \sin(2\theta_0) / g'$, où $g' = g / 2$. Si l'on rapporte l'expression de la portée P_p sur la planète à celle de la portée sur Terre P_t, on déduit que $P_p = 2\ P_t$, soit 4 m.

---

33 Si on suppose que la hauteur initiale de la balle est identique à la position verticale à laquelle le second enfant la rattrapera, et sachant que la portée est maximale quand l'angle d'inclinaison de la vitesse initiale par rapport à l'horizontale est de 45 ° ($\sin 2\,\theta = 1$), la distance maximale qui peut séparer les deux enfants est donnée par $P = v_0^2 / g = (20\ \text{m s}^{-1})^2 / (9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 40{,}8\ \text{m}$.

---

36 Puisque sa hauteur de départ est identique à la hauteur d'arrivée, on peut utiliser la formule de la portée pour trouver :

$$v_0 = \sqrt{P\ g / \sin 2\,\theta} = [(36\ \text{m})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2}) / \sin 60\,°]^{1/2} = 20{,}2\ \text{m s}^{-1}.$$

---

37 Les positions verticales initiale et finale de la balle sont identiques; la formule de la portée peut donc être utilisée pour calculer :

$$\theta = \arcsin P\ g / (2\ v_0^2) = \arcsin \left\{ (200\ \text{m})\ (9,8\ \text{m s}^{-2}) / \left[2\ (500\ \text{m s}^{-1})^2 \right] \right\}$$

$$= 0,225\,°.$$

---

41 Le ballon subit un mouvement rectiligne accéléré dans la direction y verticale. La loi des espaces permet de déterminer le temps nécessaire à la balle pour atteindre le sol : $t = 2\ v_0\ \sin\theta_0 / g$. En introduisant cette expression de t dans la loi des vitesses, on trouve $v_y = v_0\ \sin\theta_0$. La vitesse v au sol vaut donc :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_y^2}$$

puisque le mouvement est uniforme suivant l'horizontale x. En remplaçant v_y par son expression, on trouve que $v = v_0$. Pour calculer l'angle θ au sol, il faut évaluer $\theta = \arctan |v_y|/v_x = \arctan (\tan \theta_0) = \theta_0$.

2.5 SAUTS HORIZONTAUX

44 La grenouille quitte le sol et y retourne. (a) La formule de la portée permet de calculer la vitesse initiale $v_0 = \sqrt{P\, g\, /\, \sin 2\, \theta} = \sqrt{(0,9\text{ m})(9,8\text{ m s}^{-2})\, /\, \sin 90\,°}$, soit 2,97 m s^{-1}. (b) A sa hauteur maximale, la vitesse verticale de la grenouille s'annule. La loi des vitesses du MRUA permet de trouver le temps nécessaire pour atteindre cette hauteur : $t = v_0 / g$. En introduisant cette expression dans la loi des espaces du MRUA vertical, on déduit :

$$y = h_{max} = v_0^2 / (2\, g) = (2,97\text{ m s}^{-1})^2 / (2\,(9,8\text{ m s}^{-2})) = 0,45\text{ m}.$$

(c) Le temps nécessaire pour parvenir à une hauteur de 0,3 m est donné par $t = v_0 \sin \theta / g$. En introduisant cette expression dans la loi des espaces du MRUA, on trouve que $h_{max} = v_0^2 \sin 2\, \theta / (2\, g)$. Cette expression permet de calculer l'angle $\theta = \arcsin [2\,(0,3\text{ m})(9,8\text{ m s}^{-2}) / (2,97\text{ m s}^{-1})^2]^{1/2} = 54,7\,°$. L'angle de saut de la grenouille n'est donc pas 90 °.

SOLUTION DES PROBLÈMES

46 (a) Il faut d'abord rechercher l'angle d'inclinaison de la vitesse par rapport à l'horizontale. Considérons le triangle rectangle dont deux sommets sont formés par la bouche du canon et l'ourson. Les côtés opposé et adjacent à l'angle θ ont des longueurs respectives égales à 1 m et 1,5 m (si l'on suppose que l'ourson se trouve à 1 m au-dessus de la bouche du canon). On peut donc calculer la valeur de cet angle par $\theta = \arctan 1/1,5 = 33,7\,°$. La composante horizontale de la vitesse initiale vaut donc $v_{0x} = v_0 \cos \theta = 10 \cos 33,7\,° = 8,32\text{ m s}^{-1}$ et la composante verticale vaut $v_{0y} = v_0 \sin \theta = 10 \sin 33,7\,° = 5,55\text{ m s}^{-1}$. (b) Le mouvement du boulet, décomposé suivant les deux axes de coordonnées x et y, est uniforme suivant l'horizontale. La loi des espaces du MRU permet de déduire la valeur du temps nécessaire au boulet pour parcourir 1,5 m : $\Delta t = \Delta x / v_{0x} = (1,5\text{ m}) / (8,32\text{ m s}^{-1}) = 0,18\text{ s}$. (c) Les deux objets ont un mouvement vertical uniformément accéléré d'accélération g. Après 0,18 s, la position verticale du boulet est donnée par :

$$y = v_{0y}\, t - g\, t^2 / 2 = (5,55\text{ m s}^{-1})\,(0,18\text{ s}) - (9,8\text{ m s}^{-2})\,(0,18\text{ s})^2 / 2 = 0,84\text{ m}.$$

La position verticale de l'ourson, initialement au repos, est donnée par :

$$y = y_0 - g\, t^2 / 2 = (1\text{ m}) - (9,8\text{ m s}^{-2})\,(0,18\text{ s})^2 / 2 = 0,84\text{ m}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

47 (a) Dans les deux cas, on calcule le temps nécessaire à la balle pour atteindre la coordonnée $y = 0$ m. Dans le premier cas, la vitesse initiale n'a pas de composante horizontale et l'on trouve que $t_1 = \sqrt{2\,h / g}$. Dans le second cas, la vitesse initiale est exclusivement verticale et l'on déduit, par résolution de l'équation du second degré en t, que $t_2 = (-v_0 / g) \pm \sqrt{(v_0^2 / g^2) + (2\,h / g)}$. De ces deux solutions possibles, nous ne retenons que celle qui fait intervenir le signe « + » puisque l'autre nous donne un temps négatif. La seconde balle atteint le sol avant la première puisque t_2 est plus petit que t_1. En effet, le radical dans l'expression de t_2 peut être compris comme mesure de l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont (v_0 / g) et $\sqrt{2\,h / g}$ sont les deux autres côtés. La somme de ces deux côtés est toujours plus petite que la longueur de l'hypothénuse. Nous pouvons donc écrire :

$$\sqrt{(v_0^2 / g^2) + (2\,h / g)} < (v_0 / g) + \sqrt{2\,h / g}.$$

En soustrayant des deux côtés de l'inégalité la quantité (v_0 / g), on retrouve les expressions calculées de t_1 et t_2 et l'on conclut que $t_2 < t_1$. (b) On calcule les composantes de la vitesse finale et on utilise le théorème de Pythagore pour rechercher sa grandeur. La loi des vitesses du MRUA nous donne, pour la première balle, des composantes $v_{x1} = v_0$ et $v_{y1} = -g\,t$. La grandeur de la vitesse finale de la première balle est donc donnée par $v_1 = \sqrt{v_0^2 + g^2\,t^2}$. Pour la seconde balle, $v_{x2} = 0$ et $v_{y2} = -v_0 - g\,t$. La vitesse finale de la seconde balle est donc $v_2 = v_0 + g\,t$. Un raisonnement identique à celui du point (a) permet de conclure que $v_1 < v_2$ [considérer le triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont constitués par (v_0) et par $(g\,t)$].

---

48 Le mouvement de la balle, décomposé selon les deux axes de coordonnées x et y, est uniforme suivant la direction horizontale et accéléré dans la direction verticale. Au sommet de la trajectoire, la composante verticale de la vitesse s'annule; la loi des vitesses nous donne l'expression du temps nécessaire pour arriver à cette hauteur : $t = v_{0y} / g$. En introduisant cette expression dans la loi des espaces du MRUA, on déduit la valeur de la composante verticale de la vitesse initiale $v_{0y} = \sqrt{(1\text{ m})(2)(9,8\text{ m s}^{-2})} = 4,4\text{ m s}^{-1}$. En utilisant alors l'expression du temps dans la loi des espaces du MRU, on trouve $v_{0x} = 15,5\text{ m s}^{-1}$. La direction de la vitesse initiale est donnée par l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale : $\theta = \arctan v_{0y}/v_{0x} = 16\,°$.

---

49 Nous convenons de ce que y mesure les distances le long de la berge et x mesure les distances perpendiculairement au courant de la rivière. Comme la barque est orientée initialement vers la berge opposée, la direction de la vitesse initiale est exclusivement dans la direction x. (a) La distance à parcourir selon x est donnée par $x = v_0\,t$. La durée de la traversée vaut donc :

$$t = (0,5\text{ km}) / (2\text{ km h}^{-1}) = 0,25\text{ h}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(b) La vitesse du courant agit sur la barque pendant un quart d'heure pour la faire dévier vers l'aval. La distance parcourue vers la vallée vaut donc :

$$\Delta y = v_c\, t = (4 \text{ km h}^{-1})\ (0{,}25 \text{ h}) = 1 \text{ km}.$$

---

51 Dans ce mouvement à deux dimensions, la vitesse initiale est dirigée dans le sens des y décroissants. Ici, la vitesse est initialement dirigée vers le sol et ne fera que croître sous l'effet de l'accélération de la pesanteur. En introduisant la valeur du temps nécessaire pour que la balle atteigne la coordonnée horizontale $x = 12$ m, soit $t = x / v_{0x} = (12 \text{ m}) / (30 \text{ m s}^{-1}) \cos 5° = 0{,}4$ s, dans l'équation qui régit la position verticale de l'objet en MRUA, on trouve que :

$$y = (2{,}4 \text{ m}) - (30 \text{ m s}^{-1}) \sin 5° \ (0{,}4 \text{ s}) - (9{,}8 \text{ m s}^{-2})\ (0{,}4 \text{ s})^2 / 2 = 0{,}56 \text{ m}.$$

La balle ne passe donc pas au-dessus du filet.

---

52 Les électrons subissent une déviation verticale due à la présence d'un champ qui les accélère vers le haut. Les particules ont donc un mouvement accéléré suivant la verticale (axe y) et un mouvement rectiligne uniforme suivant l'horizontale (axe x). (a) La loi des espaces du MRU nous permet de trouver le temps :

$$\Delta t = \Delta x / v_{0x} = (0{,}2 \text{ m}) / (2 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}) = 1 \times 10^{-8} \text{ s}$$

pendant lequel les électrons restent entre les plaques. (b) A la sortie, les électrons sont déviés vers le haut et l'angle que fait leur vitesse avec la direction initiale vaut $\theta = \arctan v_y/v_x$, où v_y est donnée par la loi des vitesses du MRUA : $v_y = a\ \Delta t$, alors que la vitesse v_x est égale à la vitesse initiale. θ est donc donné par $\arctan a\ \Delta t/v_{0x} = 2{,}9°$. (c) La déviation verticale à la sortie se calcule par la loi des espaces du MRUA :

$$\Delta y = |-a\ \Delta t^2 / 2| = (1 \times 10^{14} \text{ m s}^{-2})\ (1 \times 10^{-8} \text{ s})^2 / 2 = 5 \text{ mm}.$$

---

53 On décompose le mouvement de la balle selon les deux directions horizontale x et verticale y. Suivant x, le mouvement est uniforme et la vitesse initiale de la balle vaut $v_{0x} = (30 \cos 5°) \text{ m s}^{-1}$. Suivant l'axe y, il s'agit d'un mouvement accéléré et la composante verticale de la vitesse initiale est donnée par :

$$v_{0y} = (30 \sin 5°) \text{ m s}^{-1}.$$

(a) La loi des espaces du MRUA permet de calculer le temps nécessaire pour arriver au sol ($y = 0$ m) en résolvant l'équation du second degré en t. On trouve $t = 1{,}03$ s. (b) La loi des espaces du MRU permet alors de trouver la distance horizontale parcourue pendant ce temps : $x = v_{0x}\, t = 30{,}8$ m.

---

56 Il suffit d'exprimer, à partir de la loi des espaces du MRU selon x, le temps comme $t = \Delta x / v_{0x}$ et d'introduire cette expression dans la loi des espaces du MRUA : $\Delta y = (v_{0y} / v_{0x})\ \Delta x + [-g / (2\ v_{0x}^2)]\ \Delta x^2$. Les coefficients multiplicatifs de Δx et

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Δx^2 sont des constantes (que l'on peut éventuellement appeler respectivement a et b), ce qui indique la nature parabolique de la trajectoire.

---

57 On peut décrire la progression verticale de la pierre par la loi du mouvement $y = H - v_0 \sin\theta\ t - (1/2)\ gt^2$ et, pour la direction horizontale, par la loi $x = v_0 \cos\theta\ t$. Elle atteint le sol ($y = 0$) à l'instant positif

$$t = \frac{\sqrt{2gH + v_0^2 \sin^2(\theta)} - v_0 \sin(\theta)}{g}$$

et aura progressé horizontalement de

$$P = \frac{v_0}{g} cos(\theta) \left(\sqrt{2gH + v_0^2 \sin^2(\theta)} - v_0 \sin(\theta) \right)$$

Après l'établissement d'une relation générale, comme celle qui vient d'être obtenue, il est important de contrôler qu'elle redonne bien les résultats attendus dans certains cas particuliers faciles à traiter. Par exemple, si la pierre est lancée verticalement, sans impulsion horizontale, $\theta = \pi / 2$, $\cos\ \theta = 0$ et la portée P est nulle. Si elle est lâchée sans vitesse initiale, $v_0 = 0$ et la portée est nulle aussi et, dans ce cas, la chute libre a une durée $t = \sqrt{2\ H / g}$, comme on pouvait s'y attendre.

---

58 Tintin saute à l'instant $t = 0$, à la distance d, encore inconnue, du point A. A ce moment, la vitesse du wagon a deux composantes, une composante horizontale $v_x = v_0\ \cos\alpha$ et une composante verticale, dirigée vers le bas, $v_y = v_0\ \sin\alpha$ ($\alpha = 3^o$), où v_0 est la vitesse du wagon au moment du saut, dans la direction de la pente. La loi du mouvement de Tintin vers le point B dans la rivière est donc, horizontalement, $x = v_x\ t$ et, verticalement, $y = -v_y\ t - (1/2)\ g\ t^2$, ces coordonnées étant comptées à partir du point où Tintin quitte le wagon. Pendant ce temps, le wagon poursuit son mouvement avec une accélération le long de la pente de $a_p = g\ \sin\alpha$. L'équation du mouvement du wagon est donc, toujours en suivant la pente, $x_w = v_0\ t + (1/2)\ a_p\ t^2$, ce qui correspond à la loi des vitesses $v_w = v_0 + a_p\ t$. Comme il passe au point A avec la vitesse de $10\ m\ s^{-1}$, on peut écrire que $v_0 + a_p\ t = 10\ m\ s^{-1}$ à l'instant t où Tintin touche l'eau, en B, à la verticale de A. A ce moment Tintin aura progressé horizontalement de $v_x\ t = d\ \cos\alpha$ (ce qui veut dire que $t = d\ /\ v_0$) et, verticalement, de $-v_y\ t - (1/2)\ g\ t^2 = -d\ \sin\alpha - 10\ m$. La vitesse v_0 peut être obtenue en écrivant $v_0 = 10\ m\ s^{-1} - a_p\ t$ ou $v_0 = 10\ m\ s^{-1} - (g\ d\ /\ v_0)\ \sin\alpha$. Les valeurs de v_0 tirées de cette équation du second degré, ainsi que la valeur de la durée de la chute $t = d\ /\ v_0$, portées dans la dernière équation, permettent de déterminer la longueur d à parcourir. On trouve deux valeurs, $d = -15{,}3\ m$ et $d = 13{,}2\ m$, dont seule la dernière a un sens physique, puisqu'elle correspond à une position

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

en amont du point A, alors que, pour l'autre, le wagon aurait dépassé le point A au moment du saut.

---

59 L'origine des ordonnées verticales, y, dirigées vers le haut, est placée au niveau du trou et l'origine des abscisses x, horizontales, dirigées vers le trou, est placée au niveau de la balle de golf, avant le tir. La balle part donc de la position initiale ($x = 0$, $y = 2$ m). Si la vitesse initiale de la balle est v_0 et l'angle de tir est θ, par rapport à l'horizontale, la vitesse initiale est ($v_x = v_0 \cos \theta$, $v_y = v_0 \sin \theta$). Dans ces conditions, les équations du mouvement s'écrivent $x = v_0 \cos \theta \, t$ et $y = 2 \text{ m} + v_0 \cos \theta \, t - (1/2) \, g \, t^2$. Pour obtenir une équation représentant la trajectoire, on élimine le temps en le tirant de la première équation et en le portant dans la seconde. On trouve la parabole :

$$g \, x^2 - 2 \, v_0 \, x \cos \theta \sin \theta = v_0^2 \, (4 - 2 \, y) \cos^2 \theta.$$

Cette parabole, qui passe automatiquement par le point ($x = 0$, $y = 2$ m), doit aussi passer par les points ($x = 200$ m, $y = 0$) et ($x = 180$ m, $y = 12$ m). Ces deux conditions suffisent pour déterminer la vitesse initiale et l'angle de tir : $v_0 = 46{,}04 \text{ m s}^{-1}$ et $\theta = 32{,}84\,°$.

---

60 On cherche d'abord le point de chute de la balle. On place l'axe y dans la direction du tir et la direction verticale est la direction z. Le frappeur étant à l'origine, l'équation du mouvement horizontal de la balle est $y = v_0 \cos \alpha \, t$ et l'équation du mouvement vertical est $z = v_0 \sin \alpha \, t - (1/2) \, g \, t^2$, l'angle de tir étant $\alpha = 55\,°$ et la vitesse initiale $v_0 = 35 \text{ m s}^{-1}$.

En recherchant l'instant t où la balle touche le sol ($z = 0$) et en déterminant l'abscisse y de la balle à ce moment, on trouve le point d'impact à une distance $y = (v_0^2 / g) \sin (2 \alpha)$ (c'est-à-dire $y = 117{,}5$ m). Le temps de vol est alors $t = y / (v_0 \cos \alpha) = 5{,}853$ s. Comme le voltigeur se trouve à 85 m, à un angle $\beta = 22\,°$ de la direction de tir y (donc à un angle $\gamma = 90\,° - 22\,° = 68\,°$ de la direction x), il peut être localisé au moment du tir, au point ($x = [85 \text{ m}] \cos \gamma$, $y = [85 \text{ m}] \sin \gamma$), soit ($x = 31{,}84$ m, $y = 78{,}81$ m). La distance au point de chute de la balle ($x = 0$, $y = 117{,}5$ m) est :

$$\ell = \sqrt{(31,84 \text{ m})^2 + (117,5 \text{ m} - 78,81 \text{ m})^2},$$

ce qui représente $\ell = 50{,}08$ m.

L'angle θ qui définit la direction de course du voltigeur est l'angle sous lequel celui-ci voit la trajectoire de la balle. C'est l'angle, vu de la position du voltigeur, entre la direction de l'origine ($x = -[85 \text{ m}] \cos \gamma$, $y = -[85 \text{ m}] \sin \gamma$) et la direction de l'impact de la balle ($x = -31{,}84$ m, $y = 117{,}5$ m $- 78{,}81$ m). On trouve $\theta = 118{,}5\,°$. La vitesse nécessaire pour arriver à temps est :

$$50{,}08 \text{ m} / 5{,}853 \text{ s} = 8{,}6 \text{ m s}^{-1}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

61 Au moment de la première mesure de distance, qui donne $d_1 = 3000$ m, le bateau se trouve à la distance horizontale :

$$l_1 = \sqrt{(3000\text{ m})^2 - (400\text{ m})^2} = 2973\text{ m de l'avion.}$$

Au moment de la deuxième mesure, l'avion a progressé de :

$$l_a = (300\text{ km h}^{-1})\,(5\text{ s}) = (300)\,(1000/3600\text{ m s}^{-1})\,(5\text{ s}) = 416{,}67\text{ m.}$$

La distance horizontale entre l'avion et le bateau est alors :

$$l_2 = \sqrt{(2650\text{ m})^2 - (400\text{ m})^2} = 2619{,}6\text{ m.}$$

En 5 s, le bateau a donc progressé de :

$$l_2 + l_a - l_1 = 2619{,}6\text{ m} + 416{,}67\text{ m} - 2973\text{ m} = 63\text{ m.}$$

La vitesse du bateau est donc (a) 63 m / (5 s) = 12,6 m s^{-1}. La loi du mouvement du colis est, verticalement, $y = h - (1/2)\,g\,t^2$ et le temps de chute vaut (b) $t = \sqrt{2\,h/g} = 9$ s. Pendant ce temps, le colis progresse horizontalement de (300) (1000/3600 m s^{-1}) (9 s) = 753 m. Comme, par ailleurs, pendant ces 9 s, le bateau progresse de (12,61 m s^{-1}) (9 s) = 113 m, l'avion devra se trouver, en distance horizontale, à (c) (753 m) − (113 m) = 639 m du bateau au moment de larguer. L'avion progresse à vitesse uniforme suivant la loi $l_a = (300)\,(1000/3600\text{ m s}^{-1})\,t$, alors que le bateau se trouve en :

$$l_b = (2973\text{ m}) + (12{,}6\text{ m s}^{-1})\,t.$$

Le moment de larguer survient lorsque la distance horizontale entre l'avion et le bateau est exactement $l_b - l_a = 639$ m. Ceci se produit à l'instant (d) :

$$t = (639\text{ m} - 2973\text{ m}) / (12{,}6\text{ m s}^{-1} - 83{,}3\text{ m s}^{-1}) = 33\text{ s.}$$

Chapitre 3

Les lois de Newton

RAPPELS

On définit la masse m d'un objet par le rapport de son poids à l'accélération de la pesanteur g.

La masse volumique d'un matériau est la masse d'un échantillon de ce matériau divisée par son volume, soit $\rho = m / V$. La densité d'un matériau est le rapport entre sa masse volumique et la masse volumique de l'eau à 0 °C et à la pression atmosphérique normale.

Les trois lois de Newton permettent de prévoir le mouvement d'un objet lorsque celui-ci est soumis à des forces. La première loi exprime que tout objet conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme en l'absence de forces agissant sur lui. La deuxième loi de Newton permet de calculer la force $\mathbf{F}$ nécessaire pour fournir une accélération $\mathbf{a}$ à un objet par $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$, où m est la masse de l'objet. La troisième loi établit que si un objet exerce une force $\mathbf{F}$ sur un second objet, ce dernier exerce, sur le premier, une force de même grandeur mais opposée $(-\mathbf{F})$.

Tous les objets exercent entre eux des forces de gravitation. Les forces qui s'exercent entre deux sphères ou deux particules ponctuelles de masses m et m' distantes de r s'expriment par $F = G\,m\,m' / r^2$, où G représente la constante de gravitation universelle. Sa valeur est $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

Lorsqu'un objet de masse m subit une accélération réelle $\mathbf{a}_p$ dans un système lui aussi en mouvement de translation accéléré (rectiligne, circulaire ou autre) soumis à une accélération $\mathbf{a}_l$, nous pouvons calculer le poids effectif de cet objet (mesuré par un observateur situé dans ou sur le système en mouvement) par $\mathbf{W}_{eff} = m\,\mathbf{a}_p - m\,\mathbf{a}_l$.

Lorsqu'une force est appliquée à un objet au repos sur une surface et lorsque cette force dépasse la force de frottement statique maximale $\mu_s N$, il commence à se mouvoir. La force de glissement ou de frottement cinétique $\mu_c N$ est habituellement inférieure à la force de frottement statique.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

SOLUTION DES EXERCICES

3.1 FORCE, POIDS ET MASSE GRAVITATIONNELLE

1 La direction de la force résultante est donnée par la direction (sud-est) de la diagonale du rectangle construit sur les deux forces. L'angle d'inclinaison de cette résultante par rapport à l'horizontale est donné par :

$$\theta = \arctan(15/20) = 37\,°.$$

Sa grandeur est égale à la longueur de cette diagonale, soit :

$$\sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ N}.$$

---

2 Comme les deux forces ont la même direction mais des sens opposés, la résultante a la direction des deux autres forces et le sens de la plus grande, c'est-à-dire dirigée vers le sud. Sa grandeur est égale à la différence des deux normes : (20 N) - (10 N) = 10 N.

---

3 Il faut d'abord décomposer les deux forces suivant les deux axes orthogonaux x et y de l'espace à deux dimensions. La force de gauche a les composantes (0 N, -10 N) suivant x et y respectivement alors que les composantes de celle de droite valent (10 cos 60 ° = 5 N, -10 sin 60 ° = -8,66 N). La grandeur de la résultante est donnée par $\sqrt{(0 + 5)^2 + (-10 - 8,66)^2} = 19,3$ N. L'angle que fait la résultante avec l'horizontale est donné par $\theta = \arctan 18,66/5 = 75\,°$.

---

4 Le poids P s'exprime par le produit de la masse m par l'accélération de la pesanteur g. La masse de l'homme vaut donc :

$$m = P / g = (980 \text{ N}) / (9,8 \text{ m s}^{-2}) = 100 \text{ kg}.$$

3.2 LA MASSE VOLUMIQUE

9 La masse m d'un composé se calcule par le produit ρV. La masse d'un litre de sang vaut $m = (1059,5 \text{ kg m}^{-3})\ (1 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 1,0595$ kg.

---

12 Le volume de la barre est donné par :

$$V = S\,L = (\pi R^2)\,L = \pi\ (0,01 \text{ m})^2\ (0,2 \text{ m}) = 62,8 \times 10^{-6} \text{ m}^3.$$

La masse m de la barre vaut :

$$m = \rho\ V = (7800 \text{ kg m}^{-3})\ (62,8 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0,490 \text{ kg}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

13 (a) Le volume du noyau d'uranium est calculé par :

$$V = 4\,\pi\,R^3 / 3 = 4\,\pi\,(8{,}7 \times 10^{-15}\ \text{m})^3 / 3 = 2{,}76 \times 10^{-42}\ \text{m}^3.$$

La masse volumique de ce noyau vaut :

$$\rho = m / V = (3{,}5 \times 10^{-25}\ \text{kg}) / (2{,}76 \times 10^{-42}\ \text{m}^3) = 1{,}27 \times 10^{17}\ \text{kg m}^{-3}.$$

(b) La densité du noyau d'uranium est donnée par :

$$d = (1{,}27 \times 10^{17}\ \text{kg m}^{-3}) / (1 \times 10^{3}\ \text{kg m}^{-3}) = 1{,}27 \times 10^{14}.$$

La densité est une grandeur sans unité.

---

17 Le baril est une unité de volume qui vaut 42 gallons soit :

$$V = (42)\,(3{,}786 \times 10^{-3}\ \text{m}^3) = 159 \times 10^{-3}\ \text{m}^3.$$

A partir de la densité d du pétrole, on peut retrouver sa masse volumique $\rho = d\ \rho_{eau} = (0{,}8)\ (1000\ \text{kg m}^{-3}) = 800\ \text{kg m}^{-3}$. La masse du baril de pétrole vaut donc $m = \rho\ V = (800\ \text{kg m}^{-3})\ (159 \times 10^{-3}\ \text{m}^3) = 127\ \text{kg}$.

---

19 Un volume de 1 m^3 d'acide de batterie a une masse de 1290 kg. Dans ce même volume, l'acide sulfurique contribue à 35% de la masse soit :

$$(1290\ \text{kg})\ (35/100) = 451{,}5\ \text{kg}.$$

Nous pouvons calculer la masse d'acide sulfurique contenue dans $1 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$ d'acide de batterie comme le millième de cette masse soit :

$$(451{,}5\ \text{kg})\ (1 \times 10^{-3}) = 0{,}4515\ \text{kg}.$$

---

20 (a) Il suffit de faire le rapport de la masse volumique de l'air à 100 °C et de celle de l'air à 0 °C, soit $(0{,}95\ \text{kg m}^{-3}) / (1{,}29\ \text{kg m}^{-3}) = 0{,}736$. La masse volumique de l'air à 100 °C vaut donc 73,6% de la masse volumique de l'air à 0 °C. (b) Le même calcul pour l'eau conduit à un rapport égal à 0,958. La masse volumique de l'eau à 100 °C vaut donc 95,8% de la masse volumique de l'eau à 0 °C.

3.3 LA PREMIÈRE LOI DE NEWTON. L'ÉQUILIBRE

22 Dès que l'objet en mouvement continue à se mouvoir à vitesse constante, la première loi de Newton est vérifiée. Il s'agit des cas présentés aux points (a) et (c). Dans les deux autres cas, l'accélération de la pesanteur (b) ou de l'avion (d) agit sur la personne pour en modifier sa vitesse.

---

23 Pour conserver un mouvement circulaire, il faut qu'une force maintienne la personne sur sa trajectoire. Cette force est responsable, à tout moment, de l'existence d'une accélération dirigée vers le centre de la trajectoire. Les observations faites par la personne ne sont donc pas en accord avec la première loi de Newton,

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

et ceci, même si la vitesse est constante.

---

25 (a) Si la vitesse de l'avion est maintenue constante, la force résultante est nulle. (b) Puisque l'avion maintient une altitude constante, la force de poussée exercée par l'air verticalement et vers le haut, équilibre exactement le poids de l'avion. Cette poussée vaut donc $m\,g$ = (2000 kg) (9,8 m s^{-2}) = 19600 N.

---

27 Les différentes forces peuvent être décomposées suivant les axes orthogonaux x et y et il faut que les composantes de la résultante soient nulles puisque le dispositif est en équilibre de translation. Ceci impose, suivant x,

$$F_1 \cos 30° - F_2 \cos 30° = 0, \text{ c'est-à-dire } F_1 = F_2$$

et suivant y, $F_1 \sin 30° + F_2 \sin 30° - W = 0$. On déduit que $2\,F_1 \sin 30° = W$ et donc $F_1 = F_2 = W$.

---

29 L'équilibre est stable puisque les câbles exercent des forces qui ramènent sans cesse le dispositif à sa position d'équilibre.

---

30 (a) La caisse est en équilibre dès que sa vitesse reste constante. (b) Sa vitesse horizontale n'est plus nulle; son mouvement est donc accéléré. (c) Sa vitesse augmente brusquement; elle subit donc une accélération.

3.4 LA TROISIÈME LOI DE NEWTON

33 (a) Les forces appliquées à l'avion sont, d'une part, la traction exercée par la barre et, d'autre part, les forces de frottement des structures extérieures sur l'air, des pneus sur la piste et des pièces mécaniques en mouvement dans le train de roues. (b) Les forces appliquées au camion sont la force motrice, la force de traction appliquée par la barre et les forces de frottement associées au mouvement du camion. (c) La vitesse de l'ensemble des éléments étant constante, la force résultante sur l'avion est nulle et il en est de même pour (d) le camion et (e) la barre de fer. (f) La force motrice est la réaction à la force appliquée par les roues sur la piste; la force de traction sur la barre au niveau du point d'attache est la réaction à la traction exercée par la barre sur le camion; la force de traction sur la barre au niveau du point d'attache sur l'avion est la réaction à la force de traction exercée par la barre sur l'avion.

---

34 (a) Sa vitesse restant constante, l'avion est en équilibre. (b) Les deux forces horizontales qui interviennent sont la poussée exercée par les hélices sur l'air vers l'arrière et la réaction à cette force qui propulse l'avion vers l'avant.

---

35 (a) La force qui s'exerce sur la balle est son poids, qui s'applique vers le bas sur la main de la fillette. La réaction qui lui est associée est la force exercée vers le haut, par la main de la fillette sur la balle. (b) La balle est dans le champ de pesanteur et est donc soumise à la force gravitationnelle vers le bas. La réaction qui lui est associée est la force exercée vers le haut, par la balle, sur la Terre.

3.5 LA DEUXIÈME LOI DE NEWTON

37 (a) Au moment où il quitte le sol, le sauteur est soumis à deux forces : l'une est l'attraction gravitationnelle de la Terre $m\,g$ et l'autre, la force qui lui donne son accélération vers le haut $m\,a$. La personne exerce donc sur le sol une force de grandeur $m\,a$ et la réaction à cette force, exercée par le sol sur le sauteur, vaut également $m\,a$. La force totale exercée par la Terre est donc donnée par $F = m\,(a + g) = (50\text{ kg})\,[(20 + 9,8)\text{ m s}^{-2}] = 1490\text{ N}$. (b) Le rapport de la force exercée par le sol au poids du sauteur se calcule par :

$$F / (m\,g) = (1490\text{ N}) / [(50\text{ kg})\,(9,8\text{ m s}^{-2})] = 3,04.$$

---

40 Par la deuxième loi de Newton, l'accélération fournie à la balle se calcule par $a = F / m = (5000\text{ N}) / (0,15\text{ kg}) = 33,3 \times 10^3\text{ m s}^{-2}$.

3.6 QUELQUES EXEMPLES DES LOIS DE NEWTON

44 Le mouvement résultant de l'homme est un MRUA vertical : la somme des forces qui s'exercent sur la personne est égale à ma. La tension dans le câble est une force vers le haut alors que le poids de l'homme est une force vers le bas. (a) Si le mouvement résultant est vers le haut, on peut écrire : $T - m\,g = m\,a$. La tension vaut alors $T = m\,(g + a) = (60\text{ kg})\,[(9,8 + 5)\text{ m s}^{-2}] = 888\text{ N}$. (b) Si le mouvement résultant est vers le bas, on écrit $T - m\,g = -m\,a$ et la valeur de T devient $T = m\,(g - a) = (60\text{ kg})\,[(9,8 - 5)\text{ m s}^{-2}] = 288\text{ N}$.

---

46 Il faut que le poids apparent de la dame ne dépasse pas 400 N. Celui-ci vaut $W_{eff} = m\,g - m\,a$, où a est l'accélération vers le bas. Il faut donc que $a > g - W_{eff} / m$ c'est-à-dire $a > (9,8\text{ m s}^{-2}) - (400\text{ N}) / (55\text{ kg}) = 2,5\text{ m s}^{-2}$.

---

47 Pour un charroi composé d'une locomotive de 4×10^4 kg et d'un train de wagons de 2×10^5 kg, la force résultante produisant l'accélération est :

$$F = [(2 \times 10^5) + (4 \times 10^4)\text{ kg}]\,(0,5\text{ m s}^{-2}) = 1,2 \times 10^5\text{ N}.$$

Si la masse du train est réduite à 1×10^5 kg, la masse totale ne représente plus

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

que $[(1 \times 10^5) + (4 \times 10^4)\ \text{kg}]$ et, la force motrice restant la même, l'accélération devient $(1{,}2 \times 10^5\ \text{N}) / (1{,}4 \times 10^5\ \text{kg}) = 0{,}86\ \text{m s}^{-2}$.

---

48 (a) En introduisant dans la loi des espaces du MRUA l'expression du temps nécessaire pour arrêter la voiture, obtenu par la loi des vitesses, on détermine la décélération $a = 11{,}1\ \text{m s}^{-2}$. (b) La force résultante agissant pendant la collision est donnée par $F = m\,a = (1000\ \text{kg})\ (11{,}1\ \text{m s}^{-2}) = 11{,}1 \times 10^3\ \text{N}$.

---

49 La loi des vitesses du MRUA permet de déterminer l'accélération que subit la balle : $a = (45\ \text{m s}^{-1}) / (0{,}004\ \text{s}) = 11250\ \text{m s}^{-2}$. La force résultante agissant sur la balle vaut $F = m\,a = (0{,}058\ \text{kg})\ (11250\ \text{m s}^{-2}) = 652{,}5\ \text{N}$.

3.7 LES FORCES DE GRAVITATION

50 L'objet est soumis simultanément à l'attraction gravitationnelle de la Terre et à celle de la Lune. On désigne par x_{OT} la distance de l'objet à la Terre et par $R_{TL} - x_{OT}$ la distance objet-Lune où R_{TL} représente la distance Terre-Lune. Pour que l'objet soit en équilibre, il faut que :

$$G\,m_T\,m_O / x_{OT}^2 = G\,m_L\,m_O / (R_{TL} - x_{OT})^2.$$

Après simplifications, on obtient une équation du second degré en x_{OT} fournissant les deux valeurs possibles $x_{OT} = 4{,}38 \times 10^5$ km et $x_{OT} = 3{,}5 \times 10^5$ km.

---

51 Après simplifications, le rapport des deux attractions gravitationnelles donne $F_{TL} / F_{SL} = m_T\,R_{SL}^2 / (m_S\,R_{TL}^2)$, soit 0,444.

---

52 La formule de la force gravitationnelle fait intervenir une division par une distance mise au carré. Si la distance augmente d'un facteur 3, la force est réduite d'un facteur $3^2 = 9$. La force qui s'exerce sur la navette à $3\,R_T$ vaut donc $(144000\ \text{N}) / 9 = 16000\ \text{N}$.

3.8 LE POIDS

53 Le rapport des poids sur Mars et sur la Terre est égal au rapport des accélérations de pesanteur respectives. $P_M / P_T = g_M / g = 0{,}369$. Le poids de la personne vaut donc, sur Mars : $P_M = 0{,}369\ (800\ \text{N}) = 296\ \text{N}$.

---

54 Le poids d'un objet à la surface d'une planète peut s'exprimer de deux façons différentes : $m\,g$ et $G\,m_P\,m / R_P^2$ où m_P représente la masse de la planète

considérée et R_P son rayon. On trouve que :

$$R_P = \sqrt{G\, m_P / g}$$
$$= [(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2})\ (6{,}42 \times 10^{23}\ \text{kg}) / (3{,}62\ \text{m s}^{-2})]^{1/2}$$
$$= 3439\ \text{km}.$$

---

56 En divisant membre à membre les deux côtés des égalités entre les deux expressions du poids sur Terre et sur la planète Y, on trouve :

$$g / g_Y = (G\, m_T / R_T^2) / (G\, m_Y / R_Y^2).$$

Après simplifiation de G et en utilisant les relations entre les rayons et les masses, on trouve $g_Y = g / 3$ soit 3,27 m s^{-2}. Le poids de l'astronaute sur la planète Y vaut donc $m\, g_Y = (70\ \text{kg})\ (3{,}27\ \text{m s}^{-2}) = 229$ N.

---

58 (a) Son poids au sol se calcule comme suit : $m\, g = (50\ \text{kg})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 490$ N.
(b) En utilisant les deux formules de l'attraction gravitationnelle pour exprimer le poids à une distance fixée du centre de la Terre, le rapport entre le poids P_h à l'altitude h et le poids P à la surface de la Terre est donné par :

$$P_h / P = R_T^2 / (R_T + h)^2 = 0{,}998.$$

Son poids varie donc de 2 millièmes.

3.9 LE POIDS EFFECTIF

59 L'accélération du système correspond à l'accélération de l'avion : $\mathbf{a}_1 = 3\,\mathbf{g}$ tandis que celle de l'objet - le pilote - est égale à l'accélération de la pesanteur $\mathbf{a}_p = \mathbf{g}$. Ces deux accélérations sont dirigées vers le bas; leur projection sur la verticale est donc négative. La grandeur du poids effectif est calculée par :

$$W_{eff} = -m\, g\ -\ (-3\, m\, g) = 2\ W\ ;$$

il est dirigé vers le haut comme l'indique l'addition vectorielle de $m\,\mathbf{g}$ (vers le bas) et de $-3\, m\,\mathbf{g}$ (vers le haut).

---

61 (a) Il s'agit d'un MRUA d'accélération négative. La loi des vitesses nous donne la valeur de la décélération : $a = v_0 / t = (30\ \text{m s}^{-1}) / (10\ \text{s}) = 3\ \text{m s}^{-2}$.
(b) La décélération $\mathbf{a}_1$ du véhicule est dans le sens inverse de sa propagation. L'accélération $\mathbf{a}_p$ du conducteur est égale à $\mathbf{g}$, verticalement, vers le bas. Le poids effectif a la grandeur de la diagonale du rectangle construit sur ces deux côtés :

$$W_{eff} = m \sqrt{a_l^2 + g^2} = m\, g\ [((3\ \text{m s}^{-2}) / (9{,}8\ \text{m s}^{-2}))^2 + 1]^{1/2} = 1{,}046\, m\, g.$$

Sa direction fait, avec l'horizontale, un angle :

$$\theta = \arctan g/a_l = \arctan[(9{,}8\ \text{m s}^{-2}) / (3\ \text{m s}^{-2})] = 73\,°.$$

---

62 (a) L'accélération de la navette $\mathbf{a}_l$ est dirigée vers le haut et a la même grandeur

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

que celle de l'astronaute $\mathbf{a}_p$ qui est dirigée vers le bas. Le poids effectif de l'astronaute a donc comme valeur $W_{eff} = |m\ (-g\ -\ a_l)| = 2\ m\ g$. (b) A cette distance, l'accélération $\mathbf{a}_p$ de l'astronaute est donnée par $G\ m_T\ /(2\ R_T)^2 = g\ /\ 4$. On trouve donc un poids effectif de :

$$W_{eff} = |m\ (-a_p\ -\ a_l)| = 5\ m\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ /\ 4 = 12{,}25\ m\ \text{N}.$$

3.10 LE FROTTEMENT

66 Le mouvement résultant de la boîte est un MRUA dans le sens de l'application de la force extérieure. Les forces qui s'exercent sur la boîte sont la force appliquée F_a de 40 N et la force de frottement F_f dans le sens inverse de propagation ; on peut donc écrire : $F_a\ -\ F_f = m\ a$ où $F_f = \mu_c\ N = \mu_c\ m\ g$. On trouve que $a = 1{,}96\ \text{m s}^{-2}$.

---

70 (a) Pour mettre le traîneau en mouvement, il faut exercer une force $F_{f_s} = \mu_s\ N$, soit (0,6) (60000 N) = 36000 N. (b) Pour conserver la vitesse, il faut exercer une force égale à $\mu_c\ N$ = (0,4) (60000 N) = 24000 N.

---

71 Supposons que l'on puisse mesurer la longueur d du plan incliné, lequel fait un angle θ par rapport à l'horizontale. On lâche, du repos, un objet du haut du plan et on mesure le temps Δt nécessaire pour en atteindre le bas. La loi des espaces du MRUA nous permet de déterminer son accélération $a = 2\ d\ /\ (\Delta t)^2$. Au cours du mouvement, les différentes forces qui agissent sur le bloc sont la force de frottement F_f, le poids W de l'objet, la réaction N du plan sur l'objet, le mouvement résultant étant un MRUA vers le bas du plan. On peut écrire le système des deux équations suivantes : $N = W\ \cos\theta$ et $-F_f + W\ \sin\theta = m\ a$. La seconde équation dans laquelle on introduit la première permet de déterminer le coefficient de frottement cinétique : $-\ \mu_c\ W\ \cos\theta + W\ \sin\theta = m\ a$; on déduit, en utilisant $W = m\ g$, l'expression $\mu_c = \tan\theta\ -\ a\ /(g\ \cos\theta)$.

SOLUTION DES PROBLÈMES

72 La masse volumique moyenne d'un objet se calcule par la somme des masses des différents constituants divisée par le volume total de cet objet. La masse du noyau vaut $\rho\ V_{noyau} = \rho\ (4/3)\ \pi\ (r/2)^3$ tandis que la masse de la couronne se calcule par $(\rho/2)\ [(4/3)\ \pi\ r^3\ -\ (4/3)\ \pi\ (r/2)^3] = (14/3)\ \rho\ \pi\ (r/2)^3$. La masse totale M vaut donc $6\ \rho\ \pi\ (r/2)^3$. La masse volumique se calcule par $M\ /\ V = 9\ \rho\ /\ 16$.

---

77 Pour calculer la décélération des jambes et des pieds, on introduit l'expression du temps nécessaire à l'arrêt dans la loi des espaces. On trouve la valeur de l'accélération subie par les pieds : $a = v_0^2 / (2\,x)$. Le corps entier est soumis à cette accélération augmentée de l'accélération de la pesanteur qui agit aussi sur tout le corps. La force moyenne se calcule donc par $F = m\,(g + a)$.
(a) La décélération des pieds vaut $a = (5\text{ m s}^{-1})^2 / [2\,(0{,}15\text{ m})] = 83{,}3\text{ m s}^{-2}$. La force moyenne a pour valeur $F = (55\text{ kg})\,[(83{,}3 + 9{,}8)\text{ m s}^{-2}] = 5120\text{ N}$.
(b) L'accélération a vaut $(5\text{ m s}^{-1})^2 / [2\,(0{,}5\text{ m})] = 25\text{ m s}^{-2}$ et la grandeur de la force moyenne est :

$$F = (55\text{ kg})\,[(25 + 9{,}8)\text{ m s}^{-2}] = 1914\text{ N}.$$

---

78 Il faut que la résultante F_R des forces qui agissent sur la corde soit inférieure à la résistance de la corde. Ces forces sont le poids du poisson $m\,g$, la tension qu'il exerce sur la corde T et la force due à l'accélération qu'on lui donne $m\,a$. Il faut donc que $m\,g - T - m\,a \leqslant F_R$. On trouve que $a \geqslant 23{,}5\text{ m s}^{-2}$.

---

79 (a) La masse à accélérer est $m_T = 3\,(1{,}2 \times 10^5\text{ N}) / (9{,}8\text{ m s}^{-2}) = 36735\text{ kg}$. La force motrice F_T sert à vaincre les frottements et à accélérer la rame. On peut donc écrire $F_T = 3\,F_f + m_T\,a$. On en déduit la valeur de l'accélération $a = 1{,}225\text{ m s}^{-2}$.
(c) Les forces qui agissent sur le dernier wagon de la rame sont la force de frottement F_f dans le sens inverse du mouvement et la tension T_2 dans la corde, dans la direction de l'accélération : $T_2 - F_f = m\,a$. La tension vaut donc $T_2 = (1{,}2 \times 10^5\text{ N})\,(1{,}225\text{ m s}^{-2}) / (9{,}8\text{ m s}^{-2}) + (1 \times 10^3\text{ N}) = 16000\text{ N}$.
(b) On peut écrire, pour le deuxième wagon, $T_1 - F_f - T_2 = m\,a$ d'où on déduit la tension :

$$T_1 = (1{,}2 \times 10^5\text{ N})\,(1{,}225\text{ m s}^{-2}) / (9{,}8\text{ m s}^{-2}) + (1 \times 10^3\text{ N}) + (16 \times 10^3\text{ N}) = 32000\text{ N}.$$

---

83 L'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre peut s'exprimer par $g = G\,m_T / R_T^2$. De même, à la surface de Vénus, $g_V = G\,m_V / R_V^2$. En comparant les deux équations, on déduit :

$$g_V / g = (m_V/m_T)\,(R_T^2/R_V^2) = 0{,}82\,(6{,}4 \times 10^6\text{ m})^2 / (6{,}1 \times 10^6\text{ m})^2 = 0{,}9.$$

L'accélération de la pesanteur sur Vénus vaut donc :

$$g_V = 0{,}9\,(9{,}8\text{ m s}^{-2}) = 8{,}85\text{ m s}^{-2}.$$

---

84 (a) La masse totale du plomb est donnée par :

$$m = \rho\,V = (11300\text{ kg m}^{-3})\,(4/3)\,\pi\,(0{,}1\text{ m})^3 = 47{,}3\text{ kg}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(b) Si l'on considère que toute la masse est rassemblée au centre de chaque bille, la force gravitationnelle se calcule par $F = G\,m^2 / (0{,}2\text{ m})^2$, soit $3{,}73 \times 10^{-6}$ N.

---

88 On suppose que le mouvement de l'ensemble est dirigé vers la droite. Pour la masse centrale, la deuxième loi de Newton permet d'écrire $-T_1 + T_2 = m\,a$ où T_1 et T_2 sont les tensions dans les ficelles de gauche et de droite, respectivement. La même loi appliquée à la masse de gauche permet de déterminer l'expression de $T_1 = m\,(a + g)$ alors qu'appliquée à la masse de droite, on trouve $T_2 = 2\,m\,(g - a)$.

(b) En introduisant ces deux expressions dans la première équation, on trouve que $a = 0{,}25\,g$.

(a) De là, on déduit les valeurs de $T_1 = 1{,}25\,m\,g$ et de $T_2 = 1{,}5\,m\,g$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit

Chapitre 4

La statique

RAPPELS

Le moment τ d'une force traduit son aptitude à provoquer un mouvement de rotation. Le moment de force de **F** est, en grandeur, la quantité $F\ r\ \sin\theta$ où r est la distance entre un point P situé sur l'axe de rotation et le point d'application de la force **F** et où θ est l'angle entre les directions des vecteurs **F** et **r**. Le moment de force est un vecteur $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ perpendiculaire au plan formé par **r** et **F**.

Un corps est en équilibre de translation lorsque la résultante des forces est égale à zéro et en équilibre de rotation lorsque le moment résultant des forces par rapport à un point quelconque est nul.

Le centre de gravité est un point particulier d'un système où l'on considère, aux fins d'étudier son mouvement de translation, que tout le poids et toute la masse sont concentrés. Il peut être déterminé en formant la somme $\mathbf{r}_{CG} = \Sigma m_i\ \mathbf{r_i} / \Sigma m_i$ où m_i et $\mathbf{r}_i$ sont la masse et la position des différents constituants du système.

L'avantage mécanique d'un levier s'exprime par le rapport de la force résistante F_R à la force appliquée F_A.

SOLUTION DES EXERCICES

4.1 LES MOMENTS DE FORCES

3 (a) $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ et $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ puisque l'angle entre les deux vecteurs qui interviennent dans le produit vectoriel est nul ou égal à 180 °. Le sinus de ces angles est nul ;

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

le produit vectoriel l'est donc aussi. (b) $\mathbf{A} \times \mathbf{D}$ et $\mathbf{A} \times \mathbf{E}$ par application du produit vectoriel. (c) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. (d) $\mathbf{A} \times \mathbf{D}$ et $\mathbf{A} \times \mathbf{E}$. En effet, les grandeurs des deux vecteurs valent respectivement (AD) et (AE) $\sqrt{2}/2$ et D est égal à $(\sqrt{2}/2)\,E$.

---

5 Le bras de levier de $\mathbf{F}_1$ vaut (4 m) $\sin 90° = 4$ m et celui de $\mathbf{F}_2$ vaut : (2 m) $\sin 60° = 1{,}732$ m.

---

6 Le moment de force de $\mathbf{F}_1$ vaut (4 m) (5 N) $\sin 90° = 20$ N m et celui de $\mathbf{F}_2$ est égal à $-$(2 m) (10 N) $\sin 60° = -17{,}32$ N m, négatif puisque le moment de force est horlogique.

4.2 EQUILIBRE DES CORPS SOLIDES

8 Pour être en équilibre de translation, il faut que la somme des forces qui agissent sur la barre soit nulle suivant les deux directions x et y, c'est-à-dire $F_1 - F_2 \sin 60° = 0$ et $-F_2 \cos 60° = 0$, ce qui n'est déjà pas vérifié. De plus, le moment de force par rapport à P vaut :

$$(4\text{ m})\,(5\text{ N})\sin 90° - (2\text{ m})\,(10\text{ N})\sin 60° = 2{,}68\text{ N m}.$$

Le moment résultant est positif; la barre se met donc à tourner dans le sens anti-horlogique.

---

11 L'équilibre de translation se traduit par l'équation $F + F_2 - F_1 = 0$ et l'équilibre de rotation par rapport au point d'application de $\mathbf{F}_2$ s'écrit :

$$(0{,}02\text{ m})\,F_1 - (0{,}03\text{ m})\,(0{,}5\text{ N}) = 0.$$

On trouve la valeur de $F_1 = 0{,}75$ N. La première équation nous donne alors :

$$F_2 = (0{,}75\text{ N}) - (0{,}5\text{ N}) = 0{,}25\text{ N}.$$

---

13 (a) En considérant l'équilibre de translation, on écrit :

$$T - W_1 - W - W_2 = 0.$$

La force exercée par le point d'appui vaut donc $T = W + W_1 + W_2$. (b) L'équilibre de rotation par rapport au point d'appui, $x_1\,W_1 - x_2\,W_2 = 0$, permet de déterminer le rapport $x_2 / x_1 = W_1 / W_2$.

4.3 LE CENTRE DE GRAVITÉ

16 Par définition du centre de gravité,

$$(0{,}8\text{ m}) = [(10\text{ N})\,(0\text{ m}) + P\,(1\text{ m})] / [P + (10\text{ N})].$$

On peut donc calculer la grandeur de $\mathbf{P}$ placé à 1 m : $P = 40$ N.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit

18 Le centre de gravité du porteur avec son sac, par rapport au sol, peut être évalué comme suit : $x_{CG} = [(80\ \text{kg})\ (1{,}1\ \text{m}) + (20\ \text{kg})\ (1{,}3\ \text{m})] / [(80 + 20)\ \text{kg}] = 1{,}14\ \text{m}$.

4.4 EQUILIBRE ET STABILITÉ

21 La table reste stable tant que la projection verticale du centre de gravité appartient au polygone de sustentation de la table. La situation limite correspond à un angle θ donné par $\theta = \arctan [(0,\ 3\ \text{m}) / (0,\ 6\ \text{m})] = 26{,}6\,°$.

---

24 Il faut que le centre de gravité du système homme-poutre soit dans les 6 m d'appui de la poutre sur le bloc de béton. Il faut donc que :

$$x_{CG} = [(1000\ \text{kg})\ (5\ \text{m}) + (100\ \text{kg})\ x] / [(1000\ \text{kg}) + (100\ \text{kg})] < 6\ \text{m}.$$

En résolvant cette inégalité, on trouve que x doit être inférieur à 16 m. Comme la barre ne fait que 10 m, l'homme peut aller jusqu'à l'extrémité de la poutre.

4.5 LES LEVIERS, AVANTAGE MÉCANIQUE

26 La force résistante est représentée par l'eau et la force appliquée est celle exercée par le rameur. Grâce au levier que constitue la rame, on trouve $x_A\ F_A = x_R\ F_R$ et donc que l'avantage mécanique $F_R / F_A = x_A / x_R = (0{,}4\ \text{m}) / (1{,}4\ \text{m}) = 0{,}28$.

---

27 L'avantage mécanique, F_R / F_A, vaut $x_A / x_R = (4\ \text{cm}) / (6\ \text{cm}) = 0{,}667$.

4.6 LES LEVIERS DU CORPS

31 La force résistante est représentée par le poids de la tête. (a) Les deux forces $\mathbf{F}_A$ et $\mathbf{F}_R$ sont appliquées de part et d'autre du point d'appui. Il s'agit donc d'un levier de type I. (b) Les deux forces sont du même côté du point d'appui; de plus, le point d'application de la force appliquée est le plus proche du point d'appui. Il s'agit donc d'un levier de type III. (c) On évalue dans les deux cas le rapport x_A / x_R. Dans chacun des cas, x_A est plus petit que x_R mais la distance point d'application de la force due aux muscles splénius - articulation est plus grande que la distance entre le point d'application due à la musculature antérieure et l'articulation. L'avantage mécanique des muscles splénius est donc plus grand que celui des muscles antérieurs.

4.7 LES MÂCHOIRES DES ANIMAUX

32 L'équilibre de translation permet de déterminer R par $M - B - R = 0$, soit

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$R = 3$ N et l'équilibre de rotation par rapport à l'articulation permet de calculer la distance x entre l'articulation et le point d'application de la force de morsure : $-(0{,}03\text{ m})\,(5\text{ N}) + x\,(2\text{ N}) = 0$, soit $x = 0{,}075$ m.

---

33 L'équilibre de translation selon la verticale se traduit par l'équation :

$$-B + M \sin\theta_m + T \sin\theta_t = 0.$$

Si la force de morsure s'exerce à l'avant de la mâchoire, les deux angles θ_t et θ_m diminuent de la même façon. Par contre, si elle s'exerce à l'arrière, les deux angles augmentent. Considérons l'angle θ qui varie comme θ_t et θ_m. L'équation d'équilibre peut s'écrire $B / M = (1 + \alpha) \sin\theta$ où α est le coefficient de proportionnalité entre T et M. (a) Si M est une constante (tension maximale dans le muscle), alors la force de morsure B est plus grande à l'arrière de la mâchoire. (b) Si l'on compare les deux équations de B / M pour le carnivore où $\alpha = 2$ et pour l'herbivore où $\alpha = 1/10$, on voit que pour que les rapports B / M soient égaux, il faut que l'angle θ de l'herbivore soit plus grand que celui du carnivore. La force de morsure du carnivore s'exerce donc plus à l'avant de la mâchoire.

4.8 LE CENTRE DE GRAVITÉ DES PERSONNES

34 Par rapport à la position supposée du centre de gravité, l'équation d'équilibre de rotation s'écrit $x\,(200\text{ N}) - [(4\text{ m}) - x]\,(600\text{ N}) = 0$. En résolvant cette équation, on trouve que $x = 3$ m, distance mesurée à partir de la première balance.

---

36 La position du centre de gravité est déterminée par les deux coordonnées x et y. Pour trouver chacune d'entre elles, il suffit de calculer, pour x_{CG}, les produits de la masse d'un élément du corps par la coordonnée x de son centre de gravité, d'en effectuer la somme et d'ensuite diviser par la masse totale m du corps. Le calcul de y_{CG} se fait de la même façon en utilisant la coordonnée y de chaque élément du corps. On trouve :

$$x_{CG} = [(0{,}593\,m)\,(0{,}10\,h) + (0{,}053\,m)\,(0{,}14\,h) + (0{,}043\,m)\,(0{,}24\,h) + (0{,}193\,m)\,(0{,}12\,h) + (0{,}118\,m)\,(0{,}10\,h)] / m = 0{,}112\,h$$

$$\text{et } y_{CG} = [(0{,}593\,m)\,(0{,}70\,h) + (0{,}053\,m)\,(0{,}75\,h) + (0{,}043\,m)\,(0{,}64\,h) + (0{,}193\,m)\,(0{,}42\,h) + (0{,}118\,m)\,(0{,}19\,h)] / m = 0{,}586\,h.$$

4.9 SYSTÈMES DE POULIES

38 Les forces horizontales qui s'exercent sur la poulie attachée au pied du patient satisfont à la relation $-F_R + 2\,W\cos\theta = 0$, soit $\theta = \arccos[F_R/(2\,W)]$ puisque la tension des deux côtés de la poulie est la même. Il faut donc que l'angle θ soit égal à 75 °.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

39 La puissance utilisée pour exercer la force F_A se transmet intégralement à la masse à déplacer. On peut donc écrire $F_A\ v_A = F_m\ v_m$ où v_A est la vitesse avec laquelle on tire la corde, F_m le poids de la masse et v_m la vitesse de déplacement de la masse. Comme $F_A = W / 4$, on peut calculer :

$$v_m = F_A\ v_A / F_m = v_A / 4 = (0{,}25\ \text{m s}^{-1}) / 4 = 0{,}0625\ \text{m s}^{-1}.$$

SOLUTION DES PROBLÈMES

42 Ne connaissant rien de la force **P** qui s'exerce sur le pivot, introduisons ses composantes P_x et P_y dans les équations d'équilibre de translation et de rotation. Selon les deux directions de l'espace, on peut écrire :

$$P_x = T\ \cos 30\,^\circ,\ P_y - (1000\ \text{N}) + T\ \sin 30\,^\circ = 0$$

et, par rapport au pivot, $-\ell\ (1000\ \text{N}) + T\ \ell\ \sin 30\,^\circ = 0$ où ℓ est la longueur de la barre. Cette dernière équation permet de calculer la valeur de la tension $T = 2000$ N et les premières équations nous donnent alors la valeur de $P_x = 1732$ N et celle de P_y qui est nulle. La force qui s'exerce au pivot n'a donc qu'une composante horizontale.

---

43 L'ensemble du système est en équilibre de translation et de rotation. Supposons que les composantes de la force **P** exercée au niveau du pivot soient P_x et P_y; les trois équations d'équilibre sont $P_x = T\ \cos 30\,^\circ$, $P_y - (1000\ \text{N}) + T\ \sin 30\,^\circ = 0$ et $(1\ \text{m})\ T\ \sin 150\,^\circ - (2\ \text{m})\ (1000\ \text{N}) = 0$. (a) Cette dernière équation permet de déterminer la grandeur de la tension dans le câble : $T = 4000$ N. (b) Avec cette valeur, on trouve $P_x = 3464$ N et $P_y = -1000$ N. La direction de **P** est donc le sud-est. Sa norme vaut $\sqrt{P_x^2 + P_y^2} = 3606$ N. L'angle d'inclinaison du vecteur **P** par rapport à l'horizontale peut aussi être évalué : $\theta = \arctan(P_y / P_x) = 16\,^\circ$.

---

45 La chaîne est en équilibre. L'équilibre de translation se traduit par :

$$-W + 2\ T\ \sin 37\,^\circ = 0.$$

Connaissant T, on déduit automatiquement $W = 2\ (20\ \text{N})\ \sin 37\,^\circ = 24{,}1$ N.

---

49 Recherchons d'abord la position du centre de gravité de la table. Le centre de gravité du dessus de la table est au centre et à 0,8 m du sol alors que celui des quatre pieds se trouve à la verticale en-dessous de celui du dessus de la table mais à 0,4 m du sol. La position verticale du centre de gravité se trouve donc à $z_{CG} = [(20\ \text{kg})\ (0{,}8\ \text{m}) + (8\ \text{kg})\ (0{,}4\ \text{m})] / [(20\ \text{kg}) + (8\ \text{kg})] = 0{,}686$ m. La valeur limite de l'angle d'inclinaison θ correspond au moment où la projection

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

verticale du centre de gravité se trouve sur un bord du polygone de sustentation de la table; ici, θ vaut arctan[(0, 5 m) /(0, 686 m)] = 36 °.

51 Lorsque la planche est complète, le centre de gravité se trouve à 1 m de chaque extrémité. Cette planche est constituée de deux parties : la partie M que l'on enlève, située à 1,5 m et le reste dont le centre de gravité est à 0,9 m de la même extrémité. On peut donc écrire :

$$(1\text{ m}) = [M\ (1{,}5\text{ m}) + [[(20\text{ kg}) - M]\ (0{,}9\text{ m})]\ /\ (20\text{ kg}),$$

ce qui nous permet de déterminer la masse de bois que l'on ôte, soit 3,33 kg.

53 (a) Les deux équations d'équilibre de translation et celle de l'équilibre de rotation s'écrivent $R_x = T\ \cos 18°$, $-R_y - (35\text{ N}) + T\ \sin 18° = 0$ et

$$T\ (0{,}15\text{ m})\ \sin 162° - (0{,}35\text{ m})\ (35\text{ N}) = 0.$$

Cette dernière équation permet de déterminer la tension T exercée par le muscle $T = 264$ N. On peut dès lors calculer $R_x = 251$ N et $R_y = 46{,}7$ N.

(b) L'avantage mécanique vaut $F_R\ /\ F_A = (35\text{ N})\ /\ (264\text{ N}) = 0{,}133$.

54 Le vase se renverse lorsque la projection verticale de son centre de gravité sort du cercle délimitant sa base. En construisant un triangle rectangle dont un côté est le rayon du cercle et dont l'hypothénuse est la distance entre le fond du vase et le centre de gravité, on peut calculer que l'angle maximum d'inclinaison vaut θ = arcsin [(0, 05 m) /(0, 15 m)] = 19,5 °.

57 Lorsque le corps est en équilibre de translation et de rotation, on peut écrire l'équation $R_x - T\ \cos 12° = 0$ suivant la direction x, $R_y + T\ \sin 12° - W - W_1 = 0$ suivant la direction y et $T\ (0{,}7\ \ell)\ \sin 168° - W\ (0{,}6\ \ell) - W_1\ \ell = 0$ par rapport au sacrum. Après simplification de la longueur ℓ, il reste :

$$(0{,}7)\ T\ \sin 168° - W\ (0{,}6) - W_1 = 0.$$

(a) La dernière équation permet de déterminer la valeur de $T = 2020$ N. Par les deux premières équations, on calcule $R_x = 1976$ N et $R_y = 70$ N. (b) Les mêmes équations permettent de déterminer $T = 3223$ N, $R_x = 3152$ N et $R_y = -5$ N.

59 La condition d'équilibre suivant l'horizontale s'écrit $M\ \cos\theta_m = T\ \cos\theta_t$, soit, comme $\theta_m = \theta_t$, $M = T$. La condition d'équilibre suivant la verticale se traduit par l'équation :

$$B = M\ \sin\theta_m + T\ \sin\theta_t = (M + T)(\sqrt{2}/2) = M\ \sqrt{2} = (30\text{ N})\ \sqrt{2} = 42{,}4\text{ N}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit

60 (a) La condition d'équilibre de translation suivant l'horizontale permet d'écrire $M \cos\theta_m = T \cos\theta_t$, et de trouver $\theta_t = \arccos(\cos 60° / 1{,}3) = 67{,}4°$.

(b) La condition d'équilibre de translation suivant la verticale se traduit par :

$$B = M \sin\theta_m + T \sin\theta_t$$

et le rapport B / M se calcule alors par :

$$B / M = \sin\theta_m + 1{,}3 \sin\theta_t = \sin 60° + 1{,}3 \sin 67,4° = 2{,}1.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 5

Le mouvement circulaire

RAPPELS

Un mobile en mouvement circulaire uniforme décrit à vitesse constante une trajectoire plane, formée d'un arc de cercle. Les paramètres qui définissent ce mouvement sont, en dehors de la position initiale et de la position du centre de l'orbite, (1) le rayon r de la trajectoire et (2) la vitesse angulaire ω, ou angle de rotation autour du centre décrit à chaque seconde par le mobile. Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire et donc perpendiculaire au rayon joignant le centre au mobile. La grandeur du vecteur vitesse est liée aux paramètres du mouvement par la relation $v = \omega r$. L'accélération est dirigée vers le centre (accélération centripète) et a pour grandeur $a = \omega^2 r$, ou encore $a = v^2 / r$.

Si le mouvement n'est pas uniforme, mais accéléré, on doit de plus préciser la valeur de l'accélération angulaire $\alpha = d\omega / dt$. L'accélération tangentielle a_T qui lui correspond vaut $a_T = \alpha r$. Dans le cas d'une accélération angulaire constante α, la loi du mouvement s'écrit $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + (1/2) \alpha t^2$, où θ est l'angle de rotation décrit pendant l'intervalle de temps t, ω_0 la vitesse angulaire initiale et θ_0 la position angulaire initiale. Une force appliquée perpendiculairement à l'axe de rotation, mais dont la ligne d'action ne rencontre pas cet axe, produit une accélération angulaire. Celle-ci est proportionnelle au moment τ de la force : on écrit $\tau = I \alpha$, où I représente le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation. Les moments d'inertie dont la connaissance est requise ici sont repris dans le tableau 5.3 (page 127 de Kane et Sternheim).

Enfin, ce chapitre introduit également les lois d'interaction fondamentales. Deux charges ponctuelles q_1 et q_2 (ou sphériques, mais sans recouvrement) séparées par une distance r, exercent l'une sur l'autre une force égale à $F = k q_1 q_2 / r^2$, où k, la constante de Coulomb, vaut $9{,}00 \times 10^9$ N m^2 C^{-2}. Deux corps ponctuels (ou sphériques, mais sans recouvrement) de masses respectives m_1 et m_2 séparés par une

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

distance r, exercent l'un sur l'autre une force égale à $F = G\, m_1\, m_2 / r^2$, où G, la constante de gravitation, vaut $6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

SOLUTION DES EXERCICES

5.1 L'ACCÉLÉRATION CENTRIPÈTE

1 L'accélération centripète vaut $a = (8 \text{ m s}^{-1})^2 / (100 \text{ m}) = 0{,}64 \text{ m s}^{-2}$.

---

2 (a) Comme dans l'exercice 5-1, $a = (10 \text{ m s}^{-1})^2 / (200 \text{ m}) = 0{,}5 \text{ m s}^{-2}$. (b) La force F sur un corps est le produit de sa masse m par l'accélération a qu'il subit : $F = m\, a = (70 \text{ kg})\ (0{,}5 \text{ m s}^{-2}) = 35$ N.

---

3 La force centripète est, dans cette situation, $m\, v^2 / r = m\, g$. Le rayon de la trajectoire est donc ici $r = v^2 / g = (60 \text{ m s}^{-1})^2 / (9{,}8 \text{ m s}^{-2}) = 6{,}1$ m.

---

4 Non. L'inertie de l'occupant de la voiture tend à lui maintenir un mouvement rectiligne.

---

5 (a) Avec une vitesse angulaire :

$$\omega = 60000 \text{ t min}^{-1} = (60000)\ 2\,\pi / (60 \text{ s}) = 6{,}28 \times 10^3 \text{ s}^{-1},$$

la force sur l'échantillon vaut $F = m\ \omega^2\ r$, c'est-à-dire :

$$F = (1{,}0 \times 10^{-2} \text{ kg})\ (6{,}28 \times 10^3 \text{ s}^{-1})^2\ (0{,}05 \text{ m}) = 1{,}97 \times 10^4 \text{ N}.$$

(b) La masse est le rapport :

$$m = \textit{poids} / g = (1{,}97 \times 10^4 \text{ N}) / (9{,}8 \text{ m s}^{-2}) = 2{,}0 \times 10^3 \text{ kg}.$$

---

6 La vitesse angulaire vaut $\omega = 2\,\pi / (10 \text{ s}) = 0{,}628 \text{ s}^{-1}$, et l'accélération vaut $a = \omega^2\, r = 1{,}57 \text{ m s}^{-2}$.

---

7 L'accélération subie est l'accélération centripète $a = v^2 / r$. Une accélération de 5 g correspond à un rayon :

$$r = v^2 / (5\, g) = (500 \text{ m s}^{-1})^2 / [5\ (9{,}8 \text{ m s}^{-2})] = 5{,}1 \times 10^3 \text{ m}.$$

---

8 La vitesse angulaire de la Terre sur son orbite autour du Soleil est :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$\omega = 2\,\pi$ / (365 jours) = 2 π / [(365) (24) (3600 s)] = $2{,}0 \times 10^{-7}$ s^{-1}, correspondant à une vitesse $v = \omega\, r = 3{,}0 \times 10^{4}$ m s^{-1}. L'accélération centripète de la Terre est donc $a = \omega^2 r = (2{,}0 \times 10^{-7}\ \text{s}^{-1})^2\ (1{,}5 \times 10^{11}\ \text{m}) = 6 \times 10^{-3}\ \text{m s}^{-2}$.

10 La vitesse d'un mobile en mouvement circulaire uniforme est liée à l'accélération par la relation $a = v^2 / r$, ou $v = (a\, r)^{1/2}$. Ici,

$$v = [11\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (16\ \text{m})]^{1/2} = 41{,}5\ \text{m s}^{-1}.$$

11 La force maximale applicable par frottement est $\mu_s\ m\ g$, où $m\ g$ est la force normale à la surface de contact, c'est-à-dire le poids de la voiture (nous supposons la route horizontale). La force centripète maximale est donc $m\ v_{max}^2 / r = \mu_s\ m\ g$, à partir de laquelle on obtient :

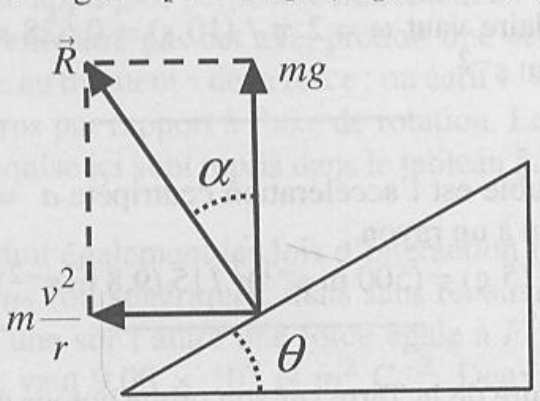
$$v_{max} = (\mu_s\ r\ g)^{1/2} = [(0{,}4)\ (250\ \text{m})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})]^{1/2} = 31{,}3\ \text{m s}^{-1}.$$

13 Le carré de la vitesse s'exprime en (m s^{-1})^2, ou en m^2 s^{-2}, et le rayon de la trajectoire s'exprime en m. Le rapport des deux donne les unités dans lesquelles s'exprime v^2 / r, en m s^{-2}. Cette expression représente donc bien une accélération.

5.2 EXEMPLES DE MOUVEMENT CIRCULAIRE

14 La voiture est soumise à une réaction verticale de la route, qui annule son poids, et à la force centripète, horizontale. Ces deux forces sont les composantes de la réaction **R** appliquée par la route à la voiture. Si le frottement n'intervient pas, le comportement de la voiture ne changera pas si nous imposons un frottement latéral nul. Dans ce cas, la réaction **R** ne peut être que normale à la route : aucune force tangentielle ne peut être transmise à la voiture. Dans cette situation, l'angle α entre la réaction et la verticale est exactement égal à l'angle θ d'inclinaison de la route (comme angles à côtés perpendiculaires). Alors,

$$\text{tg}\ \theta = \text{tg}\ \alpha = [m\ v^2 / r] / (m\ g) = v^2 / (r\ g).$$



© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Lorsque, comme dans le cas présenté dans l'exercice 5-11, $v = 31{,}3$ m s^{-1}, $r = 250$ m, on trouve tg $\theta = 0{,}4$, soit $\theta = 21{,}8\,°$. Comme on le voit, l'angle d'inclinaison doit s'adapter à la vitesse : sur les pistes d'essais d'automobiles, comme l'anneau de vitesse de Montlhéry (France), le profil de la route présente une courbure permettant au pilote de choisir l'inclinaison qui s'adapte le mieux à sa vitesse.

19 La force de frottement agit vers l'extérieur du virage.

20 L'apesanteur apparente correspond à une valeur de l'accélération de l'avion au sommet de la trajectoire égale à celle de la pesanteur : $a = v^2 / r = g$. On trouve $r = v^2 / g = (400 \text{ m s}^{-1})^2 / (9{,}8 \text{ m s}^{-2}) = 16 \times 10^3$ m.

21 L'accélération vaut $a = 1 \times 10^5\, g$. Identifiée à $\omega^2\, r$, cette valeur donne $\omega^2 = 1 \times 10^5\, g / r = (1 \times 10^5)\,(9{,}8 \text{ m s}^{-2}) / (0{,}05 \text{ m}) = 1{,}96 \times 10^7 \text{ s}^{-2}$. Dès lors, $\omega = 4427 \text{ s}^{-1} = (4427 \text{ s}^{-1})$ (tours / 2 π) (60 min^{-1}) = 42300 tours min^{-1}.

22 Le poids effectif de l'oiseau correspond à la portance totale qu'il doit engendrer par ses battements d'ailes pour, d'une part, rester à une altitude constante (il faut une force **W** dirigée vers le haut), et d'autre part, incurver sa trajectoire dans le plan horizontal (ici, une force centripète $m\, v^2 / r$ est nécessaire). La somme vectorielle de ces deux contributions a pour grandeur

$$\left|W_{eff}\right| = \sqrt{W^2 + \left(\frac{mv^2}{r}\right)^2} = |W| \sqrt{1 + \left(\frac{v^2}{gr}\right)^2}$$

Ici, $v^2 / (gr) = (15 \text{ m s}^{-1})^2 / [(9{,}8 \text{ m s}^{-2})\,(15 \text{ m})] = 1{,}53$ et $| W_{eff} | = 1{,}6 \,| W |$.

23 (a) Voir exercice 5-6 : 1,58 m s^{-2}. (b) Au sommet, on soustrait l'accélération centripète de l'accélération de la pesanteur, $W_{eff} = 370$ N. (c) Au bas de la trajectoire, on les additionne, $W_{eff} = 512$ N.

5.3 VARIABLES ANGULAIRES

24 Etant donné un cercle et un arc de longueur s sur ce cercle, la mesure θ (en radians) de l'angle au centre qui sous-tend cet arc est, par définition, le rapport entre la longueur s de l'arc et le rayon R du cercle : $\theta = s / R$. La mesure d'un angle n'a, à proprement parler, pas de dimension. Le symbole rad a la valeur 1,

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

et le symbole ° (degré d'angle) a pour valeur $\pi / 180$.
Ici, (a) $\theta = (1\text{ m}) / (0{,}4\text{ m}) = 2{,}5$ ou 2,5 rad. (b) $\theta = (2{,}5)\,(180 / \pi)° = 143°$.

---

26 Voir l'exercice 5-24, (a) 0,52 rad. (b) 1,57 rad. (c) 1,05 rad.

---

28 (a) $\omega = \pi / (0{,}4\text{ s}) = 7{,}85\text{ s}^{-1}$, ou $7{,}85\text{ rad s}^{-1}$.
(b) $\omega = 270° / (0{,}6\text{ s}) = 270\,(\pi / 180) / (0{,}6\text{ s}) = 7{,}85\text{ s}^{-1}$, ou $7{,}85\text{ rad s}^{-1}$.

---

29 (a) La direction du vecteur ω est perpendiculaire au plan de la roue; son sens : de l'observateur vers le cycliste ; sa grandeur :

$$\omega = v / r = (5\text{ m s}^{-1}) / (0{,}4\text{ m}) = 12{,}5\text{ s}^{-1}.$$

(b) De même, l'accélération angulaire α est liée à l'accélération tangentielle a_T par la relation $\alpha = a_T / r$. On trouve ici, $\alpha = (1\text{ m s}^{-2}) / (0{,}4\text{ m}) = 2{,}5\text{ s}^{-2}$.

---

30 (a) Un disque tournant à 78 tours min^{-1} a une vitesse angulaire :

$$\omega = (78)\,2\,\pi\,(60\text{ s})^{-1} = 8{,}17\text{ s}^{-1}.$$

L'accélération radiale vaut, sur le bord du disque de 0,15 m de rayon,

$$a = \omega^2\, r = (8{,}17\text{ s}^{-1})^2\,(0{,}15\text{ m}) = 10{,}0\text{ m s}^{-2}.$$

(b) La vitesse angulaire passe de $\omega = 8{,}17\text{ s}^{-1}$ à $\omega = 0$ en 2 s. Ceci correspond à une accélération angulaire constante de $[(0) - (8{,}17)]\text{ s}^{-1} / (2\text{ s}) = -4{,}08\text{ s}^{-2}$.
L'accélération tangentielle qui en résulte vaut :

$$a_T = \alpha\, r = -(4{,}08\text{ s}^{-2})\,(0{,}15\text{ m}) = -0{,}61\text{ m s}^{-2}.$$

---

33 On pense que la cohésion des astres est due essentiellement à la gravitation. Pour un objet tournant, un échantillon de masse m, en périphérie, est attiré vers le centre avec une force $F = G\,m\,M / r^2$, où M est la masse totale de l'astre, et r son rayon. G est la constante de gravitation, qui vaut $6{,}67 \times 10^{-11}\text{ N m}^2\text{ kg}^{-2}$. Les autres forces (pression interne) sont répulsives. Pour qu'un astre conserve sa stabilité, il faut que la force gravitationnelle soit supérieure à la force centripète, la différence (attractive) étant compensée par les forces de pression interne. Donc $G\,m\,M / r^2 > m\,\omega^2\,r$. Cette relation limite les vitesses angulaires à des valeurs telles que $\omega^2 < G\,M / r^3$, ou encore $\omega^2 < (4/3)\,\pi\,G\,\rho$, où ρ est la masse volumique de l'astre sphérique. Ainsi, si l'on observe une vitesse angulaire ω, on sait que la masse volumique de l'astre vérifiera la contrainte $\rho > (3 / 4\,\pi\,G)\,\omega^2$. Pour un pulsar de période 0,03 s, la vitesse angulaire de rotation vaut $\omega = 2\,\pi / (0{,}03\text{ s}) = 209\text{ s}^{-1}$, et la masse volumique vérifie $\rho > 1{,}6 \times 10^{14}\text{ kg m}^{-3}$.
(a) Non : les étoiles ordinaires, comme notre Soleil, ont une masse volumique de l'ordre de $1 \times 10^5\text{ kg m}^{-3}$, très insuffisante.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit

(b) Peut-être : les naines blanches ont des masses volumiques qui varient de 1×10^8 à 1×10^{15} kg m^{-3}.
(c) Oui : les étoiles à neutrons ont une masse volumique de l'ordre de 1×10^{17} kg m^{-3}.

---

35 Dans le cas d'un roulement sans glissement, le point de la roue en contact avec le sol est à la même vitesse que la route, c'est-à-dire au repos. Le moyeu se déplace par rapport à la route à la même vitesse que l'ensemble de la voiture. La vitesse relative du point de la roue en contact avec le sol par rapport au moyeu est donc la vitesse de la voiture, soit, ici 20 m s^{-1}. (a) La vitesse angulaire correspondante est donc $\omega = v / r = (20 \text{ m s}^{-1}) / (0{,}3 \text{ m}) = 66{,}7 \text{ rad s}^{-1}$. (b) L'accélération angulaire vaut $(66{,}7 - 0) \text{ s}^{-1} / (15 \text{ s}) = 4{,}44 \text{ s}^{-2}$. (c) La roue aura tourné de $\theta = (1/2) \alpha t^2 = (1/2) (4{,}44 \text{ s}^{-2}) (15 \text{ s})^2 = 500$ rad.

5.4 MOMENT, ACCÉLÉRATION ANGULAIRE ET MOMENT D'INERTIE

37 La géométrie d'une roue de bicyclette, avec l'essentiel de la masse à une distance fixe de l'axe de rotation, donne une formule particulièrement simple pour le calcul du moment d'inertie : $I = m r^2$. Ici, $I = (2 \text{ kg}) (0{,}35 \text{ m})^2 = 0{,}245 \text{ kg m}^2$.

---

38 $I_B / I_A = (m r^2) / (m r^2 / 2) = 2$.

---

39 Le rayon de giration k d'un objet est calculé de telle sorte que le moment d'inertie I puisse se représenter par l'expression $I = m k^2$, quelle que soit la forme de l'objet. Donc, $k = (I / m)^{1/2}$. Pour une barre de longueur l qui pivote autour d'un axe passant par son centre, le tableau 5.3 donne $I = (1/12) m l^2$. Donc, $k = l / \sqrt{12} = 0{,}289 l$.

---

41 (a) Pour un disque plein, le moment d'inertie est $I = (1/2) m r^2$. Ici,

$$I = (1/2) (2 \text{ kg}) (0{,}08 \text{ m})^2 = 6{,}4 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2.$$

(b) Pour obtenir une accélération angulaire $\alpha = (12 \text{ s}^{-1}) / (8 \text{ s}) = 1{,}5 \text{ s}^{-2}$, il faut appliquer un moment de force :

$$\tau = I \alpha = (6{,}4 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2) (1{,}5 \text{ s}^{-2}) = 0{,}0096 \text{ N m}.$$

---

42 Le moment d'inertie d'une sphère de rayon R et de masse m vaut $(2/5) m R^2$. Le moment d'inertie de la Terre, considérée comme une sphère rigide, est donc $I = (2/5) (5{,}98 \times 10^{24} \text{ kg}) (6{,}38 \times 10^6 \text{ m})^2 = 9{,}7 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

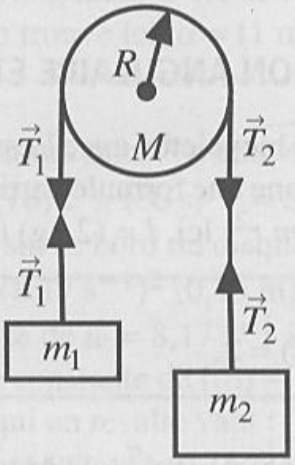
43 Ce problème est spécialement intéressant parce qu'il mélange les dynamiques de translation et de rotation. La masse m_1 est en mouvement sous l'effet de la tension T_1 et de son poids. Son accélération est donnée par $m_1\, a = (T_1 - m_1\, g)$. De même, $m_2\, a = (m_2\, g - T_2)$. Par ailleurs, la poulie est mise en mouvement de rotation sous l'effet du moment des forces T_1 et T_2. Ce moment vaut $\tau = (T_2 - T_1)\, R$ et l'accélération angulaire qui en découle se déduit de :

$$(T_2 - T_1)\, R = I\, \alpha.$$

Compte tenu de ce que $\alpha = a_T / R$, et $I = (1/2)\, M\, R^2$ pour une poulie pleine, on trouve le système de trois équations à trois inconnues (T_1, T_2, et a_T)

$$a_T = g - \frac{T_2}{m_2},\quad a_T = \frac{T_1}{m_1} - g \text{ et } (T_2 - T_1) = \frac{1}{2} M a_T$$

Pour $M = m_2$ et $m_1 = (1/2)\, m_2$, ces équations conduisent à la solution $a_T = g / 4$.



5.5 CHARGES ÉLECTRIQUES ; FORCES FONDAMENTALES

45 Une charge de $+1 \times 10^{-6}$ C déposée sur un échantillon correspond à :

$$(+1 \times 10^{-6}\ \text{C}) / (-1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C}) = -\,6{,}25 \times 10^{12} \text{ électrons,}$$

c'est-à-dire $6{,}25 \times 10^{12}$ électrons enlevés à l'échantillon.

---

46 1×10^{-3} C correspondent à $6{,}25 \times 10^{15}$ électrons, soit une fraction 1/108 des 6×10^{23} électrons que comporte un gramme d'hydrogène.

---

47 La force de Coulomb entre deux charges q identiques vaut, en grandeur, $F = k\, q^2 / r^2$, où r est la distance qui les sépare, et $k = 9{,}00 \times 10^9$ N m^2 C^{-2}. Si l'on observe une force de 10 N entre deux charges séparées de 0,1 m, elles valent $q = [(10\ \text{N})\ (0{,}1\ \text{m}) / (9{,}00 \times 10^9\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2})]^{1/2} = 3{,}33 \times 10^{-6}$ C, ce qui représente 2×10^{13} fois la charge d'un électron.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

48 La surface de la Terre mesure $S = 4\,\pi\,R_T^2 = 4\,\pi\,(6{,}38 \times 10^6\ \text{m})^2 = 5{,}11 \times 10^4\ \text{m}^2$. Le nombre total de protons qui l'atteint en 24 heures est donc :

$$(15\ \text{protons m}^{-2}\ \text{s}^{-1})\ (5{,}11 \times 10^{14}\ \text{m}^2)\ [(24)\ (3600\ \text{s})] = 6{,}6\ \text{protons}.$$

5.6 LA LOI DE COULOMB

51 La force entre un ion Na^+ et un ion Cl^- est attractive et vaut, en grandeur, $F = k\,q^2 / r^2$, où r est la distance qui sépare les ions, q est la valeur absolue de la charge d'un électron, $1{,}6 \times 10^{-19}$ C, et $k = 9{,}00 \times 10^9\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2}$. On trouve $(9{,}00 \times 10^9\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2})\ (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2 / (5 \times 10^{-10}\ \text{m})^2 = 9{,}22 \times 10^{-10}\ \text{N}$.

---

52 (a) L'accélération de l'électron sur l'orbite circulaire est :

$$a = v^2 / r = (2{,}19 \times 10^6\ \text{m s}^{-1})^2 / (5{,}29 \times 10^{-11}\ \text{m}) = 9{,}07 \times 10^{22}\ \text{m s}^{-2}.$$

(b) Le nombre de révolutions par seconde est $\omega / (2\,\pi)$, ou encore :

$$v / (2\,\pi\,r) = (2{,}19 \times 10^6\ \text{m s}^{-1}) / [2\,\pi\,(5{,}29 \times 10^{-11}\ \text{m})] = 6{,}6 \times 10^{15}\ \text{s}^{-1}.$$

5.7 SATELLITES ET MARÉES

53 Le mouvement d'un satellite autour d'un astre est contrôlé par la force de gravitation universelle. Lorsque ce satellite de masse m, attiré par un objet de masse M, décrit une trajectoire circulaire de rayon r, la durée d'une révolution est fixée : si nous identifions la force centripète à la force de gravitation, nous obtenons forcément $G\,M\,m / r^2 = m\ \omega^2\ r$, ce qui impose $\omega^2 = G\,M / r^3$. La durée T d'une révolution étant liée à la vitesse angulaire ω par la relation $2\,\pi = \omega\,T$, la période de révolution vérifie $T = \gamma\,r^{3/2}$, où $\gamma = 2\,\pi\,(G\,M)^{-1/2}$ ne dépend que de la masse M. Cette relation est indépendante de la masse du satellite. Dès lors, si l'on considère un objet (quelle que soit sa masse) sur un rayon 4 fois plus petit que le rayon de l'orbite lunaire, on peut prévoir que sa période autour de la Terre sera $4^{3/2} = 8$ fois plus courte que la durée d'une révolution lunaire. On trouve ainsi une période de 3,5 jours.

---

54 La distance moyenne Terre-Soleil est appelée 1 unité astronomique (1 U.A.). La durée T d'une révolution de la Terre autour du Soleil (de masse M_S) est, par définition, 1 an. Dès lors, la loi $T = \gamma_S\,r^{3/2}$, où $\gamma_S = 2\,\pi\,(G\,M_S)^{-1/2}$ signifie que $\gamma_S\ (1\ \text{U.A.})^{3/2} = (1\ \text{an})$. Dans ce cas, les 8 ans représentent :

$$8\ \gamma_S\ (1\ \text{U.A.})^{3/2} = \gamma_S\ (8^{2/3}\ \text{U.A.})^{3/2}.$$

Le rayon de l'orbite est donc 4 U.A.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

56 Voir les exercices 5-53 et 5-54. $T = 1{,}88$ ans.

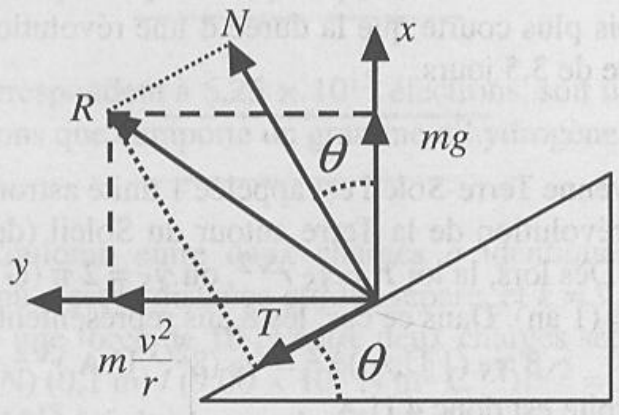
57 Le double du rayon du Soleil représente 2 ($6{,}95 \times 10^8$ m), c'est-à-dire $9{,}27 \times 10^{-3}$ U.A. La durée d'une révolution d'un satellite à cette distance du Soleil vaut $T = \gamma_S\,(9{,}27 \times 10^{-3}\text{ U.A.})^{3/2} = (9{,}27 \times 10^{-3})^{3/2}\,(1\text{ an}) = 7{,}8$ h.

58 Voir l'exercice 5-53. $M_T = (4\ \pi^2\ /\ G)\ (r^3\ /\ T^2) = 6{,}0 \times\ 10^{24}$ kg.

59 La théorie des marées de Newton prévoit que l'amplitude des marées des océans vaut $h = (3\ G\ M_L\ R_T^2)\ /\ (2\ g\ r^3) = 0{,}539$ m.

SOLUTION DES PROBLÈMES

61 Soit m la masse de la voiture, $W\ =\ m\ g$ son poids, v sa vitesse, r le rayon du virage et θ l'inclinaison de la route. La réaction **R** de la route sur la voiture se décompose en deux forces mutuellement perpendiculaires : une force verticale qui compense exactement le poids de la voiture (et est donc, en grandeur, égale à $m\ g$) et une force horizontale, dirigée vers l'intérieur du virage, qui constitue la force centripète provoquant le mouvement circulaire uniforme. La grandeur de cette force horizontale est $m\ v^2\ /\ r$. Fondamentalement, la réaction **R** est la somme de deux composantes, l'une, **N**, normale à la route et l'autre, **T**, tangentielle, que l'on obtient à cause du frottement latéral. Dans la figure ci-dessous, cette force tangentielle **T** est dirigée vers l'intérieur du virage, ce qui correspond au cas où la vitesse est élevée et où les pneus doivent s'opposer au déportement de la voiture vers l'extérieur.



Sur la figure, l'axe des x est choisi à la verticale, vers le haut et l'axe des y est horizontal, dirigé vers l'intérieur du virage. Dans ces axes, la réaction **R**

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

se décompose en $R_x = m\ g$ et $R_y = m\ v^2 / r$. Par ailleurs, on écrit aussi que $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{T}$, c'est-à-dire $R_x = N\ \sin\ \theta + T\ \cos\ \theta$ et $R_y = N\ \cos\ \theta - T\ \sin\ \theta$. La vitesse de la voiture peut se déduire, comme dans l'exercice 5-14, du rapport $(m\ v^2 / r) / (m\ g) = R_y / R_x$ et l'on trouve

$$v^2 = r\ g\ tg\ \theta \left[\frac{1 + \frac{T}{N} tg\,\theta}{1 - \frac{T}{N} tg\,\theta}\right]$$

Lorsque le virage a exactement l'inclinaison nécessaire pour faire disparaître la force de frottement ($T = 0$), on retrouve la relation $v^2 = r\ g\ \text{tg}\ \theta$ de l'exercice 5-14. Ici, (a) $r = 200$ m et $\theta = 10\,°$ conduisent à $v^2 = (200\ \text{m})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ \text{tg}\ 10\,°$ et à $v = 18{,}6\ \text{m s}^{-1}$. (b) Si la voiture présente une vitesse de $5\ \text{m s}^{-1}$ plus élevée, soit $v = 23{,}6\ \text{m s}^{-1}$, on trouve un rapport

$$\frac{1 + \frac{T}{N}\frac{1}{tg\theta}}{1 - \frac{T}{N}\frac{1}{tg\theta}} = \frac{v^2}{r\,g\,tg\theta} = \frac{\left(23,6\,ms^{-1}\right)^2}{(200\,m)\,(9,8\,ms^{-2})\ tg10°} = 1,61$$

On trouve ainsi $T / N = 0{,}1025$. La grandeur R de la réaction se déduit de :

$$R^2 = (m\ g)^2 + (m\ v^2 / r)^2 : R = 1{,}040\ W.$$

Comme, par ailleurs, $R^2 = T^2 + N^2 = N^2\ [1 + (T / N)^2] = 1{,}0105\ N^2$, on obtient facilement $N = 1{,}034\ W$ et $T = 0{,}1025\ N = 0{,}106\ W$.

---

62 (a) $v^2 = r\ g\ \text{tg}\ \theta = (300\ \text{m})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ \text{tg}\ 10\,°$ donne $v = 22{,}8\ \text{m s}^{-1}$. (b) En utilisant l'expression générale obtenue dans le problème 5-61, avec $T = \mu_s\ N$, c'est-à-dire $T / N = 0{,}8$, on trouve $v = 57{,}8\ \text{m s}^{-1}$.

---

63 La poussée verticale annule le poids de l'oiseau.

---

65 La composante verticale de la tension $\mathbf{T}$ de la corde, $T\ \sin\ 30\,°$, compense exactement le poids de la pierre, qui reste dans un plan horizontal :

$$T\ \sin\ 30\,° = m\ g.$$

Avec $m = 2$ kg, on trouve $T = 39{,}2$ N. Le rayon de la trajectoire circulaire de la pierre est égal à la projection de la longueur de la corde ($l = 1$ m) sur le plan horizontal : $r = (1\ \text{m})\ \sin\ 30\,° = 0{,}5$ m. Comme la composante horizontale ($T\ \cos\ 30\,°$) de la tension correspond à la force centripète qui maintient la pierre sur sa trajectoire circulaire, on peut identifier $T\ \cos\ 30\,° = m\ v^2 / r$ et on obtient $v = 2{,}91\ \text{m s}^{-1}$.

---

66 Limiter l'accélération v^2 / r revient à fixer un rayon minimum pour la trajectoire.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

67 L'accélération centripète subie vaut $v^2 / r = 5\ g$. Le rayon du virage est donc $r = v^2 / (5\ g)$. La vitesse est donnée explicitement :

$$v = 120 \text{ km h}^{-1} = (120)\ (1000 \text{ m}) / (3600 \text{ s}) = 33{,}3 \text{ m s}^{-1}.$$

On trouve ainsi $r = (33{,}3 \text{ m s}^{-1})^2 / [5\ (9{,}8 \text{ m s}^{-2})] = 22{,}7 \text{ m}$.

---

69 Evaluons, en toute généralité, le moment d'inertie d'une rondelle d'épaisseur a, de rayon extérieur R et de rayon intérieur r. Nous la supposons homogène, faite d'un matériau de masse volumique constante ρ. Appelons I_1 le moment d'inertie du cylindre entier, avant forage, de volume $V = (\pi r^2)\ a$: nous référant au tableau 5.3 du Kane et Sternheim, $I_1 = (1/2)\ (\rho V)\ R^2$, ou $I_1 = (1/2)\ \rho\ \pi\ a R^4$. De la même façon, on trouve le moment d'inertie du cylindre central, de rayon r, enlevé pour former la rondelle, $I_2 = (1/2)\ \rho\ \pi\ a r^4$. Le moment d'inertie de la rondelle est donc $I = I_1 - I_2 = (1/2)\ \rho\ \pi\ a\ (R^4 - r^4)$, ou encore :

$$I = (1/2)\ \rho\ \pi\ a\ (R^2 - r^2)\ (R^2 + r^2).$$

On reconnaît dans le facteur $\rho\ \pi\ a\ (R^2 - r^2)$ la masse m de la rondelle et le moment d'inertie cherché est simplement le produit de cette masse par la moyenne arithmétique des carrés des rayons intérieur et extérieur : $I = m\ (R^2 + r^2) / 2$. Si $r = 0{,}4\ R$, alors $I = 0{,}58\ m\ R^2$.

---

70 La pièce est faite de deux parties : un cylindre plein d'épaisseur a et de rayon $R / 2$ et un cylindre creux d'épaisseur $2\ a$. Le cylindre plein a un moment d'inertie $I_1 = (1/2)\ M_1\ (R / 2)^2$, avec une masse $M_1 = \rho\ \pi\ a\ (R / 2)^2$. Le moment d'inertie du cylindre creux est évalué dans le problème 5-69 : $I_2 = (1/2)\ M_2\ [R^2 + (R / 2)^2]$, avec $M_2 = 2\ \rho\ \pi\ a\ [R^2 - (R / 2)^2]$. La somme des moments d'inertie donne $(31/32)\ \rho\ \pi\ a R^4$.

---

71 Le rayon de la trajectoire est le rayon de la Terre divisé par 1,414 et la vitesse angulaire est $\omega = 2\ \pi / [24\ (3600 \text{ s})]$.

---

72 Le moment de la force de frottement vaut $\tau = (0{,}7)\ (10 \text{ N})\ (0{,}1 \text{ m}) = 0{,}7 \text{ N m}$. L'accélération angulaire qui en résulte est le rapport $\alpha = \tau / I$, où I est le moment d'inertie de la meule égal à $I = (1/2)\ (3 \text{ kg})\ (0{,}1 \text{ m})^2$. On obtient $\alpha = 46{,}7 \text{ s}^{-2}$. La vitesse angulaire initiale est donnée par :

$$\omega = 2400 \text{ tours min}^{-1} = (2400)\ 2\ \pi\ (60 \text{ s}) = 251 \text{ s}^{-1}.$$

Avec une accélération constante, le temps nécessaire à l'arrêt de la meule est $t = \omega / \alpha = 5{,}39 \text{ s}$.

---

73 Voir l'exercice 5-43. On introduit les tensions T_1 (entre la poulie et la masse

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$m_1 = 10$ kg) et T_2 (entre la poulie et la masse $m_2 = 20$ kg). L'équation du mouvement de la masse m_2 s'écrit $m_2\ g\ -\ T_2 = m_2\ a$ où a est l'accélération des masses m_1 et m_2 et l'accélération tangentielle de la poulie. L'équation du mouvement de la masse m_1 s'écrit $T_1\ \mu\ m_1\ g = m_1\ a$, où μ est le coefficient de frottement cinétique. On obtient $T_2 = 116$ N et $T_1 = 49{,}8$ N. Le moment des forces appliqué à la poulie de rayon R vaut donc $\tau = (T_2\ -\ T_1)\ R = (66{,}2\ \text{N})\ R$. On en déduit l'accélération angulaire α de la poulie par $\tau = I\ \alpha = I\ a\ /\ R$. Il reste que $(I\ /\ R^2)\ a = 66{,}2$ N et $I\ /\ R^2 = 15{,}55$ kg. La poulie étant un cylindre solide, son moment d'inertie vaut $I = (1/2)\ M\ R^2$ et la masse de la poulie vaut 2 (15,55 kg) = 33,1 kg.

---

75 (a) Chaque bille de plomb de masse $m = 5$ kg contient :

$$(5\ \text{kg})\ /\ (3{,}44 \times 10^{-25}\ \text{kg atome}^{-1}) = 1{,}45 \times 10^{25}\ \text{atomes},$$

c'est-à-dire $1{,}19 \times 10^{27}$ électrons. (b) Pour que l'attraction gravifique soit égale à l'attraction électrostatique, il faut transférer une charge q telle que $G\ m^2 = k\ q^2$, où G est la constante de gravitation et k la constante de Coulomb. On trouve :

$$q^2 = (6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2})\ (5\ \text{kg})^2\ /\ (9{,}00 \times 10^9\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2})$$

et $q = 4{,}3 \times 10^{-10}$ C, soit :

$$(4{,}3 \times 10^{-10}\ \text{C})\ /\ (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C / électron}) = 2{,}69 \times 10^9\ \text{électrons}.$$

La fraction à transférer est donc de l'ordre de $2{,}2 \times 10^{-18}$.

---

77 Si x est la distance entre le point cherché et la charge q, l'égalité des forces requiert que $x^2 = (a\ -\ x)^2\ /\ 2$. Si nous posons $t = x\ /\ a$, cette équation se réduit à $t^2\ -\ 2\ t\ -\ 1 = 0$, dont la solution acceptable (positive) est $t = 1 - \sqrt{2} = 0{,}414$. Le point cherché est donc situé sur le segment qui joint les deux charges, à une distance $x = 0{,}414\ a$ de la charge q.

---

78 Avec une vitesse angulaire $\omega = 2\ \pi\ /\ T = 2{,}69 \times 10^{-6}\ \text{s}^{-1}$, on trouve pour la Lune une accélération centripète $a_l = \omega^2\ r = 2{,}79 \times 10^{-3}\ \text{m s}^{-2}$. Puisque la force de gravitation décroît en $1\ /\ r^2$, l'accélération de la pesanteur doit être de la forme $g'(r) = C\ /\ r^2$. On connaît l'accélération de la pesanteur sur la Terre, au niveau du sol, $g = 9{,}8\ \text{m s}^{-2}$ et on peut en déduire la valeur de la constante :

$$C = (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (6{,}38 \times 10^6\ \text{m})^2 = 4{,}0 \times 10^{14}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-2}.$$

Avec cette valeur, l'accélération de la pesanteur au niveau de l'orbite de la Lune se calcule aisément : $g'(r = 3{,}84 \times 10^8\ \text{m}) = 2{,}71 \times 10^{-3}\ \text{m s}^{-2}$. L'accord entre les deux valeurs a_l et g' indique que c'est bien la pesanteur qui est responsable du mouvement de la Lune.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 6

Travail, énergie et puissance

RAPPELS

Le travail d'une force constante **F** qui agit sur un mobile pendant que celui-ci se déplace en ligne droite sur une distance l est, par définition, le produit $W = F\, l \cos\theta$, où F est la grandeur de la force et θ représente l'angle entre le vecteur **F** et la direction du déplacement ($F_x = F \cos\theta$ est la projection du vecteur **F** sur la direction du déplacement). Le travail est *résistant* (négatif) si l'angle θ est plus grand que l'angle droit et *moteur* (positif) si l'angle θ est plus petit que l'angle droit. Si la force et le déplacement sont perpendiculaires, le travail de cette force est nul.

L'énergie cinétique d'un mobile de masse m, animé d'une vitesse v, vaut $E_c = (1/2)\, m\, v^2$. L'énergie cinétique finale d'un objet est l'énergie cinétique initiale augmentée du travail effectué par toutes les forces qui agissent sur cet objet.

Si des forces conservatives agissent sur un corps, leurs effets peuvent être inclus dans l'expression de l'énergie potentielle E_p. Les autres forces qui agissent sur l'objet sont appelées les forces appliquées. Ces forces effectuent un travail W_a et l'expression générale entre travail et énergie peut être écrite sous la forme

$$E_c(B) + E_p(B) = E_c(A) + E_p(A) + W_a.$$

Lorsqu'aucun travail n'est effectué par les forces appliquées, l'énergie mécanique totale $E = E_c + E_p$ est conservée. Lorsque des forces dissipatives effectuent un travail, une partie de l'énergie mécanique est transformée en chaleur. Les forces conservatives les plus communément utilisées sont les suivantes :

(1) Au voisinage de la surface de la Terre, la force de gravitation est approximativement constante et l'énergie potentielle d'un corps de masse m est proportionnelle à son altitude h : $E_p = m\, g\, h$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(2) Plus généralement, l'énergie potentielle gravitationnelle de deux corps de masses M et m séparés par une distance r s'écrit $E_p = -G\,M\,m\,/\,r$. G est la constante gravitationnelle, égale à $6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.
(3) La force de Coulomb entre deux charges q et Q, distantes de r, donne également lieu à une énergie potentielle $E_p = k\,q\,Q\,/\,r$. Ici, k est la constante de Coulomb, qui vaut $9{,}0 \times 10^9$ N m^2 C^{-2}.

Le travail d'une force tangentielle agissant sur un corps tournant d'un angle θ autour d'un axe est le produit du moment τ de la force par l'angle de rotation : $W = \tau\,\theta$. La puissance s'exprime en fonction de la vitesse angulaire ω par l'expression $P = \tau\,\omega$ et l'énergie cinétique de rotation s'écrit $E_c = (1/2)\,I\,\omega^2$, où I est le moment d'inertie du corps en rotation.

SOLUTION DES EXERCICES

6.1 LE TRAVAIL

1 La force de 10 N, projetée sur la direction du déplacement, représente $F_x = (10\text{ N}) \cos 20° = 9{,}4$ N. Pour un déplacement de 6 m, le travail réalisé vaut (9,4 N) (6 m) = 56,4 J.

---

3 La force horizontale exercée par la fillette compense exactement la force de frottement, égale à (0,2) (40 N) = 8 N. Le travail de cette force sur 10 m vaut W = (8 N) (10 m) = 80 J.

---

4 Dans ce problème, l'angle entre la force appliquée et le déplacement vaut 80°. $W = 2{,}21 \times 10^5$ J.

6.2 L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

5 (a) L'énergie cinétique se calcule par $E_c = m\,v^2/2$ et vaut 67,5 J. (b) L'énergie cinétique gagnée provient du travail de la force appliquée à la balle par le lanceur. Si cette force est supposée constante, elle s'obtient en divisant le travail par le déplacement correspondant :

$$F = (67{,}5\text{ J}) / (1{,}5\text{ m}) = 45\text{ N}.$$

---

7 Nous référant à la force centripète, $m\,v^2\,/\,r$, la relation est immédiate.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

8 L'accélération constante qui conduit à arrêter sur une distance l un mobile lancé à la vitesse v_0 vaut $a = v_0^2 / (2\ l)$ (on obtient ce résultat en exprimant que l'énergie cinétique initiale est progressivement éliminée par le travail des forces de frottement, ou en éliminant explicitement l'instant t de l'arrêt entre les lois du mouvement uniformément accéléré $l = v_0\ t - a\ t^2 / 2$ et $v_0 - a\ t = 0$). Ici, $a = (1/2)\ (33\ \text{m s}^{-1})^2 / (0{,}2\ \text{m}) = 22{,}5\ \text{m s}^{-2}$. La force correspondante vaut $(10\ \text{kg})\ (22{,}5\ \text{m s}^{-2}) = 225\ \text{N}$.

6.3 ENERGIE POTENTIELLE ET FORCES CONSERVATIVES

11 Ces routes sont allongées par des lacets pour diminuer les pentes. La force pesanteur étant conservative, l'énergie potentielle à gagner dans l'ascension est indépendante du chemin suivi.

---

12 L'énergie totale au point le plus élevé, où la vitesse s'annule, se réduit à l'énergie potentielle $E = m\ g\ h$. Au point le plus bas ($h = 0$), l'énergie totale ne contient plus que l'énergie cinétique $E = m\ v^2 / 2$. La conservation de l'énergie totale implique l'égalité $m\ v^2 / 2 = m\ g\ h$, ce qui entraîne $v = (2\ g\ h)^{1/2}$. Ici, $v = [2\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (2\ \text{m})]^{1/2} = 6{,}3\ \text{m s}^{-1}$.

---

13 Ce travail est nul, la force pesanteur étant conservative.

---

14 (a) La force dissipative de 1,3 N agit, dans le sens du mouvement, sur une distance de 5 m. Le travail nécessaire pour compenser les effets de cette force vaut donc $W = (1{,}3\ \text{N})\ (5\ \text{m}) = 6{,}5\ \text{J}$. (b) La variation d'énergie potentielle est $\Delta E_p = m\ g\ h = (4{,}5\ \text{kg})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{,}5\ \text{m}) = 22\ \text{J}$. Au total, (c) le saumon doit produire $(6{,}5\ \text{J}) + (22\ \text{J}) = 28{,}5\ \text{J}$ pour remonter l'échelle.

---

15 Comme dans l'exercice 6-12, la vitesse à l'altitude zéro est liée à l'altitude maximale atteinte par la relation $v = (2\ g\ h)^{1/2}$. On trouve $v = 31{,}3\ \text{m s}^{-1}$.

---

16 Horizontalement, la voiture continue à la vitesse $v_x = 30\ \text{m s}^{-1}$. Verticalement, dans sa chute de 20 m, elle prend progressivement une vitesse $v_y = (2\ g\ h)^{1/2}$, soit $v_y = 19{,}8\ \text{m s}^{-1}$. La grandeur du vecteur vitesse est alors :

$$v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = 35{,}9\ \text{m s}^{-1}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

17 Le moteur de l'ascenseur doit compenser la pesanteur pour une masse de (2000 kg) – (1700 kg) = 300 kg : la variation d'énergie potentielle du système formé de l'ascenseur et du contrepoids est donc :

$$(300\ \text{kg})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (30\ \text{m}) = 8{,}82 \times 10^4\ \text{J}.$$

6.4 LES FORCES DISSIPATIVES

18 L'énergie cinétique initiale du palet est $E_c = m\ v^2 / 2$. Cette énergie disparaît progressivement suite au travail de la force de frottement sur la glace. Celle-ci est le produit du coefficient de frottement cinétique ($\mu = 0{,}1$) et de la force normale, constituée ici par le poids du palet $m\ g$. Si nous appelons l la distance d'arrêt, le travail de la force de frottement est $\mu\ m\ g\ l$. Le palet s'arrête lorsque ce travail est suffisant pour compenser l'énergie cinétique initiale. On y arrive lorsque $\mu\ m\ g\ l = m\ v^2 / 2$. On trouve ainsi $l = v^2 / (2\ \mu\ g)$, soit $l = 2{,}0$ m.

---

20 La dénivellation subie vaut $h = (100\ \text{m}) \sin 30° = 50$ m. La variation d'énergie potentielle correspondante est donc $\Delta\ E_p = m\ g\ h = (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (50\ \text{m})\ m$. La variation d'énergie cinétique (en supposant que le traîneau parte du repos) vaut $\Delta\ E_c = m\ (20\ \text{m s}^{-1})^2 / 2$. La fraction d'énergie dissipée par frottement correspond à $(\Delta\ E_p - \Delta\ E_c) / \Delta\ E_p = 0{,}592$.

6.5 PRINCIPE DE CONSERVATION

21 (a) Le travail nécessaire pour vaincre la pesanteur est :

$$\Delta\ E_p = m\ g\ h = (50\ \text{kg})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (3000\ \text{m}) = 1{,}47 \times 10^6\ \text{J}.$$

Si l'utilisation énergétique de la graisse était complète, il suffirait de :

$$(1{,}47 \times 10^6\ \text{J}) / (3{,}8 \times 10^7\ \text{J kg}^{-1}),$$

soit 0,0387 kg de graisse pour produire cette énergie. Le rendement n'étant que de 20 %, ou 1/5, il en faudra en fait une quantité 5 fois plus grande, c'est-à-dire 0,194 kg.

---

24 Lorsque les masses sont au repos, leur énergie cinétique est nulle et nous fixerons leur énergie potentielle à la valeur $m\ g\ d$. L'énergie totale vaut donc $m\ g\ d$. Lorsqu'elles ont parcouru la distance d, leur énergie cinétique est devenue :

$$E_c = 2\ m\ v^2 / 2.$$

L'énergie potentielle totale a diminué de $m\ g\ d$. L'énergie totale est, à ce moment, $m\ v^2$. La conservation de l'énergie impose donc $m\ g\ d = m\ v^2$, ou $v = (g\ d)^{1/2}$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

26 Dans la première phase, l'énergie potentielle de la boîte est accrue de (20 kg) (9,8 m s^{-2}) (1,6 m) = 314 J. Ensuite, elle gagne encore :

$$(20 \text{ kg}) (6 \text{ m s}^{-1})^2 / 2 = 360 \text{ J}$$

d'énergie cinétique. Au total, le lanceur aura effectué un travail de :

$$(314 \text{ J}) + (360 \text{ J}) = 674 \text{ J}.$$

---

27 Voir l'exercice 6-26.

$$(40 \text{ kg}) (9{,}8 \text{ m s}^{-2}) (100 \text{ m}) = 39200 \text{ J}; (40 \text{ kg}) (1 \text{ m s}^{-1})^2 / 2 = 20 \text{ J}.$$

Au total : 39220 J.

6.6 ENERGIE POTENTIELLE GRAVITATIONNELLE

28 L'énergie totale de la navette de masse m en orbite circulaire à la distance r du centre de la Terre vaut $E = -G\,m\,M_T / r + m\,v^2 / 2$. La force centripète étant ici constituée par la force de gravitation, on vérifie également l'égalité :

$$m\,v^2 / r = G\,m\,M_T / r^2,$$

qui montre que l'énergie cinétique $m\,v^2 / 2$ est, en valeur absolue, la moitié de l'énergie potentielle. De ce fait, l'énergie totale peut s'exprimer directement en fonction du rayon de l'orbite : $E = -(1/2)G\,m\,M_T / r$, ou encore, compte tenu de ce que l'accélération de la pesanteur au niveau du sol vaut $g = G\,M_T / R_T^2$, $E = -(1/2)m\,g\,R_T\,(R_T / r)$. Ici, l'énergie de la navette sur une orbite de rayon $r = 2\,R_T$ est égale à $-(1/4)m\,g\,R_T$ et vaut $-(1/6)m\,g\,R_T$ sur une orbite d'altitude double. L'énergie nécessaire pour déplacer la navette est donc :

$$[-(1/6)\,m\,g\,R_T] - [-(1/4)\,m\,g\,R_T] = (1/12)\,m\,g\,R_T.$$

---

29 L'exercice 6-28 rappelle que l'énergie d'une navette gravitant à une distance R du centre d'un objet de masse M_s vaut $E = -(1/2)\,G\,m\,M_s / R$. (a) L'énergie nécessaire pour la libérer (atteindre l'énergie zéro) à partir d'une orbite de rayon R est donc $E_s = G\,m\,M_s / (2\,R)$. (b) De même, l'énergie qu'il a été nécessaire de lui fournir pour le libérer de l'attraction terrestre à partir du sol est :

$$E_T = G\,m\,M_T / (2\,R_T). \text{ (c) } E_s / E_T = (M_s / M_T)\,(R_T / R) = 14{,}15.$$

---

31 Voir l'exercice 6-29. La vitesse de libération vaut :

$$v = (2\,g_x\,R_x)^{1/2} = [2\,(4\,g)\,(2\,R_T)]^{1/2} = 3{,}17 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

---

32 Soient M_T la masse de la Terre, M_L la masse de la Lune, R la distance entre les centres de la Terre et de la Lune et x la distance cherchée. L'énergie potentielle d'un satellite de masse m, due à la présence de la Terre, à une distance x du centre de la Terre vaut $G\,m\,M_T / x$. Au même endroit, l'énergie potentielle due

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

à la présence de la Lune vaut $G\,m\,M_L\,/\,(R\,-\,x)$. Si nous identifions ces deux contributions, nous obtenons une distance :

$$x = R\,/\,(1 + M_L\,/\,M_T) = 3{,}79 \times 10^5 \text{ km}.$$

L'influence de la Terre reste très importante jusqu'au voisinage immédiat de la Lune.

6.7 LA PUISSANCE

34 L'équipe A applique à la corde une force de 4000 N qui déplace son point d'application de 0,01 m par seconde. La puissance de l'équipe A correspond à l'énergie qu'elle dépense par seconde, donc au travail réalisé en une seconde : $P = (4000 \text{ N})\ (0{,}01 \text{ m s}^{-1}) = 40 \text{ W}$.

---

36 La puissance à développer à vitesse constante v est le produit d'une force égale au poids de la charge et de la vitesse verticale : $P = m\,g\,v$. Suivant les données de l'exercice, nous calculons une vitesse :

$$v = (2000 \text{ W})\,/\,[(1000 \text{ kg})\ (9{,}8 \text{ m s}^{-2})] = 0{,}2 \text{ m s}^{-1}$$

---

37 (a) La puissance pour un poisson dont la masse est 0,4 kg est :

$$P = (4{,}5 \text{ W kg}^{-1})\ (0{,}4 \text{ kg}) = 1{,}80 \text{ W}.$$

(b) Si le poisson nage à la vitesse $v = 0{,}35 \text{ m s}^{-1}$, cette puissance correspond à une force $F = P\,/\,v = (1{,}80 \text{ W})\,/\,(0{,}35 \text{ m s}^{-1}) = 5{,}14 \text{ N}$. (c) Le travail W effectué en un laps de temps $\Delta\,t$ de 10 minutes vaut :

$$W = P\ \Delta\ t = (1{,}8 \text{ W})\ [(10)\ (60 \text{ s})] = 1080 \text{ J}.$$

---

38 Si la vitesse du cycliste est de 8 m s^{-1}, il s'élève, sur une côte inclinée à 4 °par rapport à l'horizontale à la vitesse $v_y = (8 \text{ m s}^{-1}) \sin 4° = 0{,}558 \text{ m s}^{-1}$. La puissance nécessaire pour vaincre la pesanteur est :

$$P = m\,g\,v_y = (100 \text{ kg})\ (9{,}8 \text{ m s}^{-2})\ (0{,}558 \text{ m s}^{-1}) = 546 \text{ W}.$$

---

40 Le travail requis pour remonter deux skieurs de 80 kg à 500 m d'altitude est $W = 2\ (80 \text{ kg})\ (9{,}8 \text{ m s}^{-2})\ (500 \text{ m}) = 7{,}84 \times 10^5 \text{ J}$. La puissance nécessaire pour effectuer ce travail toutes les 12 s est donc $P = W\,/\,(12 \text{ s}) = 6{,}53 \times 10^4 \text{ W}$.

---

42 $(350 \text{ W m}^{-2})\ (2\,/\,100) = 7 \text{ W m}^{-2}$ sont transformés en énergie éolienne. Pour l'ensemble de la surface terrestre, ceci représente :

$$(7 \text{ W m}^{-2})\ (4\,\pi\,R_T^2) = (7 \text{ W m}^{-2})\ (4\,\pi)\ (6{,}38 \times 10^6 \text{ m})^2 = 3{,}58 \times 10^{15} \text{ W}.$$

(a) On trouve donc 358 fois l'énergie consommée par l'humanité entière.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(b) 3% de l'énergie éolienne, soit $1{,}07 \times 10^{14}$ W suffiraient pour assurer les besoins énergétiques de l'humanité.

6.8 TRAVAIL ET ÉNERGIE DANS UN MOUVEMENT DE ROTATION

43 Un tour par seconde représente une vitesse angulaire $\omega = 2\ \pi\ \text{s}^{-1}$ et l'énergie cinétique de rotation s'obtient à partir du moment d'inertie I en écrivant $E_c = I\ \omega^2 / 2$. On trouve $E_c = (0{,}04\ \text{kg m}^2)\ (2\ \pi)^2 / 2 = 0{,}790$ J.

---

48 Le moment d'inertie de la roue est $I = m\ R^2 = (4\ \text{kg})\ (0{,}35\ \text{m})^2 = 0{,}49\ \text{kg m}^2$. La vitesse angulaire de rotation vaut initialement :

$$\omega = 5\ \text{tours s}^{-1} = 5\ (2\ \pi)\ \text{s}^{-1} = 31{,}41\ \text{s}^{-1},$$

ce qui donne une énergie cinétique :

$$E_c = I\ \omega^2 / 2 = (0{,}49\ \text{kg m}^2)\ (31{,}41\ \text{s}^{-1})^2 / 2 = 242\ \text{J}.$$

Les forces de frottement devront donc dissiper 242 J en 20 tours, c'est-à-dire en 20 (2 π) rad. Le moment des forces de frottement est donc :

$$\tau = W / \theta = (242\ \text{J}) / [20\ (2\ \pi)] = 1{,}92\ \text{N m}.$$

(b) La force donnant ce moment, appliquée à 1 cm de l'axe, est égale à :

$$F = \tau / r = (1{,}92\ \text{N m}) / (0{,}01\ \text{m}) = 192\ \text{N}.$$

6.9 LES SAUTS ; LES LOIS D'ÉCHELLE EN PHYSIOLOGIE

49 Le travail total développé par le sauteur pendant la phase d'élan lui permet (1) de remonter d'abord la hauteur d nécessaire à l'élan et (2) d'atteindre la hauteur h dans un mouvement libre, sans qu'il y ait de contact avec le sol. Pour un animal de masse m, le travail nécessaire pour vaincre la pesanteur est $m\ g\ (d + h)$ et, plus simplement $w = g\ (d + h)$ lorsque ce travail est rapporté à la masse de l'animal. La durée de la phase d'élan s'obtient en appliquant les lois du mouvement accéléré. La vitesse atteinte avant de quitter le sol est $v_t = (2\ g\ h)^{1/2}$. Lorsque l'on élimine l'accélération a entre les équations du mouvement $v_t = a\ t$ et $d = a\ t^2 / 2$, on trouve $t = 2\ d / v_t$, ou encore $t = [2 / (g\ h)]^{1/2}\ d$. La puissance moyenne développée par kg vaut $P = g\ (d + h) / t$. (a) Pour le kangourou, $w = 36{,}3\ \text{J kg}^{-1}$, $P = 132\ \text{W kg}^{-1}$; (b) pour la sauterelle, $w = 3{,}23\ \text{J kg}^{-1}$, $P = 131\ \text{W kg}^{-1}$.

---

50 On compare les valeurs de $d + h$: on trouve la valeur la plus grande pour le kangourou et la valeur la plus petite pour la puce.

---

51 Dans l'hypothèse faite ici, la puissance d'un animal devrait être proportionnelle à l^2, alors que sa masse est proportionnelle à l^3. La puissance par unité de masse devrait donc être proportionnelle à l^{-1}. L'énergie produite par unité de masse

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit

étant constante, le temps nécessaire pour produire une énergie donnée devrait être proportionnelle à l et les pulsations cardiaques plus lentes pour les grands animaux.

---

52 La perte de chaleur est proportionnelle à l^2 et la masse de l'animal à l^3. La perte de chaleur par unité de masse est proportionnelle à l^{-1}, et est donc plus faible pour les grands animaux.

6.10 LA COURSE À PIED

53 (a) $F = c\,v = (89{,}7\ \text{N s m}^{-1})\ (8\ \text{m s}^{-1}) = 718\ \text{N}$. (b) $P = F\,v = 5740\ \text{W}$.

---

54 $c = (100/70)\ (89{,}7\ \text{N s m}^{-1}) = 128{,}1\ \text{N s m}^{-1}$. $P = c\,v^2 = 6279\ \text{W}$, ce qui représente, en masse de graisse, $0{,}78\ \text{g s}^{-1}$.

SOLUTION DES PROBLÈMES

56 (a) Au point A, le skieur a la même vitesse que le bateau qui le tractait, soit $v_A = (55/3{,}6)\ \text{m s}^{-1}$. Arrivé au point B, le skieur a acquis de l'énergie potentielle $m\,g\,L$ et gardé de l'énergie cinétique $m\,v_B^2/2$. Le bilan énergétique sur le tremplin s'écrit $m\,v_A^2/2 - F_f\,\ell = m\,g\,L + m\,v_B^2/2$. La force de frottement se définit par $F_f = \mu_c\,N$ où la norme de **N** est égale à la composante perpendiculaire au tremplin du poids, soit $N = m\,g\cos 10°$. Quant à ℓ, il représente la longueur du tremplin; il vaut $\ell = L/\sin 10°$. Le bilan d'énergie devient :

$$m\,v_A^2/2 - \mu_c\,m\,g\cos 10°\,L/\sin 10° = m\,g\,L + m\,v_B^2/2.$$

On peut simplifier la masse m du skieur et remplacer v_A, g, L par leur valeur. On obtient

$$\frac{1}{2}\left(\frac{55}{3,6}\right)^2 - \mu_c\frac{9,81}{\text{tg } 10°} = 9,81 + \frac{v_B^2}{2}$$

La résolution de cette équation à 2 inconnues nécessite l'analyse du saut. Entre le point B et le point correspondant à la hauteur maximale du saut, l'énergie totale se conserve, en l'absence de frottements de l'air. En ce dernier point, l'énergie cinétique ne fait plus intervenir que la composante horizontale de la vitesse. Comme le mouvement horizontal est un MRU, la composante selon X de la vitesse est constante et vaut $v_{Bx} = v_B\cos 10°$. On peut donc écrire, à la hauteur maximale du saut et après simplification de la masse :

$$v_B^2/2 + g\,L = g\,H + v_B^2\cos^2 10°/2.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

En remplaçant L, g et H par leur valeur, on calcule la valeur de $v_B = 13{,}97\ \text{m s}^{-1}$. On introduit cette valeur dans l'expression du bilan énergétique et on calcule $\mu_c = 0{,}17$.

(b) Entre le point B et le point de contact avec l'eau, le mouvement est à 2 dimensions, un MRU suivant l'horizontale X, un MRUA suivant la verticale Y. Les lois des espaces s'écrivent, à la réception sur l'eau :

$$y = y_0 + v_{0y}\, t + a\, t^2 / 2 \text{ et } x = x_0 + v_{0x}\, t$$

avec $y = 0$, $y_0 = L = 1$ m, $v_{0y} = v_B \sin 10°$, $a = -g = -9{,}81\ \text{m s}^{-2}$, $x = d$, $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_B \cos 10°$. La loi des espaces en Y permet de calculer le temps passé dans l'air en résolvant l'équation du second degré :

$$0 = (1\ \text{m}) + (13{,}97\ \text{m s}^{-1}) \sin 10°\, t - (9{,}81\ \text{m s}^{-2})\, t^2 / 2.$$

On trouve deux solutions dont seule la positive sera retenue; il s'agit de $t = 0{,}76$ s. On l'introduit dans la loi des espaces en X et on trouve $x = d = 10{,}5$ m.

---

57 Dans une chute d'eau de hauteur h, l'énergie potentielle $m\, g\, h$ de chaque particule d'eau de masse m se transforme en énergie cinétique. Au bas de la chute elle vaut $m\, v^2 / 2$. De l'égalité $m\, g\, h = m\, v^2 / 2$, on déduit $h = v^2 / (2\, g)$.

(a) Une cascade pourra être remontée à la nage si la vitesse de l'eau ne dépasse pas $5\ \text{m s}^{-1}$. La limite correspond à une hauteur de :

$$(5\ \text{m s}^{-1})^2 / [2\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})] = 1{,}28\ \text{m}.$$

(b) Pour une cascade de 1 m, la vitesse de l'eau atteint, en aval, $v = (2\, g\, h)^{1/2}$, c'est-à-dire $4{,}437\ \text{m s}^{-1}$. Le poisson remonte donc cette cascade à la vitesse de $(5\ \text{m s}^{-1}) - (4{,}437\ \text{m s}^{-1}) = 0{,}573\ \text{m s}^{-1}$.

(c) Il ne peut lui rester plus de 1,28 m à franchir et il doit donc sauter à $(2\ \text{m}) - (1{,}28\ \text{m}) = 0{,}72$ m.

(d) Pour atteindre cette hauteur, la vitesse initiale doit être :

$$v = (2\, g\, h)^{1/2} = [2\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{,}724\ \text{m})]^{1/2} = 3{,}77\ \text{m s}^{-1}.$$

---

58 (a) Par définition, le travail d'une force W_F est le produit scalaire de la force **F** par le déplacement **d**. La grandeur du travail sera le produit de la norme de la force, de la norme du déplacement (20 m) et du cosinus de l'angle entre les directions de ces deux vecteurs. Dans cet exercice, le déplacement est un vecteur dont la direction est parallèle au plan incliné et le sens vers le bas de ce plan. Le calcul du travail de la réaction normale **N** est immédiat : il est nul puisque l'angle entre cette normale et le vecteur déplacement est égal à 90°. Le travail de la force **F** est égal à :

$$W_F = F\ (20\ \text{m}) \cos 180° = (80\ \text{N})\ (20\ \text{m})\ (-1) = -16 \times 10^2\ \text{J}.$$

C'est un travail négatif, un travail résistant. Le travail de la force de frottement $\mathbf{F}_f$ est égal à $W_{F_f} = F_f\ (20\ \text{m}) \cos 0°$. La force de frottement se définit par $F_f = \mu_c\, N$ où N compense la composante perpendiculaire au plan du poids **w**. N vaut par conséquent $m\, g \cos 20°$. On calcule donc :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit

$$W_{F_f} = (0{,}2)\ (4\ \text{kg})\ (9{,}81\ \text{m s}^{-2}) \cos 20\,°(20\ \text{m}) = 1{,}5 \times 10^2\ \text{J}.$$

Il s'agit d'un travail positif, un travail moteur. Le travail du poids **w** se calcule par $W_w = m\,g\,(20\ \text{m}) \cos 70\,° = (4\ \text{kg})\ (9{,}81\ \text{m s}^{-2})\ (20\ \text{m}) \cos 70\,° = 2{,}7 \times 10^2$ J. C'est également un travail moteur. (b) La puissance moyenne développée par la force **F** se calcule par $\overline{W} = \text{F}\,\overline{v}$ où $\overline{v}$ est la vitesse moyenne du corps. Cette vitesse moyenne se calcule par $\overline{v} = \Delta(x)/\Delta(t)$. Pour connaître le $\Delta(t)$, nous devons faire appel à la deuxième loi de Newton qui nous permettra de trouver l'accélération du corps sur le plan incliné ; nous introduirons alors cette accélération dans la loi des espaces du MRUA pour déterminer le temps nécessaire au parcours des 20 m. La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$-\mu_c\ m\,g \cos 20\,° - m\,g \sin 20\,° + F = m\,a.$$

En introduisant les différentes valeurs données dans l'énoncé, on trouve une accélération égale à $a = 14{,}8\ \text{m s}^{-2}$. La loi des espaces du MRUA suivant la direction du plan incliné nous donne, en tenant compte d'une position et d'une vitesse initiales nulles, un temps de parcours $t = 1{,}64$ s. La vitesse moyenne de l'objet est par conséquent égale à $\overline{v} = (20\ \text{m})/(1{,}64\ \text{s}) = 12{,}2\ \text{m s}^{-1}$. On peut finalement calculer la puissance moyenne développée par la force **F** :

$$W = (80\ \text{N})\ (12{,}2\ \text{m s}^{-1}) = 976\ \text{W}.$$

---

59 (a) Le volume des pluies annuelles se calcule par le produit de la superficie des USA et de la hauteur moyenne des chutes, soit :

$$V = (8 \times 10^{12}\ \text{m}^2)\ (0{,}75\ \text{m}) = 6 \times 10^{12}\ \text{m}^3.$$

En utilisant $\rho = 1000\ \text{kg m}^{-3}$ pour la masse volumique de l'eau, on calcule la masse des eaux pluviales $m = \rho\,V = 6 \times 10^{15}$ kg.

(b) L'énergie potentielle dissipée se calcule par $E_p = m\,g\,h$ et vaut :

$$E_p = (6 \times 10^{15}\ \text{kg})\ (9{,}81\ \text{m s}^{-2})\ (500\ \text{m}) = 2{,}9 \times 10^{19}\ \text{J}.$$

(c) L'énergie potentielle disponible à la production d'électricité se réduit donc à un tiers de la quantité calculée en (b), soit $0{,}97 \times 10^{19}$ J. La puissance se calcule par le rapport de l'énergie fournie par unité de temps. Ici, il s'agit des pluies annuelles ; le temps est donc égal à :

$$1\ \text{an} = 365{,}25\ \text{jours} = (365{,}25\ \text{jours})\ (86400\ \text{s jour}^{-1}).$$

La puissance moyenne produite serait de :

$$P = (0{,}97 \times 10^{19}\ \text{J}) / [(365{,}25\ \text{jours})\ (86400\ \text{s jour}^{-1})] = 3{,}1 \times 10^{11}\ \text{W}$$

ou encore $3{,}1 \times 10^2$ GW.

---

60 (a) (b) On peut résoudre cet exercice en utilisant la deuxième loi de Newton mais nous préférerons, dans ce chapitre, utiliser la notion d'énergie. Au point O, l'objet a une énergie potentielle $E_{pO} = m\,g\,h_O$ où $h_O = (100\ \text{m}) \sin 30\,°$. Au point A, il lui reste de l'énergie cinétique $E_A = m\,v_A^2 / 2$. Trois forces sont appliquées sur l'objet : la force de frottement, à l'origine d'un travail résistant ($W_{F_f} = F_f\ (100\ \text{m}) \cos 180\,°$), la force **F**, responsable d'un travail moteur

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

($W_F = F$ (100 m) cos 0°) et la réaction **N** dont le travail est nul car elle est perpendiculaire au déplacement. La force de frottement se définit par :

$$F_f = \mu_c N$$

où N est égale à la composante perpendiculaire à la pente du poids, soit $N = m\,g$ cos 30°. Le bilan énergétique s'écrit $E_{pO} + W_{F_{appl}} = E_A$. En introduisant les données numériques, on écrit :

$$(50\text{ kg})(9{,}81\text{ m s}^{-2})(100\text{ m})\sin 30° - (0{,}2)(50\text{ kg})(9{,}81\text{ m s}^{-2})\cos 30°(100\text{ m}) + (100\text{ N})(100\text{ m}) = (50\text{ kg})\,v_A^2/2.$$

On calcule alors $v_A = 32{,}3\text{ m s}^{-1}$.

Connaissant la vitesse au bas du plan, nous utiliserons les lois des espaces et des vitesses du MRUA le long de la pente, sachant que la position initiale et la vitesse au point O sont nulles : $x = a\,t^2/2$ et $v_A = a\,t$. Comme nous connaissons x (100 m) et que nous venons de calculer v_A, la loi des espaces nous donne $t = 6{,}2$ s par :

$$a\,t = 32{,}3 \text{ et } 100 = (32{,}3\text{ m s}^{-1})\,t/2.$$

Il suffit alors de déduire $a = (32{,}3\text{ m s}^{-1})/(6{,}2\text{ s}) = 5{,}2\text{ m s}^{-2}$. (c) Sur le plan horizontal, le bilan d'énergie entre A et B peut s'écrire $E_A + W_{F_f} = E_B$. L'énergie en A est cinétique, l'énergie en B est nulle. Les frottements sont donc responsables d'un travail résistant sur la distance d que nous cherchons.

La force de frottement est proportionnelle au coefficient μ_c et à la normale N qui vaut, cette fois, la grandeur du poids $m\,g$. Ce bilan se résume par $(50\text{ kg})(32{,}3\text{ m s}^{-1})^2/2 - (0{,}2)(50\text{ kg})(9{,}81\text{ m s}^{-2})\,d = 0$. On trouve $d = 266$ m.

---

64 (a) Le débit en volume des chutes du Niagara est le produit $Q_v = S\,v$, où S est la section droite du fleuve et v la vitesse de l'eau. On trouve ici :

$$Q_v = [(800\text{ m})(1\text{ m})](10\text{ m s}^{-1}) = 8000\text{ m}^3\text{ s}^{-1}.$$

(b) Chaque m^3 d'eau, en tombant de 50 m, perd une énergie potentielle égale à $(1000\text{ kg m}^{-3})(1\text{ m}^3)(9{,}8\text{ m s}^{-2})(50\text{ m}) = 4{,}9 \times 10^5$ J. La puissance totale disponible dans la chute est donc :

$$(8000\text{ m}^3\text{ s}^{-1})(4{,}9 \times 10^5\text{ J m}^{-3}) = 3{,}92 \times 10^9\text{ W},$$

c'est-à-dire (c) $(0{,}8)(3{,}92 \times 10^9\text{ W})/(5 \times 10^{11}\text{ W}) = 0{,}627 \times 10^{-2}$, ou 0,627 % de la consommation moyenne des Etats-Unis.

---

66 Entre P_1 (point A) et P_2 (point B), l'énergie totale, en absence de frottements, se conserve. Si le niveau d'énergie potentielle nulle est placé sur le palier P_1, l'énergie est uniquement de nature cinétique en P_1 et une somme d'énergie potentielle et cinétique en P_2. Le bilan d'énergie entre ces deux paliers s'écrit $m\,v_A^2/2 - m\,g\,h = m\,v_B^2/2$. Si l'on appelle C le point où le bloc s'arrête sur le palier P_2, le bilan d'énergie entre B et C s'écrit $E_B + W_{F_f} = E_C$. En B et en C, l'énergie potentielle est la même et de plus, en C, l'énergie cinétique est nulle. Le bilan se simplifie donc : $m\,v_B^2/2 - F_f\,(5\text{ m}) = 0$. La force de frottement sur

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit

le palier horizontal est égale à $\mu_c N$ où N est égale au poids du bloc, soit $m\,g$. Finalement, le bilan devient $m\,v_B^2 / 2 = (0{,}5)\,m\,g\,(5\text{ m})$. Nous avons donc deux expressions de l'énergie cinétique en B, qui doivent évidemment être égale : $m\,v_A^2 / 2 - m\,g\,h = (0{,}5)\,m\,g\,(5\text{ m})$. On simplifie par la masse m, on remplace v_A par sa valeur et on calcule $h = -1{,}23$ m. Avec la vitesse initiale donnée, il est donc impératif que le palier P_2 soit à un niveau inférieur à celui de P_1.

---

68 (a) La puissance P nécessaire pour restaurer l'énergie dissipée par frottement varie en fonction de la vitesse suivant la loi :

$$P = C\,(v^2 + v_0^2), \text{ où } v_0 = 18\text{ m s}^{-1}\ (65\text{ km h}^{-1}).$$

Le terme proportionnel à v^2 est associé au frottement de l'air et le terme constant $C\,v_0^2$ est associé au travail de déformation des pneus. Remarquons que si $v = v_0$, les deux contributions sont égales. Si l'on passe de la vitesse $v = v_0$ à la vitesse $v = 2\,v_0$, la puissance P augmente d'un facteur $[(2\,v_0)^2 + v_0^2] / [v_0^2 + v_0^2] = 5/2$.
(b) La quantité d'essence consommée Q est proportionnelle au produit $P\ \Delta\ t$:

$$Q = f\,P\ \Delta\ t = f\,P\,l / v,$$

et $l = (1/f)\,Q_v / P$. Si la vitesse est doublée et la puissance P multipliée par 5/2, la distance l est réduite d'un facteur 2 / (5/2) = 4/5.

---

72 La masse du Soleil vaut, dans l'hypothèse énoncée, $M_s = \rho\,(4\,\pi / 3)\,R_s^3$; on trouve donc une vitesse de libération égale à $v = [(8\,\pi / 3)\,\rho G]^{1/2}\,R_s$.

---

75 En un siècle, les hommes consomment une énergie égale à :

$$(1 \times 10^{13}\text{ W})\,(100)\,[(365{,}24)\,(24)\,(3600\text{ s})] = 3{,}1557 \times 10^{22}\text{ J}.$$

Soit ω_0 la vitesse angulaire actuelle de la Terre et ω la vitesse angulaire que l'on observera dans un siècle si l'énergie consommée est empruntée à l'énergie de rotation de la Terre. La Terre aura modifié sa vitesse de rotation de telle sorte que $I\,\omega_0^2 / 2 - I\,\omega^2 / 2 = 3{,}1557 \times 10^{22}$ J. Le moment d'inertie de la Terre vaut : $I = (2/5)\,M_T\,R_T^2 = (2/5)\,(5{,}98 \times 10^{24}\text{ kg})\,(6{,}38 \times 10^6\text{ m})^2 = 9{,}7365 \times 10^{37}\text{ kg m}^2$ et $\omega_0^2 - \omega^2 = 2\,(3{,}1557 \times 10^{22}) / I = 6{,}4821 \times 10^{-16}\text{ s}^{-2}$. On obtient ainsi $\omega = 7{,}27220477095 \times 10^{-5}\text{ s}^{-1}$ et $T = 2\,\pi / \omega = 86400{,}00529$ s, d'où la différence de $5{,}29 \times 10^{-3}$ s par siècle. Il est intéressant de remarquer que, dans ce problème, il est spécialement important d'effectuer les évaluations numériques avec précision.

---

76 L'énergie nécessaire est $P\ \Delta\,t = m\,g\ \Delta\,h$. La vitesse d'escalade vaut donc $v = \Delta\,h / \Delta\,t = P / (m\,g) \propto l^2 / l^3 \propto l^{-1}$.

---

77 La consommation d'oxygène $\Delta\,Q_O / \Delta\,t$ est proportionnelle à l^2. Or, l'énergie

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

dépensée, proportionnelle à la masse (donc à l^3) varie aussi avec la quantité d'oxygène absorbée, ΔQ_O et donc $\Delta t \propto \Delta Q_O / l^2 \propto l$.

---

78 La hauteur h atteinte lors d'un saut est fonction de la vitesse d'élan : $h = v^2 / (2\,g)$. La vitesse d'élan dépend de la puissance P développée : $P = F\,v = m\,a\,v$. Par ailleurs, $v = a\,t$ et, d'autre part, $d = a\,t^2 / 2$. On obtient ainsi $d = (1/2)\,v^2 / a$, ou $v^2 = a\,d = 2\,(P / m)\,(d / v)$. Dès lors, $v^3 = 2\,(P / m)\,d$. Si la puissance par unité de masse musculaire (P / m) était constante, la distance d'élan d étant proportionnelle à la taille l de l'animal, v^3 serait proportionnelle à l et $v \propto l^{1/3}$. Donc, $h \propto l^{2/3}$.

---

80 (a) $F_{max} = (100/60)\,(976\text{ N}) = 1627\text{ N}$.
(b) $D = c\,v = (100/60)\,(89{,}7\text{ N s m}^{-1})\,(6{,}64\text{ m s}^{-1}) = 993\text{ N}$.
(c) F_{max} ne peut être développée aussi longtemps.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 7

Quantité de mouvement et moment cinétique

RAPPELS

L'impulsion communiquée à un objet lors d'un impact sur cet objet est le produit de la force moyenne (la moyenne temporelle de la force) par la durée de l'impact. Lorsqu'une impulsion est communiquée à un objet, la variation de sa quantité de mouvement est égale à l'impulsion. Lors d'une collision entre deux objets, il y a lieu de distinguer entre les forces d'interaction et les forces extérieures. L'impulsion totale des forces d'interaction est toujours nulle, de sorte que s'il n'y a pas de force extérieure, l'impulsion totale est nulle et la quantité de mouvement est conservée. Les collisions qui se produisent en l'absence de force extérieure peuvent être décrites comme élastiques ou inélastiques, suivant que l'énergie cinétique totale se conserve ou ne se conserve pas.

Dans les mouvements de rotation, on définit l'impulsion angulaire comme le produit du moment de force moyen par la durée de l'impact. Cette impulsion angulaire est égale à la variation du moment cinétique L. En l'absence de moment de force, le moment cinétique se conserve. Pour un corps solide tournant autour d'un axe, le moment cinétique vaut $L = I\ \omega$, où I est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation et ω sa vitesse angulaire. Pour une particule qui se déplace à la vitesse v autour d'un centre donné, sur une trajectoire circulaire, le moment cinétique vaut $L = m\ v\ r = m\ \omega\ r^2$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

SOLUTION DES EXERCICES

7.1 IMPULSION ET QUANTITÉ DE MOUVEMENT

1 L'impulsion communiquée à la balle de golf est le produit de la force moyenne par la durée de la poussée : $F\ \Delta t = (2600\ \text{N})\ (1,25 \times 10^{-3}\ \text{s}) = 3,25\ \text{N s}$. Celle-ci est égale à la variation de la quantité de mouvement $m\ (v_f - v_i)$. La vitesse initiale v_i est nulle, ce qui nous permet d'obtenir la vitesse v_f communiquée à la balle en identifiant $m\ v_f = 3,25\ \text{N s}$, d'où $v_f = (3,25\ \text{N s}) / (0,047\ \text{kg}) = 69,1\ \text{m s}^{-1}$.

---

2 $F\ \Delta t = (9 \times 10^4\ \text{N s})$ et $\Delta t = 12\ \text{s}$ donnent $F = 7500\ \text{N}$.

---

4 (a) La force moyenne est le produit de la masse par l'accélération moyenne : $F = (70\ \text{kg})\ (12)\ (9,8\ \text{m s}^{-2}) = 8232\ \text{N}$. (b) L'impulsion est donc :

$$F\ \Delta t = (8232\ \text{N})\ (0,25\ \text{s}) = 2058\ \text{N s}$$

et $\Delta v = (2058\ \text{N s}) / (70\ \text{kg}) = 29,4\ \text{m s}^{-1}$.

---

5 $F = \Delta p / \Delta t = 2\ m\ v / \Delta t$.

---

6 La différence entre les deux cas tient dans la valeur de la vitesse finale : (a) $v_f = -v$ et $F\ \Delta t = m\ \Delta v = -2\ m\ v$. (b) $v_f = 0$ et $F\ \Delta t = m\ \Delta v = -m\ v$.

7.2 CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

11 Avant la collision, la quantité de mouvement du système vaut $m\ v_0$. Après la collision, elle s'écrit $(M + m)\ v$, où v est la vitesse des deux wagonnets accrochés. La conservation de la quantité de mouvement impose que $v = m\ v_0 / (M + m)$.

---

12 Avant le choc, la quantité de mouvement totale est celle de la balle, soit $(0,2\ \text{kg m s}^{-1})$.
La vitesse v après l'impact vaut $v = (0,2\ \text{kg m s}^{-1}) / (1,001\ \text{kg}) = 0,2\ \text{m s}^{-1}$.

---

13 La quantité de mouvement acquise par le camion avant l'impact sur la voiture vaut $(4500\ \text{kg})\ (10\ \text{m s}^{-1}) = 45000\ \text{N s}$. (a) Cette quantité de mouvement est conservée pendant la collision mais s'écrit, après l'impact,

$$45000\ \text{N s} = (4500\ \text{kg} + 950\ \text{kg})\ v$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

et donc, $v = 8{,}26\ \text{m s}^{-1}$. (b) La variation de la quantité de mouvement du passager correspond ainsi à une impulsion égale à (60 kg) (8,26 m s^{-1}) = 495 N s, et à une force moyenne de (495,4 N s) / (0,3 s) = 1651 N.

---

14 Au départ, la quantité de mouvement du bateau et des canettes est nulle et elle le restera après que les canettes aient été lancées. La quantité de mouvement constante s'écrit, après le choc : (3 kg) (12 m s^{-1}) + (240 kg) ($-v$) = 0, où v est la vitesse prise par le bateau. Elle vaut donc v = (36 N s) / (240 kg) = 0,15 m s^{-1}. (b) A cette vitesse, le bateau arrivera à la rive en un temps :

$$t = (5\ \text{m}) / (0{,}15\ \text{m s}^{-1}) = 33{,}3\ \text{s}.$$

---

18 La quantité de mouvement totale, avant la collision vaut :

$$(2000\ \text{kg})\ (40\ \text{m s}^{-1}) + (1000\ \text{kg})\ (-40\ \text{m s}^{-1}) = 40000\ \text{N s}.$$

Après la collision, elle vaut toujours [(1000 kg) + (2000 kg)] v = 40000 N s. La vitesse des deux voitures accrochées est donc :

$$v = (40000\ \text{N s})/(3000\ \text{kg}) = 13{,}3\ \text{m s}^{-1}$$

dans la direction prise initialement par la voiture de 2000 kg.

---

20 La quantité de mouvement totale, mesurée après la collision, est nulle. Avant la collision, elle s'exprime par (1500 kg) (30 m s^{-1}) + (1000 kg) v = 0, ce qui donne $v = -45\ \text{m s}^{-1}$.

7.3 MOUVEMENT DU CENTRE DE MASSE

22 Pour que le centre de gravité reste au repos lorsque l'homme se déplace de 2 m et le canoë d'une distance x, il faut que (30 kg) x + (70 kg) (2 m) = 0, et donc $x = -4{,}67$ m.

7.4 COLLISIONS ÉLASTIQUES ET INÉLASTIQUES

25 (a) Elle est nulle, par définition. (b) L'énergie cinétique initiale, apportée par la masse m_1 en mouvement vaut K_1 = (1000 kg) (20 m s^{-1})^2 / 2, c'est-à-dire $2{,}00 \times 10^5$ J. Après la collision, il reste une énergie cinétique :

$$K' = [m_1 /(m_1 + m_2)]K_1 = (1/3)\ (2{,}00 \times 10^5\ \text{J}) = 6{,}67 \times 10^4\ \text{J}.$$

L'énergie mécanique dissipée est donc :

$$(2{,}00 \times 10^5\ \text{J}) - (0{,}667 \times 10^5\ \text{J}) = 1{,}33 \times 10^5\ \text{J}.$$

---

27 L'énergie cinétique K' du deutéron est fonction de l'énergie cinétique K_1 du neutron incident : $K' = [m_1 /(m_1 + m_2)]\ K_1$. Ici, $m_1 = m_2$ avec une excellente

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

précision et on obtient $K' / K = 0{,}5$.

---

28 Si un neutron d'énergie K_1 subit une collision avec un deutéron, il lui communique une énergie cinétique $K_2' = [4\ m\ (2m) / (m + 2\ m)^2]\ K_1$ (m est la masse du neutron, 2 m celle du deutéron). Le rapport demandé est donc $K_2' / K_1 = 0{,}889$.
(b) Le rapport des énergies du neutron après et avant le choc vaut :

$$K_1' / K_1 = (v_1' / v_1)^2 = 0{,}111 \text{ et } v_1' / v_1 = 0{,}333.$$

7.5 MOMENT CINÉTIQUE D'UN CORPS SOLIDE

29 La vitesse angulaire de la roue est $\omega = v / r = (6\ \text{m s}^{-1}) / (0{,}86\ \text{m}) = 16{,}67\ \text{s}^{-1}$, et son moment d'inertie vaut $I = m\ r^2 = (2\ \text{kg})\ (0{,}36\ \text{m})^2 = 0{,}22592\ \text{kg m}^2$. Le moment cinétique vaut donc $L = I\ \omega = 4{,}32\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}$.

---

32 $L = I\ \omega$.
(a) Pour un cylindre plein, $I = m\ r^2 / 2 = (3\ \text{kg})\ (0{,}2\ \text{m})^2 / 2 = 0{,}06\ \text{kg m}^2$ et $L = (0{,}06\ \text{kg m}^2)\ (40\ \text{s}^{-1}) = 2{,}4\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}$.
(b) Pour un cylindre creux, $I = m\ r^2 = 0{,}12\ \text{kg m}^2$ et $L = 4{,}8\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}$.

---

36 (a) Le moment cinétique de la meule vaut :

$$L = I\ \omega = (0{,}5\ \text{kg m}^2)\ (120\ \text{s}^{-1}) = 60\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}.$$

(b) La variation de moment cinétique est égale à l'impulsion angulaire :

$$\Delta L = \tau\ \Delta t.$$

Si la meule s'arrête en 10 s, c'est qu'elle est soumise à un moment de force $(60\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}) / (10\ \text{s}) = 6\ \text{N m}$.

---

37 Le moment cinétique de la roue vaut :

$$L = (500\ \text{kg})\ (0{,}5\ \text{m})^2\ (1000\ \text{s}^{-1}) = 1{,}25 \times 10^5\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}.$$

Une force dont le moment vaut 250 N m prendra un temps :

$$\Delta t = \Delta L / \tau = (1{,}25 \times 10^5\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}) / (250\ \text{N m}) = 500\ \text{s}$$

pour arrêter la roue.

---

38 Avec un moment d'inertie I, le moment cinétique du plongeur vaut $L = I\ \omega$. Si ce moment d'inertie est divisé par un facteur 5, la vitesse angulaire doit être multipliée par 5 pour garder constant le moment cinétique. (a) On obtient donc une nouvelle vitesse angulaire $\omega' = 5\ (3\ \text{s}^{-1}) = 15\ \text{s}^{-1}$. (b) L'énergie cinétique de rotation $I\ \omega^2 / 2$ est aussi multipliée par 5.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

7.6 MOMENT CINÉTIQUE D'UNE PARTICULE

40 Le moment cinétique orbital de la Terre vaut $L = M_T\ \omega\ R^2$. La vitesse angulaire associée à la rotation autour du Soleil vaut :

$$\omega = 2\,\pi\,/\,[(365{,}25)\,(24)\,(3600\ \text{s})] = 1{,}99 \times 10^{-7}\ \text{s}^{-1}$$

et

$$L = (5{,}98 \times 10^{24}\ \text{kg})\,(1{,}99 \times 10^{-7}\ \text{s}^{-1})\,(1{,}50 \times 10^{11}\ \text{m})^2$$
$$= 2{,}68 \times 10^{40}\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}.$$

Le moment cinétique de spin vaut $s = I\ \omega$, mais ici, $I = (2/5)\ M_T\ R_T^2$ et ω est la vitesse de rotation autour de l'axe de la Terre :

$$\omega = 2\,\pi\,/\,[(24)\,(3600\ \text{s})] = 7{,}2722 \times 10^{-5}\ \text{s}^{-1}.$$

On trouve $I = 9{,}74 \times 10^{37}\ \text{kg m}^2$ et $s = 7{,}08 \times 10^{33}\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}$.

---

42 Le moment cinétique de l'électron de l'atome d'hydrogène vaut $L = m\ r\ v$. La vitesse de l'électron est donc :

$$v = L\,/\,(m\ r)$$
$$= (1{,}0055 \times 10^{-34}\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1})\,/\,[(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})\,(5{,}29 \times 10^{-11}\ \text{m})]$$
$$= 2{,}189 \times 10^{6}\ \text{m s}^{-1}.$$
$$v\,/\,c = 7{,}30 \times 10^{-3}.$$

7.7 LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT DANS LES EXERCICES SPORTIFS

43 $F = (m\ \Delta v)\,/\,\Delta t = (0{,}42\ \text{kg})\,(28\ \text{m s}^{-1})\,/\,(8 \times 10^{-3}\ \text{s}) = 1470\ \text{N}.$

---

46 Lors d'un coup de pied arrêté au football, la quantité de mouvement communiquée au ballon vaut $m\ \Delta v = (0{,}43\ \text{kg})\,(26\ \text{m s}^{-1}) = 11{,}18\ \text{kg m s}^{-1}$. Celle-ci correspond à la modification de quantité de mouvement $M\,(v_i - v_f)$ perdue par le pied. Les données du tableau 7.1 fournissent $v_i - v_f = (18 - 13)\ m\ s^{-1} = 5\ \text{m s}^{-1}$. On en tire une masse effective $M = (11{,}18\ \text{kg m s}^{-1})\,/\,(5\ \text{m s}^{-1}) = 2{,}24\ \text{kg}$.

---

47 L'énergie cinétique transférée à la balle vaut :

$$m\ v^2\,/\,2 = (0{,}15\ \text{kg})\,(39\ \text{m s}^{-1})^2\,/\,2 = 114\ \text{J}.$$

On peut trouver l'énergie cinétique de la batte avant l'impact de la manière suivante : la quantité de mouvement transférée à la balle est :

$$(0{,}15\ \text{kg})\,(39\ \text{m s}^{-1}) = 5{,}85\ \text{kg m s}^{-1}.$$

Elle correspond à la perte de quantité de mouvement $M\,(v_i - v_f)$ de la batte, où M est la masse effective de celle-ci. v_i (v_f) est la vitesse initiale (finale) de la batte. Les données du tableau 7.1 nous permettent d'écrire :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$v_i - v_f = (31 - 27)\ \text{m s}^{-1} = 4\ \text{m s}^{-1}$$

et $M = (5{,}85\ \text{kg m s}^{-1}) / (4\ \text{m s}^{-1}) = 1{,}46\ \text{kg}$.

La variation d'énergie cinétique de la batte est donc :

$$(1{,}46\ \text{kg})\ [(31\ \text{m s}^{-1})^2 - (27\ \text{m s}^{-1})^2] / 2 = 170\ \text{J}.$$

La différence avec l'énergie transférée à la balle, soit (170 J) – (114 J) = 56 J représente l'énergie dissipée par échauffement suite aux déformations intervenant au moment de l'impact.

7.8 LE GYROSCOPE

50 Le point O est le centre de la roue. L'axe Oz est vertical et dirigé de bas en haut, Oy est l'axe horizontal dirigé de gauche à droite et Ox est un axe horizontal dirigé vers l'observateur. (a) Le vecteur qui représente le moment cinétique est vertical et dirigé vers le haut (suivant Oz). (b) Le moment des forces pointe horizontalement vers l'arrière, dans le sens opposé à l'axe Ox et (c) l'extrémité du vecteur L tend à se déplacer dans le même sens : l'axe de rotation suit le mouvement de L. Un point de l'axe au-dessus du plan de la roue se déplace vers l'arrière ; un point de l'axe en-dessous du plan se déplace vers l'observateur.

SOLUTION DES PROBLÈMES

53 (a) La variation de quantité de mouvement de la balle tirée à chaque coup de fusil vaut $m\ \Delta v = (1{,}3 \times 10^{-2}\ \text{kg})\ (800\ \text{m s}^{-1}) = 10{,}4\ \text{kg m s}^{-1}$. (b) Cette variation de quantité de mouvement est compensée par celle du tireur et du traîneau, qui subissent ensemble une force de recul égale à $(10{,}4\ \text{kg m s}^{-1}) / (0{,}2\ \text{s}) = 52\ \text{N}$. (c) La variation totale de quantité de mouvement après le tir de 100 balles est de $1040\ \text{kg m s}^{-1}$, ce qui signifie une vitesse de :

$$(1040\ \text{kg m s}^{-1}) / (90\ \text{kg}) = 11{,}5\ \text{m s}^{-1}.$$

---

54 La quantité de mouvement du wagon vide vaut :

$$p = (12000\ \text{kg})\ (5\ \text{m s}^{-1}) = 60000\ \text{kg m s}^{-1}.$$

Après l'orage, sa masse est devenue 13000 kg et sa vitesse est réduite à la valeur v. Cependant, la quantité de mouvement s'est conservée et :

$$v = (60000\ \text{kg m s}^{-1}) / (13000\ \text{kg}) = 4{,}62\ \text{m s}^{-1}.$$

---

58 Avant l'impact, la quantité de mouvement totale (balle de masse m et bloc de masse M) vaut $p = (1 \times 10^{-2}\ \text{kg})\ (250\ \text{m s}^{-1}) = 2{,}5\ \text{kg m s}^{-1}$. Après le choc, elle vaut $(M + m)\ v = [(1\ \text{kg}) + (1 \times 10^{-2}\ \text{kg})]\ v$, où v est la vitesse

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

de l'ensemble (balle encastrée). Comme, en l'absence de force extérieure, la quantité de mouvement est conservée, la vitesse v du bloc contenant la balle après l'impact vaut $(2{,}5\ \text{kg m s}^{-1}) / (1{,}01\ \text{kg}) = 2{,}48\ \text{m s}^{-1}$. La réserve d'énergie cinétique correspondante $(M + m)\ v^2 / 2$ se transformera en énergie potentielle $(M + m)\ g\ h$ en atteignant la hauteur :

$$h = [(M + m)\ v^2 / 2] / [(M + m)\ g] = v^2 / (2\ g)$$
$$= (2{,}48\ \text{m s}^{-1})^2 / [2\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})] = 0{,}314\ \text{m}.$$

---

62 Si v_1 est la vitesse de la masse m_1 et v_2 la vitesse de la masse m_2, la conservation de la quantité de mouvement impose que $m_1\ v_1 + m_2\ v_2$ reste égale à la quantité de mouvement initiale, 0. On trouve ainsi $v_1 / v_2 = m_2 / m_1$. Dès lors, le rapport des énergies cinétiques vaut $[(m_1\ v_1^2 / 2)] / [(m_2\ v_2^2 / 2)] = m_2 / m_1$.

---

65 Vectoriellement, la conservation de la quantité de mouvement impose que :

$$M\ \mathbf{V} = (M - m)\ \mathbf{V}' + m\ \mathbf{v},$$

d'où $\mathbf{V}' = (M\ \mathbf{V} - m\ \mathbf{v}) / (M - m)$. (a) Si $\mathbf{v}$ et $\mathbf{V}$ sont parallèles et de mêmes sens, la grandeur V' de la vitesse du satellite vaut $V' = |M\ V - m\ v| / (M - m)$. (b) Si $\mathbf{v}$ est opposée à $\mathbf{V}$, $V' = |M\ V + m\ v| / (M - m)$. (c) Si $\mathbf{v}$ est perpendiculaire à $\mathbf{V}$, $V' = \sqrt{M^2\ V^2 + m^2\ v^2} / (M - m)$.

---

66 La conservation de la quantité de mouvement imposée suivant Ox (du Sud vers le Nord) s'exprime par $m\ v - M\ v = M\ V_x$. On calcule donc $V_x = 18\ \text{m s}^{-1}$. Suivant Oy (d'ouest en est), on a $M\ V_y + m\ v = 0$ et $V_y = -2\ \text{m s}^{-1}$. Ceci donne pour le camion une vitesse dont la grandeur est $V = 18{,}1\ \text{m s}^{-1}$, inclinée d'un angle de 83,7 ° par rapport à l'axe est-ouest. L'énergie cinétique totale avant la collision vaut :

$$(10000\ \text{kg})\ (20\ \text{m s}^{-1})^2 / 2 + (1000\ \text{kg})\ (20\ \text{m s}^{-1})^2 / 2 = 2{,}2 \times 10^6\ \text{J}.$$

Après la collision, elle vaut :

$$(1000\ \text{kg})\ (20\ \text{m s}^{-1})^2 / 2 + (10000\ \text{kg})\ [(18\ \text{m s}^{-1})^2 + (2\ \text{m s}^{-1})^2] / 2$$
$$= 1{,}84 \times 10^6\ \text{J}.$$

L'énergie dissipée lors de la collision vaut donc :

$$(2{,}2 \times 10^6\ \text{J}) - (1{,}84 \times 10^6\ \text{J}) = 0{,}36 \times 10^6\ \text{J}.$$

---

71 (a) Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, la quantité de mouvement de l'électron vaut $p = m\ v = m\ \omega\ r = L / r = n\ h / (2\ \pi\ r)$. (b) La relation classique $p^2 / (2\ m) = k\ e^2 / (2\ r)$ devient ainsi $n^2\ h^2 / [(2\ \pi\ r)^2 (2\ m)] = k\ e^2 / (2\ r)$, ce qui donne des orbites de rayon $r = n^2\ h^2 / (4\ \pi^2\ k\ m\ e^2)$. (c) Les énergies cinétiques correspondantes valent $K_n = R / n^2$, où $R = (4\ \pi^2\ k^2\ m\ e^4) / (2\ h^2)$ et les énergies totales valent $E_n = -R / n^2$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

72 L'énergie cinétique de rotation vaut $K = I\ \omega^2\ /\ 2$. Utilisant la valeur $L = I\ \omega$ du moment cinétique, on peut aussi l'exprimer par $K = (1/2)\ L^2\ /\ I$. La condition de quantification $L = n\ h\ /(2\ \pi)$ conduit alors aux valeurs discrètes $K = n^2h^2\ /(8\ \pi^2\ I)$.

---

74 La conservation du moment cinétique impose que le moment cinétique $I\ \omega$ reste constant. Avec les mains contre le corps, le moment cinétique vaut :

$$(20\ \text{kg m}^2)\ (3\ \text{s}^{-1}) = 60\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}.$$

(a) Lorsque les bras sont allongés, son moment cinétique devient $(35\ \text{kg m}^2)\ \omega$ et donc $\omega = (60\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1})\ /(35\ \text{kg m}^2) = 1{,}71\ \text{s}^{-1}$. (b) Sa vitesse angulaire de rotation reste égale à $1{,}71\ \text{s}^{-1}$, puisque le moment d'inertie du corps et des bras ne change pas.

---

78 Le moment cinétique $L = m\ \omega\ r^2$ d'une planète est constant et il en est de même du rapport $L\ /m = r^2\ \omega = r^2\ \text{d}\theta\ /\ \text{d}t = [(r)\ (r\ \text{d}\theta)]\ /\ \text{d}t$. Géométriquement (nous considérons une orbite circulaire, pour simplifier le raisonnement), $(r)(r\ \text{d}\theta)$ représente le double de l'aire $\text{d}A$ balayée en un temps $\text{d}t$ par la droite qui joint la planète au Soleil. Il en résulte que le rapport $\text{d}A\ /\text{d}t$ est constant et que les aires balayées en des temps égaux sont égales.

---

80 (a) La vitesse angulaire de la Terre autour de son axe vaut :

$$\omega_0 = 2\ \pi\ /\ (24\ \text{h}) = 2\ \pi\ /\ [(24\ \text{h})\ (3600\ \text{s h}^{-1})] = 7{,}27 \times 10^{-5}\ \text{s}^{-1}.$$

Si la durée du jour se réduisait d'une heure, on trouverait une vitesse angulaire de $\omega_1 = 7{,}588 \times 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$. Comme le moment d'inertie de la Terre vaut $I = (2/5)\ M_T\ R_T^2 = 9{,}736 \times 10^{37}\ \text{kg m}^2$, la variation de vitesse angulaire $\omega_0 - \omega_1$ correspond à une variation de moment cinétique causée par l'application d'une impulsion angulaire $I\ (\omega_0 - \omega_1) = 3{,}08 \times 10^{32}\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}$. (b) Si cette impulsion angulaire correspond à un couple de forces agissant pendant une heure, ce moment vaut $8{,}56 \times 10^{28}$ N m, ce qui correspond à deux forces de $6{,}7 \times 10^{22}$ N.

---

83 (a) Comme il n'y a pas de force extérieure, la quantité de mouvement est conservée. L'ensemble étant au repos avant le tir, la quantité de mouvement initiale est nulle et on peut écrire $0 = M\ \mathbf{V} + m\ \mathbf{v}$ où $\mathbf{V}$ est la vitesse de recul du lanceur, m la masse de la roquette et $\mathbf{v}$ la vitesse de ce projectile. En utilisant les données numériques, on a $0 = (5 \times 10^3\ \text{kg})\ V + (100\ \text{kg})\ (350\ \text{m s}^{-1})$, d'où l'on tire $V = -7\ \text{m s}^{-1}$. Le signe négatif indique que $\mathbf{V}$ est dans le sens inverse de $\mathbf{v}$ et qu'il s'agit bien d'un recul. (b) S'il n'y a pas de frottement, il y a conservation de l'énergie totale entre le bas du plan incliné et l'endroit où le lanceur s'arrête : $M\ V^2\ /\ 2 = M\ g\ H$. Après simplification de la masse, on calcule :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$H = (7 \text{ m s}^{-1})^2 / [2\ (9{,}81 \text{ m s}^{-2})] = 2{,}5 \text{ m}.$$

(c) La force appliquée étant la force de frottement, il faut utiliser le bilan énergétique et écrire $M\ V^2 / 2 + W_{F_f} = M\ g\ H$ où W_{F_f} est le produit de la force de frottement et du déplacement d le long du plan. La force de frottement se définit par $F_f = \mu_c\ N$ où N compense la composante perpendiculaire à la rampe du poids, soit $N = M\ g \cos \theta$. Les vecteurs $\mathbf{F_f}$ et $\mathbf{d}$ étant anti-parallèles, le travail est résistant : $W_{F_f} = -\ \mu_c\ M\ g \cos \theta\ d$ où $d = H / \sin \theta$. Introduisons toutes ces expressions dans le bilan énergétique; on obtient : $M\ V^2 / 2 - \mu_c\ M\ g \cos \theta\ H / \sin \theta = M\ g\ H$. Après simplification par M et en introduisant les données numériques ($V = 7 \text{ m s}^{-1}$, $\theta = 10°$, $H = 1$ m), on calcule $\mu_c = 0{,}26$.

---

84 Le pendule écarté d'un angle de 20° possède de l'énergie potentielle : $E_p = m\ g\ h$ où $h = \ell - \ell \cos 20°$, avec $\ell = 1$ m. Une fois lâchée, la masse acquiert de l'énergie cinétique en perdant de l'énergie potentielle. L'énergie totale étant conservée, on peut calculer

$$v = [2\ g\ h]^{1/2} = [2\ g\ (1 - \cos 20°)]^{1/2} = 1{,}09 \text{ m s}^{-1}.$$

Les deux masses adhèrant ensuite l'une à l'autre, la quantité de mouvement est conservée alors que l'énergie totale ne l'est pas. On peut donc utiliser $m\ \mathbf{v} = (m + m)\ \mathbf{V}$ où $\mathbf{V}$ est la vitesse des 2 masses soudées après la collision. On calcule $V = v / 2 = 0{,}54 \text{ m s}^{-1}$. L'ensemble des 2 masses s'élève ensuite, alors que l'énergie totale est conservée. La hauteur maximale atteinte par le système s'évalue par $(m + m)\ V^2 / 2 = (m + m)\ g\ h'$, d'où l'on tire $h' = (0{,}54 \text{ m s}^{-1})^2 / 2\ (9{,}81 \text{ m s}^{-2}) = 0{,}015$ m. (b) Avant la collision, l'énergie cinétique était $m\ v^2 / 2$ alors qu'après la collision, on a $(2\ m)\ V^2 / 2$. La différence correspond à l'énergie ΔE dissipée par le phénomène d'adhésion : $\Delta E = E_{finale} - E_{initiale} = (2\ m)\ V^2 / 2 - m\ v^2 / 2 = -0{,}09$ J. Le signe négatif indique bien que l'énergie finale du système est plus faible que l'énergie initiale.

---

87 (a) La masse m écartée d'un angle de 15° possède de l'énergie potentielle : $E_p = m\ g\ h$ où $h = \ell - \ell \cos 15°$, avec $\ell = 1{,}20$ m. Une fois lâchée, la masse acquiert de l'énergie cinétique en perdant de l'énergie potentielle. L'énergie totale étant conservée, on peut calculer :

$$v = [2\ g\ h]^{1/2} = [2\ g\ (1{,}20 \text{ m})\ (1 - \cos 15°)]^{1/2} = 0{,}90 \text{ m s}^{-1}.$$

Elle entre en collision élastique avec la masse M. Par les équations de la conservation de la quantité de mouvement $m\ \mathbf{v} = m\ \mathbf{v}' + M\ \mathbf{V}'$ et de la conservation de l'énergie cinétique $m\ v^2 / 2 = m\ v'^2 / 2 + M\ V'^2 / 2$, on obtient deux équations à deux inconnues :

$$(0{,}90 \text{ m s}^{-1}) = -\ v' + (5/3)\ V' \text{ et } (0{,}90 \text{ m s}^{-1})^2 = -\ v'^2 + (5/3)\ V'^2.$$

De la résolution de ce système, on trouve $V' = 0{,}675 \text{ m s}^{-1}$ et $v' = 0{,}225 \text{ m s}^{-1}$. (b) L'angle θ_{max} demandé est la somme de l'angle maximum de m, soit θ_m et de l'angle maximum de M, soit θ_M. Lorsque, juste après la collision, la masse m repart vers la gauche à la vitesse v', elle possède de l'énergie cinétique qui va

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

se transformer, à la hauteur maximale atteinte, en énergie potentielle. La hauteur h_m atteinte vaut $\ell - \ell \cos \theta_m$ et se calcule par $h_m = v'^2 / 2\ g$. On en déduit la valeur de $\theta_m = 3{,}76\,°$. Le même raisonnement donne accès à h_M et à θ_M dont la valeur est trouvée égale à $\theta_M = 11{,}3\,°$. Il reste à calculer l'angle maximum dont les billes vont s'écarter : $\theta_{max} = (3{,}76\,°) + (11{,}3\,°) = 15{,}1\,°$. (c) Dans un pendule (en supposant des petits mouvements), le temps nécessaire à une demi-période d'oscillation est indépendant de l'amplitude. De ce fait, les 2 pendules de même longueur démarrent au temps $t = 0$ des oscillations qui vont les conduire à des amplitudes différentes mais ils reviendront ensemble à la position verticale au même moment. La durée de cette demi-oscillation est une demi-période qui vaut $t = \pi \sqrt{\ell / g} = 1{,}1$ s.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 8

Propriétés élastiques des matériaux

RAPPELS

Les forces et les moments de forces qui agissent sur des objets solides provoquent des déformations qui peuvent conduire à la rupture de ceux-ci. La déformation ε est la variation relative de dimension ou de forme. L'effort σ est la force par unité de surface qui produit cette déformation. Pour de faibles déformations, l'effort et la déformation sont proportionnels. Pour la compression ou la traction, le coefficient de proportionnalité est le module de Young E ($\varepsilon = \sigma / E$, $\varepsilon = \Delta \ell / \ell$ et $\sigma = F / A$, où A est la section droite perpendiculaire à la force appliquée) et pour un cisaillement, le coefficient de proportionnalité est le module de cisaillement G ($\varepsilon = \sigma / G$, ε est le rapport entre le déplacement δ du plan sur lequel on agit et l'épaisseur h de la pièce cisaillée, $\varepsilon = \delta / h$ et $\sigma = F / A$, où A est la section parallèle à la force appliquée).

Lorsqu'une poutre subit une flexion caractérisée par un rayon de courbure R, le moment des forces internes est donné par $\tau = E\ I_S / R$. Dans cette expression, I_S représente le moment d'inertie de la section droite de la poutre. Un grand moment d'inertie signifie une déformation peu importante de la poutre chargée.

Une colonne de rayon r "flambera" (s'effondrera sous l'effet de son propre poids) si sa hauteur est supérieure à une hauteur limite ℓ proportionnelle à $r^{2/3}$.

Le moment d'une force de torsion τ, qui s'exerce sur un cylindre uniforme de longueur ℓ produit une torsion mesurée par un angle α. Cet angle est lié à τ par la relation $\tau = G\ I_p\ \alpha\ / \ell$, où I_p est le moment d'inertie polaire du cylindre (pour un cylindre de rayon r, $I_p = \pi\ r^4 / 2$).

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

SOLUTION DES EXERCICES

8.1 CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES EFFORTS ET LES DÉFORMATIONS

1 L'effort σ est la force de traction ou de compression par unité de surface :

$$\sigma = (100\ \text{N}) / (0{,}1\ \text{m}^2) = 1000\ \text{N m}^{-2}.$$

---

2 $F = (2 \times 10^6\ \text{N m}^{-2})\ (0{,}05\ \text{m}^2) = 1 \times 10^5\ \text{N}.$

---

3 La déformation ε est la variation relative de longueur :

$$\varepsilon = (0{,}005\ \text{m}) / (0{,}4\ \text{m}) = 0{,}0125.$$

---

5 La variation de longueur est égale à :

$$\Delta\ell = \varepsilon\ \ell = (1{,}3 \times 10^{-4})\ (1{,}2\ \text{m}) = 1{,}56 \times 10^{-4}\ \text{m}.$$

---

6 On obtiendra le même allongement (ici, la même déformation : la longueur des deux barres est la même) avec le même effort $\sigma = F/A$. Si le rayon est doublé, on conservera un effort constant en multipliant la force par 4 : (4) (140 N) = 560 N.

---

9 La force de traction maximum correspond à l'effort maximum multiplié par la section du câble : $(1 \times 10^8\ \text{N m}^{-2})\ (\pi)\ (1{,}5 \times 10^{-2}\ \text{m})^2 = 70{,}7 \times 10^3\ \text{N}.$

8.2 LE MODULE DE YOUNG

10 (a) La force de traction nécessaire pour atteindre la limite linéaire vaut :

$$F_\ell = \sigma_\ell\ A = (0{,}6 \times 10^8\ \text{N m}^{-2})\ (\pi)\ (2 \times 10^{-3}\ \text{m})^2 = 754\ \text{N}.$$

(b) $\varepsilon = \sigma / E = (0{,}6 \times 10^8\ \text{N m}^{-2}) / (7 \times 10^{10}\ \text{N m}^{-2}) = 8{,}57 \times 10^{-4}$ et

$$\Delta\ \ell = \varepsilon\ \ell = (8{,}57 \times 10^{-4})\ (20\ \text{m}) = 0{,}0171\ \text{m}.$$

---

13 La force provoquant la fracture vaut : $(12 \times 10^7\ \text{N m}^{-2})\ (6{,}45 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) =$ 77400 N

(voir tableau 8.1).

---

14 La force de rupture vaut $(11{,}0 \times 10^8\ \text{N m}^{-2})\ (0{,}5\ \text{m}^2) = 5{,}5 \times 10^8\ \text{N}$. A ce moment, la déformation vaut :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$\varepsilon = \sigma / E = (1/2)\ (11{,}0 \times 10^8\ \text{N m}^{-2}) / (7 \times 10^{10}\ \text{N m}^{-2}) = 0{,}00786.$$

La variation d'épaisseur pour cette déformation vaut :

$$\Delta \ell = \varepsilon\, \ell = (0{,}00786)\ (0{,}005\ \text{m}) = 3{,}93 \times 10^{-5}\ \text{m}.$$

---

17 La constante d'élasticité d'un fémur humain est liée au module de Young par la relation :

$$k = E\, A / \ell = (0{,}9 \times 10^{10}\ \text{N m}^{-2})\ (1 \times 10^{-3}\ \text{m}^2) / (0{,}4\ \text{m})$$
$$= 2{,}25 \times 10^7\ \text{N m}^{-1}.$$

8.3 RÉSISTANCE À LA FLEXION

19 Le moment associé à la charge vaut $\tau = E\, I_s / R$. Ici, $E = 20 \times 10^{10}\ \text{N m}^{-2}$, $I_s = \pi\, r^4 / 4 = 7{,}85 \times 10^{-9}\ \text{m}^4$ et $R = 20$ m. On trouve $\tau = 78{,}5$ N m.

---

20 (a) La charge est parallèle à la largeur a :

$$I_1 = a^3\, b / 12 = (6 \times 10^{-2}\ \text{m})^3\ (1 \times 10^{-2}\ \text{m}) / 12 = 1{,}8 \times 10^{-7}\ \text{m}^4.$$

La charge est parallèle à l'épaisseur b :

$$I_2 = a\, b^3 / 12 = (6 \times 10^{-2}\ \text{m})\ (1 \times 10^{-2}\ \text{m})^3 / 12 = 5 \times 10^{-9}\ \text{m}^4.$$

(b) La charge et les dimensions de la planche restant constantes, le moment associé à la charge reste le même. Il s'ensuit que $I_1 / R_1 = I_2 / R_2$ et donc $R_2 / R_1 = I_2 / I_1 = (5 \times 10^{-9}\ \text{m}^4) / (1{,}8 \times 10^{-7}\ \text{m}^4) = 0{,}028$: la courbure est plus forte dans le cas des charges parallèles à l'épaisseur.

---

22 (a) Le moment d'inertie de la section droite vaut $I_s = \pi\ (a^4 - b^4) / 4$ (a est le rayon extérieur et b est le rayon intérieur). On trouve :

$$I_s = (\pi / 4)\ [(8 \times 10^{-2}\ \text{m})^4 - (7 \times 10^{-2}\ \text{m})^4] = 1{,}33 \times 10^{-5}\ \text{m}^4.$$

(b) Le moment de la force exercée par le vent autour du point d'arrimage au sol vaut $\tau = (1 \times 10^3\ \text{N})\ (10\ \text{m}) = 1 \times 10^4$ N m. Ce moment est compensé par un moment interne de même grandeur qui naît suite à la courbure de rayon :

$$R = E\, I_s / \tau = (20 \times 10^{10}\ \text{N m}^{-2})\ (1{,}33 \times 10^{-5}\ \text{m}^4) / (1 \times 10^4\ \text{N m}) = 266\ \text{m}.$$

8.4 RÉSISTANCE AU FLAMBAGE ÉLÉMENTS STRUCTURELS DANS LA NATURE

24 La relation entre la hauteur maximale ℓ d'une colonne et son rayon r est :

$$\ell = c\, r^{2/3}.$$

Ici, $c = \ell\, r^{-2/3} = (10\ \text{m})\ (0{,}1\ \text{m})^{-2/3} = 46{,}4\ \text{m}^{1/3}$. Le rayon d'une colonne quatre fois plus longue doit être au moins égal à :

$$r = (\ell / c)^{3/2} = [(40\ \text{m}) / (46{,}4\ \text{m}^{1/3})]^{3/2} = 0{,}8\ \text{m}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

27 $\ell = (34{,}9\ \text{m}^{1/3})\ (0{,}125\ \text{m})^{2/3} = 8{,}73\ \text{m}.$

---

29 La hauteur maximale permettant d'éviter le flambage est :

$$\ell = [(2)\ (1 \times 10^{10}\ \text{N m}^{-2}) / (5900\ \text{N m}^{-3})]^{1/3}\ (0{,}125\ \text{m})^{2/3} = 37{,}6\ \text{m},$$

très supérieure à $\ell = 8{,}73$ m obtenue avec la relation tirée de l'expérience (voir exercice 8-27).

8.5 CISAILLEMENT ET TORSION

31 (a) Ici, l'effort de cisaillement vaut :

$$\sigma = F / A = (100\ \text{N}) / (0{,}01\ \text{m})^2 = 1 \times 10^6\ \text{N m}^{-2}$$

et la déformation $\varepsilon = \sigma / G$ vaut :

$$\varepsilon = (1 \times 10^6\ \text{N m}^{-2}) / (8{,}4 \times 10^{10}\ \text{N m}^{-2}) = 1{,}19 \times 10^{-5}.$$

(b) Par définition, la déformation ε est le rapport δ / h du déplacement de la face supérieure par la hauteur de celle-ci. Le déplacement cherché est donc :

$$\delta = \varepsilon\, h = (1{,}19 \times 10^{-5})\ (0{,}01\ \text{m}) = 1{,}19 \times 10^{-7}\ \text{m}.$$

---

32 (a) L'effort de cisaillement sur l'axe de la pédale vaut :

$$\sigma = (75\ \text{kg})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2}) / [\pi\ (0{,}75 \times 10^{-2}\ \text{m})^2] = 4{,}16 \times 10^6\ \text{N m}^{-2}.$$

(b) Le rapport avec l'effort maximum vaut :

$$(4{,}16 \times 10^6\ \text{N m}^{-2}) / (1 \times 10^8\ \text{N m}^{-2}) = 0{,}0416.$$

---

35 (a) Lors d'un freinage, l'attache doit résister à une force de (0,20) (2000 kg) (9,8 m s^{-2}) = 3920 N. Ceci correspond à un effort de :

$$(3920\ \text{N}) / [\pi\ (1 \times 10^{-2}\ \text{m})^2] = 12{,}5 \times 10^6\ \text{N m}^{-2}$$

et (b) représente 0,125 fois l'effort de cisaillement permis par l'acier.

8.6 STRUCTURE ET FONCTION

37 La résistance étant limitée par une valeur fixe de l'effort maximum, la section droite est proportionnelle au poids.

---

39 La perte de chaleur est proportionnelle à la surface de l'animal, elle-même proportionnelle à $r\,\ell$, donc à $(m^{3/8})\ (m^{1/4}) = m^{5/8}$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

SOLUTION DES PROBLÈMES

41 Si la masse d'eau est M, le poids à supporter vaut $M\ g$ et chaque tube d'acier subit un effort égal à $M\ g\ /\ (3\ A)$, où A est la section droite d'un tube :

$$A = \pi\ [(17 \times 10^{-2}\ \text{m})^2 - (15 \times 10^{-2}\ \text{m})^2] = 0{,}0202\ \text{m}^2.$$

Un effort $\sigma = (1/3) \times 10^8\ \text{N m}^{-2}$ sera atteint avec une masse d'eau telle que $M\ g\ /\ (3\ A) = \sigma$, ou

$$M = (3)\ [(1/3) \times 10^8\ \text{N m}^{-2}]\ (0{,}0202\ \text{m}^2)\ /\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 0{,}205 \times 10^6\ \text{kg},$$

ce qui représente un volume de 205 m^3. (b) Si les tubes subissent un effort global de $1 \times 10^8\ \text{N m}^{-2}$, leur déformation atteint la valeur :

$$\varepsilon = \sigma\ /\ E = (1 \times 10^8\ \text{N m}^{-2})\ /\ (20 \times 10^{10}\ \text{N m}^{-2}) = 5{,}00 \times 10^{-4}$$

et ils raccourcissent de $(5{,}00 \times 10^{-4})\ (10\ \text{m}) = 0{,}005\ \text{m}$.

---

42 Une poutre en H présente un moment d'inertie $I_H = b^3\ t\ /\ 6$. Une poutre en I, pour laquelle $a = b$ présente un moment d'inertie égal à :

$$I_I = b^3\ t\ /\ 2 + b^3\ t\ /\ 12 = (7/2)\ I_H.$$

Le rapport cherché vaut $I_I\ /\ I_H = 7/2 = 3{,}5$: la poutre résiste mieux à la flexion verticale dans la position I.

---

43 La force de traction, au bas de la trajectoire, est la somme du poids $m\ g$ de la cabine et de la force centrifuge $m\ v^2\ /\ r$:

$$F = (700\ \text{kg})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2}) + (700\ \text{kg})\ (12\ \text{m s}^{-1})^2\ /\ (8\ \text{m}) = 19460\ \text{N}.$$

Pour l'acier, le point de rupture est atteint, en traction, pour un effort de $5 \times 10^8\ \text{N m}^{-2}$. L'effort maximum admis ici est donc :

$$(0{,}01)\ (5 \times 10^8\ \text{N m}^{-2}) = 5 \times 10^6\ \text{N m}^{-2}.$$

(a) La section correspondante est :

$$A = (19460\ \text{N})\ /\ (5 \times 10^6\ \text{N m}^{-2}) = 3{,}89 \times 10^{-3}\ \text{m}^2.$$

(b) La déformation de la barre pour cet effort vaut :

$$\varepsilon = \sigma\ /\ E = (5 \times 10^6\ \text{N m}^{-2})\ /\ (20 \times 10^{10}\ \text{N m}^{-2}) = 2{,}5 \times 10^5$$

et son allongement est $\Delta\ \ell = \varepsilon\ \ell = (2{,}5 \times 10^{-5})\ (8\ \text{m}) = 2 \times 10^{-4}\ \text{m}$.

---

45 La relation qui lie le rayon r d'une colonne prête à s'effondrer sous son propre poids à sa hauteur ℓ est $r = (\ell\ /\ c)^{3/2}$. La constante c dépend seulement de la nature du matériau avec lequel la colonne est construite. Si la hauteur d'une colonne prête à flamber est doublée et qu'elle reste prête à flamber, c'est que son rayon a été multiplié par $2^{3/2}$ et que, donc, la surface de sa base est multipliée par 8. Son volume, comme son poids, est alors multiplié par 16.

---

48 Supposons que la barre soit supportée par ses deux extrémités. Les forces sur la

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

moitié gauche de la barre sont (1) son poids $W / 2$ ($W = 100$ N) et (2) la réaction $W / 2$ du support. Par rapport au centre de la barre, ces deux forces donnent un moment égal à $\tau = (2{,}5\text{ m})\ (50\text{ N}) - (1{,}25\text{ m})\ (50\text{ N}) = 62{,}5\text{ N m}$. Ce moment est exactement compensé par le moment de flexion appliqué par la moitié droite de la poutre, qui lui est égal, en grandeur.

---

49 Le moment d'inertie de la barre cylindrique pleine, de rayon r, vaut $I_1 = \pi\, r^4 / 4$. Celui de la barre creuse vaut $I_2 = (\pi / 4)\ [(2\, r)^4 - (3\, r / 2)^4]$, ou $I_2 = 10{,}9\ \pi\, r^4 / 4$. Si les efforts restent les mêmes, et que les longueurs des barres sont identiques, les rapports I_s / R des moments d'inertie et des rayons de courbure sont les mêmes : $I_1 / R_1 = I_2 / R_2$. On en déduit que $R_2 / R_1 = I_2 / I_1 = 10{,}9$.

---

50 Le moment d'inertie pour un cylindre plein, de rayon a vaut $\pi\, a^4 / 4$. Pour un cylindre creux de rayon intérieur a et de rayon extérieur x, le moment d'inertie vaut $(\pi / 4)\ (x^4 - a^4)$. Pour que ces moments soient égaux, il faut que :

$$x^4 - a^4 = a^4, \text{ ou encore } x = 1{,}189\ a.$$

Le rapport des poids de ces poutres est $W_T / W_B = (\pi\, x^2 - \pi\, a^2) / (\pi\, a^2) = 0{,}414$.

---

52 La puissance délivrée est le produit de la force résistante par la vitesse du périmètre de l'axe $P = F\ v = \tau\ \omega$. Ceci permet de déterminer le moment des forces résistantes $\tau = P / \omega = (2000\text{ W}) / [(1800)\ (2\ \pi / 60)\ \text{s}^{-1}] = 10{,}61\text{ N m}$. Ce moment entraîne une torsion décrite par un angle α, que l'on peut déterminer à partir de la relation $\tau = G\ I_p\ \alpha / \ell$. $G = 8{,}4 \times 10^{10}\text{ N m}^{-2}$ est le module de cisaillement de l'acier, $I_p = \pi\, r^4 / 2 = \pi\ (1 \times 10^{-2}\text{ m})^4 / 2 = 1{,}57 \times 10^{-8}\text{ m}^4$ est le moment d'inertie polaire de la section du cylindre et $\ell = 4$ m la longueur de l'axe. On trouve $\alpha = \tau\ \ell / (G\ I_p) = 0{,}0322$ rad.

---

54 (a) Si l'angle de fracture reste constant, le moment causant la fracture est proportionnel à I_p / ℓ, c'est-à-dire à r^4 / ℓ. La loi d'échelle indique ainsi que le moment de torsion τ est proportionnel à $(\ell^{3/2})^4 / \ell = \ell^5$. Le moment nécessaire augmente donc avec l'âge et les jeunes enfants sont plus exposés. (b) Le moment τ, proportionnel à ℓ^5, est aussi proportionnel à $m^{5/4}$.

---

56 La déformation ε de la surface allongée de la poutre peut se calculer comme le rapport $\Delta\ \ell / \ell$. Si θ est l'angle sous lequel on voit la colonne à partir du centre de courbure, la longueur de la poutre (mesurée le long de la ligne neutre) vaut $\ell = \theta\ R$ (R est le rayon de courbure). La longueur de la partie allongée de la poutre est $\ell\ + \Delta\ \ell = \theta\ (R\ +\ r)$, de sorte que $\Delta\ \ell = \theta\ r = (\ell / R)\ r$. Il s'ensuit que $\varepsilon = r / R$. Comme par ailleurs l'effort est lié à la déformation par la relation

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$\varepsilon = \sigma / E$, on trouve immédiatement que $\sigma = E\,(r / R)$. Le rayon de courbure R sera minimal lorsque $\sigma_t = E\,(r / R)$, où σ_t est l'effort maximum en traction.

57 $R = E\,r / \sigma_t = (1 \times 10^{10}\ \text{N m}^{-2})\ (0{,}25\ \text{m}) / (1 \times 10^{8}\ \text{N m}^{-2}) = 25\ \text{m}.$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 9

Le mouvement vibratoire

RAPPELS

Les équations suivantes décrivent le mouvement de l'ombre d'un objet qui tourne à vitesse angulaire constante dans le plan qui contient la source de lumière. Si f est la fréquence propre d'oscillation du système et R la distance de l'objet à son axe de rotation, on détermine le déplacement de l'ombre par $x = R \cos(2\ \pi\ f\ t)$, sa vitesse par $v = -(2\ \pi f)\ R\ \sin(2\ \pi\ f\ t)$ et son accélération par $a = -(2\ \pi f)^2\ R\ \cos(2\ \pi\ f\ t)$. L'équation qui définit le mouvement harmonique simple indique que l'accélération est constamment opposée au déplacement et lui est proportionnelle : $a = -(2\ \pi f)^2\ x$. Rappelons que la période $T = 1\ /\ f$ représente le temps nécessaire pour effectuer un cycle complet.

Si l'on considère une masse m attachée au bout d'un ressort, la loi de Newton $F = m\ a$ ainsi que la définition de la force de rappel $F = -k\ x$ d'un ressort permettent de définir l'accélération par $a = -k\ x\ /\ m$. La comparaison avec la relation qui définit le mouvement harmonique simple permet de conclure que la fréquence propre d'un mouvement harmonique vaut $f = 1\ /\ T = (k\ /\ m)^{1/2}\ /\ (2\ \pi)$.

Le pendule composé est un corps solide, libre d'osciller dans un plan vertical autour d'un axe. La fréquence propre du mouvement est donnée par :

$$f = (m\ g\ d\ /\ I)^{1/2}\ /\ (2\ \pi)$$

où m et I sont respectivement la masse et le moment d'inertie du pendule et d la distance entre l'axe de rotation et le centre de gravité. Le pendule simple est une idéalisation qui constitue parfois une bonne approximation d'un système réel. Dans ce cas, on suppose que la masse m est ponctuelle et qu'elle est suspendue à une corde de longueur l inextensible et de masse négligeable. La fréquence propre du mouvement se calcule alors par $f = (g\ /\ l)^{1/2}\ /\ (2\ \pi)$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Si, lors du mouvement du pendule, on néglige les frottements et la résistance de l'air, l'énergie mécanique totale est conservée entre le point le plus haut de la trajectoire où l'énergie est purement potentielle et le point le plus bas où elle est purement cinétique. Dans le cas de l'oscillation d'une masse attachée à un ressort et pour une valeur particulière x de l'élongation, l'énergie potentielle vaut $U = k\,x^2 / 2$. En présence de forces dissipatives, l'énergie mécanique totale n'est pas conservée : le mouvement est amorti.

Pour discuter des effets des vibrations sur les personnes, on utilise l'accélération maximale plutôt que l'amplitude. L'accélération est maximale lorsque le déplacement x vaut $\pm R$. On obtient alors $a_{max} = (2\,\pi\,f)^2\,R$.

SOLUTION DES EXERCICES

9.1 LE MOUVEMENT HARMONIQUE SIMPLE : CAS DU SYSTÈME MASSE-RESSORT

2 (a) On détermine le temps nécessaire pour atteindre une élongation donnée par $t = [1 / (2\,\pi\,f)]$ arccos (x/R). Pour atteindre $x = 0{,}1$ m, il faut un temps $t = [1 / (2\pi\ (8\ \text{s}^{-1})]$ arccos $[(0{,}1\ \text{m})/(0{,}2\ \text{m})] = 0{,}02$ s. Des calculs identiques donnent successivement, pour les valeurs de $x = 0$ m, $-0{,}1$ m et $-0{,}2$ m, des temps égaux à 0,03125 s, 0,042 s et 0,0625 s. (b) Les vitesses correspondantes sont données par $v = -2\,\pi\,f\,R \sin(2\,\pi\,f\,t)$. Pour chaque temps t, on a successivement $v = -8{,}71\ \text{m s}^{-1}$, $v = -10{,}05\ \text{m s}^{-1}$, $v = -8{,}71\ \text{m s}^{-1}$ et $v = 0\ \text{m s}^{-1}$.

---

3 On peut calculer le temps nécessaire pour atteindre une vitesse v par $t = (1 / 2\,\pi\,f)$ arcsin $[-v / (2\,\pi\,f\,R)]$. La position de l'objet se calcule alors par $x = R \cos(2\,\pi\,f\,t) = 0{,}354$ m.

---

4 La vitesse maximale est égale à $2\,\pi\,f\,R$. De cette expression, on déduit :

$$R = v / (2\,\pi\,f) = (3\ \text{m s}^{-1}) / [(2\,\pi)\,(10\ \text{s}^{-1})] = 0{,}048\ \text{m}.$$

9.2 LE MOUVEMENT OSCILLATOIRE D'UNE MASSE ATTACHÉE À UN RESSORT

6 La fréquence du mouvement harmonique simple se calcule par :

$$f = (1 / 2\,\pi)\,(k / m)^{1/2}.$$

Si l'on effectue le rapport des deux fréquences, on trouve :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$f_m / f_M = 1 / 3 = (M / m)^{1/2}.$$

Le rapport demandé vaut donc $M / m = 1 / 9$.

7 A tout moment, l'accélération de la masse se calcule par $a = - k x / m$. Le rapport k / m se déduit de l'expression de la fréquence propre $k / m = (2 \pi f)^2$. On trouve alors $a = - (2 \pi f)^2 x = - [2 \pi (5 \text{ s}^{-1})]^2 (0{,}15 \text{ m}) = - 148 \text{ m s}^{-2}$.

8 (a) La force qui s'exerce sur le ressort correspond au poids de l'objet suspendu ; ce poids est responsable de l'allongement du ressort. On peut donc écrire $m g = k x$; on en déduit la valeur de :

$$k = m g / x = (0{,}3 \text{ kg}) (9{,}8 \text{ m s}^{-2}) / (0{,}05 \text{ m}) = 58{,}8 \text{ N m}^{-1}.$$

10 La durée d'une oscillation correspond à la période. La période T étant l'inverse de la fréquence f, on peut écrire, par définition de la fréquence propre,

$$k = (2 \pi / T)^2 m = [2 \pi / (4 \text{ s})]^2 (3 \text{ kg}) = 7{,}4 \text{ N m}^{-1}.$$

13 Lorsque le passager seul prend place, on peut calculer la constante de raideur des ressorts : $k = m g / x = (80 \text{ kg}) (9{,}8 \text{ m s}^{-2}) / (0{,}012 \text{ m}) = 65{,}3 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}$. La fréquence propre d'oscillation vaut alors :

$$f = (1 / 2 \pi) (k / m)^{1/2} = (1 / 2 \pi) [(65{,}3 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}) / (900 \text{ kg})]^{1/2} = 1{,}36 \text{ s}^{-1}.$$

14 L'expression de la fréquence propre permet de déterminer la constante de raideur du ressort : $k = (2 \pi f)^2 m = [2 \pi (2 \text{ s}^{-1})]^2 (10 \text{ kg}) = 1{,}6 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}$. Si on enlève la masse, ceci correspond à exercer une force $m g$ vers le haut qui annule le poids de la masse attachée. La variation de longueur vaut alors :

$$x = m g / k = (10 \text{ kg}) (9{,}8 \text{ m s}^{-2}) / (1{,}6 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}) = 6{,}2 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

9.3 LE PENDULE COMPOSÉ

15 Si l'on considère le système comme un pendule simple, à partir de l'expression de la fréquence d'oscillation f, $T = 1 / f = 2 \pi (\ell / g)^{1/2}$, on peut déduire :

$$\ell = [T / (2 \pi)]^2 g = [(1 \text{ s}) / (2 \pi)]^2 (9{,}8 \text{ m s}^{-2}) = 0{,}248 \text{ m}.$$

16 En comparant l'expression de la fréquence d'oscillation sur la Terre et sur la planète, on voit que, pour que la période soit réduite de moitié, il faut que l'accélération de la pesanteur soit quatre fois plus grande. En effet, on peut écrire $T_T / T_P = 2 = (g_P / g_T)^{1/2}$. On en déduit immédiatement que :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$g_P = 4\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = 39{,}2\ \text{m s}^{-2}.$$

19 La tige constitue un pendule composé dont le moment d'inertie I vaut (tableau 5.3) $I = m\,\ell^2 / 3$ et dont le centre de gravité se trouve en $d = \ell / 2$. Par l'expression de la fréquence d'oscillation d'un pendule composé, on trouve :

$$\ell = 3\ g / [2\ (2\ \pi / T)^2] = 3\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2}) / [2\ (2\ \pi / (2\ \text{s}))^2] = 1{,}49\ \text{m}.$$

20 Le pourcentage d'erreur se mesure par l'erreur relative commise suite à l'approximation. Cette erreur est le rapport de l'erreur absolue commise et de la grandeur exacte, soit $100\ (\sin\theta - \theta) / \sin\theta$. Cette erreur s'exprime en pourcents et se calcule lorsque l'unité d'angle est le radian. La conversion des degrés en radians se fait suite à la relation $(2\ \pi)$ rad = $(360)^\circ$ qui donne que $(1)^\circ = (\pi / 180)$ rad. Il est important dans cet exercice de garder le maximum de chiffres dans les différentes expressions. On trouve (a) :

$$100\ [\sin(10\ \pi / 180) - 10\ \pi / 180] / \sin(10\ \pi / 180) = 0{,}51\ \%.$$

De façon identique, on calcule (b) pour $\theta = 20^\circ = (\pi / 9)$ rad, l'erreur vaut 2,06 %, (c) pour $\theta = 30^\circ = (\pi / 6)$ rad, elle vaut 4,72 % tandis qu'en (d), $\theta = 40^\circ = (2\ \pi / 9)$ rad, elle est égale à 8,61 %. L'approximation $\sin\theta \sim \theta$ n'est valable que pour des angles θ très inférieurs à 1 rad.

22 Le rapport des deux expressions de la fréquence d'oscillation du pendule simple à l'équateur et au Groenland permet de déterminer la relation suivante :

$$f_G / f_E = T_E / T_G = (g_G / g_E)^{1/2}.$$

Comme l'accélération gravitationnelle g_G vaut 1,44 fois celle à l'équateur, on trouve $T_G = 0{,}833$ s.

23 La fréquence du pendule composé se calcule par $f = (m\ g\ d / I)^{1/2} / (2\ \pi)$ avec $I = m\,\ell^2 / 3$. On trouve, après substitution,

$$f = (3\ g\ d)^{1/2} / (2\ \pi\ \ell) = [3\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{,}1\ \text{m})]^{1/2} / (2\ \pi\ (0{,}15\ \text{m})) = 1{,}82\ \text{s}^{-1}.$$

9.4 L'ÉNERGIE DANS LE MOUVEMENT HARMONIQUE SIMPLE

25 (a) La force responsable de l'élongation du ressort correspond au poids de l'objet attaché. On écrit donc $k\,x = m\,g$; la constante de raideur s'obtient alors en écrivant $k = m\ g / x = (0{,}05\ \text{kg})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2}) / (0{,}1\ \text{m}) = 4{,}9\ \text{N m}^{-1}$. (b) La fréquence propre d'oscillation vaut donc :

$$f = (k / m)^{1/2} / (2\ \pi) = [(4{,}9\ \text{N m}^{-1}) / (0{,}05\ \text{kg})] / (2\ \pi) = 1{,}58\ \text{s}^{-1}.$$

(c) La période est l'inverse de la fréquence ; elle vaut :

$$T = 1 / (1{,}58\ \text{s}^{-1}) = 0{,}635\ \text{s}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(d) Au départ, le déplacement par rapport à la position d'équilibre étant x, l'énergie potentielle de l'objet vaut $k\,x^2 / 2$. Cette énergie disparaît au point d'équilibre, où toute l'énergie se retrouve associée à la vitesse. Lorsqu'on atteint l'autre point d'élongation maximum x, on retrouve l'énergie potentielle. L'énergie associée à ces oscillations se calcule donc par :

$$E = k\,x^2 / 2 = (4{,}9\ \text{N m}^{-1})\ (0{,}05\ \text{m})^2 / 2 = 6{,}125 \times 10^{-3}\ \text{J}.$$

27 L'énergie totale de l'oscillateur se conserve tout en passant du type potentiel en $x = R$ au type cinétique en $x = 0$. Pour que les énergies cinétique et potentielle soient identiques, il faut donc que $E_p = E_c = E_{totale} / 2$, soit $k\,x^2 / 2 = [(k\,R^2) / 2] / 2$. On en déduit donc la valeur de $x = (R^2 / 2)^{1/2} = 0{,}0707$ m.

28 L'énergie totale de l'oscillateur vaut $k\ R^2 / 2$ à son élongation maximale. En $x = R / 2$, l'énergie totale se calcule par $E_c + k\ (R / 2)^2 / 2$; on en déduit, par conservation de cette énergie totale, $k\ R^2 / 2 = E_c + k\ R^2 / 8$, que l'énergie cinétique vaut $E_c = (3/4)\ k\ R^2 / 2$, soit 75 % de l'énergie totale.

9.5 OSCILLATIONS AMORTIES

32 (a) La fréquence d'oscillation se calcule par :

$$f = (k / m)^{1/2} / (2\,\pi) = [(3\ \text{N m}^{-1}) / (1 \times 10^{-4}\ \text{kg})]^{1/2} / (2\,\pi) = 27{,}6\ \text{s}^{-1}.$$

(b) Le mouvement est amorti en $t = 2\,T = 2 / f = 2 / (27{,}6\ \text{s}^{-1}) = 7{,}25 \times 10^{-2}$ s.

9.6 LES EFFETS VIBRATOIRES SUR LES PERSONNES

34 La comparaison des fréquences propres du mouvement harmonique dans les deux situations permet d'écrire $f_1 / f_2 = (m_2 / m_1)^{1/2}$. On trouve alors :

$$f_2 = f_1 / (m_2 / m_1)^{1/2} = (7\ \text{s}^{-1}) / [(25\ \text{kg}) / (70\ \text{kg})]^{1/2} = 11{,}7\ \text{s}^{-1}.$$

35 (a) La force responsable de la compression du ressort est la masse de la personne : $m\,g = k\,x$. La constante de ressort se calcule donc par :

$$k = m\,g / x = (50\ \text{kg})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2}) / (5 \times 10^{-3}\ \text{m}) = 98 \times 10^3\ \text{N m}^{-1}.$$

(b) La fréquence propre du mouvement se calcule par :

$$f = (k / m)^{1/2} / (2\,\pi) = [(98 \times 10^3\ \text{N m}^{-1}) / (50\ \text{kg})]^{1/2} / (2\,\pi) = 7{,}05\ \text{s}^{-1}.$$

(c) Pour un déplacement maximal R de 5×10^{-3} m, on trouve que l'accélération maximale vaut $a_{max} = [2\,\pi\ (7{,}05\ \text{s}^{-1})]^2\ (5 \times 10^{-3}\ \text{m}) = g$(logique...), ce qui n'a rien d'alarmant (Fig 9.18).

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

SOLUTION DES PROBLÈMES

37 (a) Il suffit de remplacer dans les expressions de la position, de la vitesse et de l'accélération, la variable t par sa valeur. On trouve :

$$x = x_0,\ v = 0 \text{ et } a = -(2\,\pi\,f)^2\,x_0.$$

(b) La même opération permet de calculer $x = -x_0$, $v = 0$ et $a = (2\,\pi\,f)^2\,x_0$. (c) La position a sa grandeur maximale x_0 en $t = 0$, s'annule en $t = 1\,/\,(4\,f)$ et atteint une valeur minimale $-x_0$ en $t = 1\,/\,(2\,f)$. La vitesse s'annule en $t = 0$ et en $t = 1\,/\,(2\,f)$ alors que sa valeur est minimale, $v = -\,2\,\pi\,f\,x_0$ en $t = 1\,/\,(4\,f)$. L'accélération a une valeur négative, minimale, $a = -\,(2\,\pi\,f)^2\,x_0$ en $t = 0$, elle s'annule en $t = 1\,/\,(4\,f)$ et atteint une grandeur maximale positive $a = (2\,\pi\,f)^2\,x_0$ en $t = 1\,/\,(2\,f)$.

---

40 (a) L'expression de la vitesse permet de déterminer le temps nécessaire pour atteindre la vitesse maximale, $v_{max} = -\,v_{max} \sin(2\,\pi\,f\,t)$, soit $t = -\,1\,/\,(4\,f)$. A ce moment, la position vaut $x = R \cos(2\,\pi\,f\,(-\,1\,/\,(4\,f))) = 0$ m. (b) Pour atteindre cette vitesse $v = v_{max}\,/\,2$, il faut un temps donné par $t = -\,1\,/\,(12\,f)$. La position correspond alors à $x = R \cos(2\,\pi\,f\,(-\,1\,/\,(12\,f))) = 0{,}3464$ m.

---

43 (a) Par l'expression de la fréquence propre et sachant que la période est l'inverse de la fréquence, on calcule $k = m\,(2\,\pi\,/\,T)^2 = (2\text{ kg})\,[2\,\pi\,/\,(2\text{ s})]^2 = 19{,}7\text{ N m}^{-1}$. (b) La force responsable de l'allongement correspond au poids de l'objet de 2 kg. On trouve donc l'allongement du ressort par :

$$x = m\,g\,/\,k = (2\text{ kg})\,(9{,}8\text{ m s}^{-2})\,/\,(19{,}7\text{ N m}^{-1}) = 0{,}995\text{ m}.$$

---

47 Lorsqu'il n'y a pas de dissipation d'énergie, l'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique au point le plus bas de la trajectoire. On trouve donc que $v = (2\,g\,h)^{1/2}$. Pour trouver la hauteur h, il faut considérer le pendule dans sa position verticale et exprimer sa longueur ℓ par $\ell = h + (\ell - h)$ où $(\ell - h)$ est alors donné par $\ell \cos 20\,°$. On calcule donc :

$$v = (2\,(9{,}8\text{ m s}^{-2})\,[(30\text{ m}) - (30\text{ m})\cos 20\,°])^{1/2} = 5{,}95\text{ m s}^{-1}.$$

---

52 L'énergie potentielle du pendule vaut $m\,g\,h$. h se calcule par $\ell - (\ell - h)$ où $(\ell - h)$ est alors donné par $\ell \cos\theta$. L'énergie potentielle s'exprime donc par $m\,g\,\ell\,(1 - \cos\theta)$. Lorsque l'angle θ est proche de zéro, on utilise le théorème de MacLaurin qui permet d'exprimer $\cos\theta$ sous la forme $\cos\theta = 1 - \theta^2\,/\,2$. On retrouve alors l'expression de $U = m\,g\,\ell\,\theta^2\,/\,2$.

---

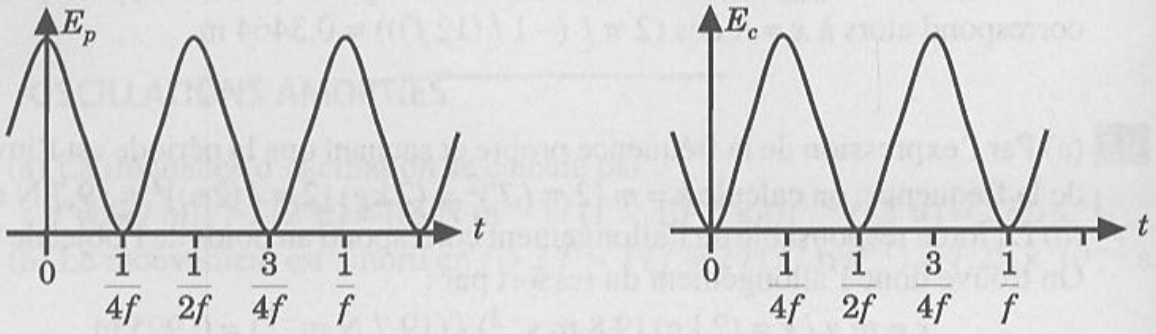
53 L'énergie potentielle en $\theta = \theta_0$ se transforme en énergie cinétique $m\,v^2\,/\,2$ au

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

point le plus bas de la trajectoire. En coordonnées angulaires, on peut écrire $m\,g\,\ell\,\theta_0^2 / 2 = m\,\omega^2\,\ell^2 / 2$. On trouve donc l'expression de la vitesse angulaire $\omega = \theta_0\,(g / \ell)^{1/2}$.

---

55 Dans un mouvement harmonique simple, l'énergie potentielle pour une élongation quelconque peut se calculer par $E_p = k\,x^2 / 2 = (k / 2)\,[x_0 \cos(2\,\pi\,f\,t)]^2$. L'énergie potentielle s'annule lorsque la fonction cosinus s'annule soit lorsque $\cos(2\,\pi\,f\,t) = 0$. Ceci se produit si l'argument de la fonction est un multiple impair de $\pi / 2$, soit quand $t = (2\,n + 1) / (4\,f)$ où $n = 0, 1, 2, \ldots$ La valeur de l'énergie potentielle est maximale lorsque la fonction cosinus atteint sa valeur maximale, soit $\pm$ 1. C'est le cas lorsque l'argument est un multiple de π soit quand $t = n / (2\,f)$ où $n = 0, 1, 2, \ldots$ La même analyse conduit, pour l'énergie cinétique, $E_c = m\,v^2 / 2 = (m / 2)\,[(2\,\pi f\,x_0)^2 \sin^2(2\,\pi f\,t)]$, a une valeur maximale quand $\sin(2\,\pi f\,t) = \pm 1$, soit quand $t = (2\,n + 1) / (4\,f)$ et une valeur minimale nulle lorsque $\sin(2\,\pi f\,t) = 0$, soit quand $t = n / (2f)$. On remarque encore, dans cette analyse, que l'énergie cinétique est maximale lorsque l'énergie potentielle est minimale (et vice versa).



---

57 Le déplacement maximum du corps correspond à :

$$A = a_{max} / (2\,\pi f)^2 = 4\,(9{,}8\ \text{m s}^{-2}) / [2\,\pi\,(4\ \text{s}^{-1})]^2 = 0{,}0621\ \text{m}.$$

---

58 (a) La constante de ressort est proportionnelle à l'aire S de la section droite et inversement proportionnelle à la longueur ℓ du ressort. Ceci se traduit par $k \propto S / \ell$. L'aire d'une section droite circulaire est proportionnelle au carré du rayon : $S \propto r^2$. Le facteur d'échelle introduit au paragraphe 8.6 nous donne $\ell \propto r^{2/3}$. En résumant ces deux expressions, on déduit $k \propto r^2 / r^{2/3}$ soit $k \propto r^{4/3}$. On a vu aussi (§ 8.7) que $r \propto m^{3/8}$, ce qui permet d'écrire $k \propto (m^{3/8})^{4/3}$ soit $k \propto m^{1/2}$. (b) La fréquence propre se définit par $f = (k / m)^{1/2} / (2\,\pi)$. En utilisant le résultat du point (a), on peut écrire $f \propto (m^{1/2} / m)^{1/2}$ soit $f \propto m^{-1/4}$.

---

59 (a) Le rapport des deux équations proportionnelles permet d'écrire :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$f_1 / f_2 = (m_1 / m_2)^{-1/4}.$$

On calcule alors :

$f_2 = f_1 / (m_1 / m_2)^{-1/4} = (3\ \text{s}^{-1}) / [(60\ \text{kg}) / (20 \times 10^{-3}\ \text{kg})]^{-1/4} = 22{,}2\ \text{s}^{-1}$.

(b) Le résultat théorique est en bon accord avec le résultat expérimental.

---

61 La collision entre la balle et le bloc est inélastique et soumise à la conservation de la quantité de mouvement $m\ v = (m + M)\ V$. Celle-ci permet de déterminer la vitesse V du bloc contenant la balle, juste après l'impact. Le bloc part donc au moment de l'impact avec une énergie cinétique connue, $(1/2)(m + M)\ V$. Au moment où le bloc s'arrête suite à la compression maximale des ressorts (le premier de x_1 et le second, de x_2), cette énergie s'est transformée en énergie potentielle. A ce moment donc, $(1/2)(m + M)\ V = (1/2)\ k_1\ x_1^2 + (1/2)\ k_2\ x_2^2$. Par ailleur, au point d'accrochage, la force est la même sur les deux ressorts, de sorte que $k_1\ x_1 = k_2\ x_2$. En rassemblant ces informations, on trouve que le déplacement du bloc vaut $x_1 + x_2 = \sqrt{(k_1 + k_2) / (k_1\ k_2)}\ (m\ v) / \sqrt{m + M}$. Avec les données du problème, on trouve un déplacement de (a) 23 cm. (b) La force au point de rebroussement est la somme des deux forces de rappel $k_1\ x_1 + k_2\ x_2$ et l'accélération sur la masse $m + M$ vaut 34,1 m s^{-2}.

---

63 Si on note θ l'angle entre la direction de tir et l'horizontale, et v_0 la vitesse initiale, la trajectoire est déterminée par les équations du mouvement $x = (v_0 \cos \theta)\ t$ et $y = (v_0 \sin \theta)\ t - (1/2)\ g\ t^2$. A l'instant où la flèchette retombe à l'altitude nulle $y = 0$, elle aura progressé horizontalement de $x = (v_0^2 / g) \sin (2\ \theta)$. La portée maximale est donc atteinte quand le sinus passe par un maximum, soit lorsque $\theta = 45°$. Si le ressort du pistolet est comprimé de $x = 4$ cm, l'énergie potentielle emmagasinée est $U = (1/2)\ k\ x^2 = 4$ J. Cette énergie sera transformée en énergie cinétique lorsque la flèchette de masse $m = 50$ g sortira du pistolet. La vitesse initiale de la flèchette est donc telle que $(1/2)\ m\ v_0^2 = 4$ J, soit $v_0 = 12{,}65$ m s^{-1}. Avec cette vitesse initiale, on obtient une portée maximale de 16,3 m.

---

64 Initialement, le pendule de masse $m = 500$ g dispose d'une énergie potentielle $U = m\ g\ L$. Une fois le pendule lâché, cette énergie se transforme en énergie cinétique et, au moment de la collision, celle-ci vaut $(1/2)\ m\ v^2 = m\ g\ L$. On peut ainsi prévoir la vitesse à l'impact, $v = \sqrt{2\ g\ L} = 4{,}43$ m s^{-1}. La collision entre les masses m et M étant élastique, on conserve l'énergie cinétique et la quantité de mouvement, et la vitesse du pendule après la collision peut être déterminée : $v' / v = (m - M) / (m + M)$. On trouve $v' = 2{,}95$ m s^{-1}. L'énergie cinétique correspondante se transforme ensuite en énergie potentielle $m\ g\ h = (1/2)\ m\ v'^2$ qui permet d'atteindre la hauteur $h = 44$ cm.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

66 Si le ressort subit une compression s, il emmagasine une énergie $U = (1/2)\, k\, s^2$ qu'il va transférer au projectile sous forme d'énergie cinétique $(1/2)\, m\, v^2$. Celui-ci prend alors la vitesse $v = \sqrt{k/m}\, s$ et, avec cette vitesse initiale horizontale, les lois du mouvement du projectile sont, horizontalement, $x = v\, t$ et, verticalement, $y = \ell - (1/2)\, g\, t^2$, si ℓ est la hauteur de la table. Le projectile atteint alors le sol à une distance $x = v\, \sqrt{2\, \ell\, /\, g}$ du bord de la table. Ainsi la portée du tir est proportionnelle à la compression du ressort : $x = s\, \sqrt{2\, k\, \ell\, /\, (m\, g)}$. Nous ne connaissons pas le rapport de proportionnalité entre x et s, parce que la constante de raideur du ressort k et la hauteur de la table ℓ nous sont inconnues, mais l'essai d'Arthur nous permet de l'évaluer : avec une compression $s = 1{,}1 \times 10^{-2}$ m, la portée est $x = 2{,}2$ m $- 0{,}27$ m $= 1{,}93$ m. Donc, $x = 175\, s$. (a) Marie doit exercer une compression $s = (2{,}2$ m$) / 175 = 1{,}3$ cm pour atteindre la boîte. (b) Si Marie comprime le ressort de $s = 1{,}1$ cm, elle doit ajouter 27 cm aux 1,93 m atteints par Arthur, soit 14 % de la distance et donc augmenter de 14 % le rapport de proportionnalité entre la distance atteinte et la compression du ressort. Comme celui-ci est lui-même proportionnel à la racine carrée de la hauteur de la table, il faut multiplier la hauteur de la table par un facteur c tel que $\sqrt{\ell\, c} = \sqrt{\ell}\, (1, 14)$, soit $c = 1{,}14^2 = 1{,}30$ pour atteindre l'objectif. Ceci veut dire une augmentation de la hauteur de la table de 30 %.

---

67 La période d'oscillation d'un pendule est $T = 2\, \pi\, \sqrt{\ell/g}$. Lorsqu'il se trouve à droite de l'obstacle, sa longueur est ℓ et, une fois lâché, il oscille vers la verticale pendant un temps $t_1 = T\, /\, 4$. La deuxième phase le fait remonter avec une longueur $\ell\, /\, 4$ sous l'obstacle, en un temps $t_2 = 2\, \pi\, \sqrt{\ell/(4g)}\, /\, 4 = T\, /\, 8$. Au retour, il effectue les mêmes mouvements inversés, dans les mêmes temps, de sorte que la durée totale d'une oscillation est :

$$t = 2\, (t_1 + t_2) = 2\, (T/4 + T/8) = (3/4)\, T.$$

---

68 (a) Le poids du bloc de bois est $M\, g$ et la poussée d'Archimède est égale au poids du liquide déplacé, $\rho_0\, (A\, D_0)\, g$. L'égalité entre ces forces donne la hauteur immergée à l'équilibre, $D_0 = M\, /\, (A\, \rho_0)$. (b) Hors d'équilibre, la force résultante est $F = M\, g - \rho_0\, g\, A\, (D_0 + x) = -\, \rho_0\, g\, A\, x$, proportionnelle au déplacement x. La force, opposée au déplacement, ramène le bloc vers sa position d'équilibre et l'équilibre est stable. (c) Cette force est analogue à celle d'un ressort de constante de raideur $k = \rho_0\, g\, A$ et conduit à des oscillations harmoniques dont la fréquence est $\nu = [1/(2\, \pi)]\, \sqrt{k/M}$ ou $\nu = [1\, /\, (2\, \pi)]\, \sqrt{\rho_0\, g\, A\, /\, M}$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre **10**

La température et le comportement des gaz

RAPPELS

La température est une mesure de l'énergie cinétique moyenne associée à la translation des molécules d'une substance. L'échelle de température qui caractérise le plus directement cette énergie est l'échelle de Kelvin, dont l'origine correspond à l'arrêt du mouvement. D'autres échelles (Celsius, Fahrenheit) permettent d'exprimer la température d'une substance. La relation entre la température Celsius T_C et la température Fahrenheit T_F est donnée par l'équation $T_C = (5/9)\ (T_F - 32)$. Les graduations de l'échelle de Kelvin sont identiques à celles de Celsius; son origine, le zéro absolu ou 0 K, correspond à – 273,15 °C.

Les masses atomiques et moléculaires se mesurent en unités de masse atomique uma. Les masses sont classées à partir d'une échelle où la masse d'un atome de ^{12}C vaut exactement 12 uma. L'uma est définie par 1 uma = $1{,}66 \times 10^{-27}$ kg. Une mole d'une substance, exprimée en grammes, est la quantité de substance dont la masse est numériquement égale à sa masse moléculaire exprimée en uma. Le nombre de molécules contenues dans une mole est le nombre d'Avogadro :

$$N_A\ (6{,}02 \times 10^{23}\ \text{molécules mole}^{-1}).$$

La pression d'un gaz ou d'un liquide représente la force par unité de surface exercée sur l'environnement ou sur les parois du récipient. L'unité SI de pression est le pascal (Pa) qui représente 1 N m^{-2} . L'atmosphère est une autre unité couramment utilisée : 1 atm = $1{,}013 \times 10^5$ Pa.

L'équation d'état des gaz parfaits, $p\ V = n\ R\ T$, est valable dans l'hypothèse d'un gaz dont les molécules n'interagissent pas ou peu entre elles. n représente le nombre de moles du gaz, R est la constante des gaz parfaits (R = 8,314 J $mole^{-1}$ K^{-1}) et T la température de Kelvin.

Quand un gaz dit parfait est composé de plusieurs types de molécule, la pression

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

totale est égale à la somme des pressions partielles : chaque constituant apporte à la pression totale une contribution directement proportionnelle à sa concentration dans le mélange.

Le modèle des gaz parfaits conduit à une relation entre la température de Kelvin et l'énergie cinétique moyenne de translation par molécule, $(K)_{moy} = (3/2)\ k_B\ T$. k_B est la constante de Boltzmann, qui vaut $1{,}38 \times 10^{-23}$ J K^{-1}. Cette énergie cinétique moyenne s'exprime aussi par $(K)_{moy} = m\ (v^2_{moy})\ /\ 2$ où m est la masse de la molécule. Les deux expressions fournissent la vitesse quadratique moyenne des molécules en fonction de la température : $v_{qm} = (v^2_{moy})^{1/2} = [3\ k_B\ T\ /\ m]^{1/2}$.

Les phénomènes de diffusion dans les solutions diluées s'apparentent, par certains aspects, à l'auto-diffusion des molécules d'un gaz. Les molécules diffusent des régions à forte concentration vers les régions à faible concentration. La distance quadratique moyenne de diffusion dans une direction est reliée au temps par la relation $x^2_{qm} = 2\ D\ t$ où D est la constante de diffusion. Un liquide s'écoulera entre des régions à concentrations différentes séparées par une membrane semi-imperméable comme s'il existait, au travers de la membrane, une différence de pression égale à la pression osmotique $\pi = c\ R\ T$. Dans cette relation, c représente la concentration en soluté vis-à-vis duquel la membrane est imperméable.

SOLUTION DES EXERCICES

10.1 ECHELLES DE TEMPÉRATURE

1 En introduisant la température de 50 °C dans l'expression qui relie les indications sur les deux échelles, on peut écrire $50 = (5/9)\ (T_F - 32)$, ce qui permet de déterminer $T_F = 122$ °F.

---

2 Pour que les indications sur les deux thermomètres soient identiques, on écrit $T = (5/9)\ (T - 32)$. Par cette équation, on trouve que $T = -40$.

10.2 MASSES MOLÉCULAIRES

5 La masse moléculaire est la somme des masses atomiques des différents constituants de la molécule, soit la somme de la masse atomique de l'azote et trois fois la masse atomique de l'hydrogène. On déduit donc que la masse atomique de l'azote vaut (17,5 uma) – 3 (1,008 uma) = 14,476 uma.

---

7 La mole vaut 17,03 gr. La masse de 0,3 mole d'ammoniac est donc égale à

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(0,3) (17,03 gr) = 5,109 gr.

---

10 Sachant qu'une mole de tétrachlorure de carbone contient une quantité de molécules égale au nombre d'Avogadro, on déduit que :

$(9{,}5 \times 10^{23}$ molécules) / $(6{,}02 \times 10^{23}$ molécules mole$^{-1}) = 1{,}58$ moles

contiennent le nombre donné de molécules.

---

12 Une mole de dioxyde de carbone contient $6{,}02 \times 10^{23}$ molécules et sa valeur est de 44,0 gr. On peut donc déduire que $17{,}4 \times 10^{23}$ molécules pèsent :

(44,0 gr) $(17{,}4 \times 10^{23}$ molécules) / $(6{,}02 \times 10^{23}$ molécules) = 127,2 gr.

10.3 PRESSION

16 La force se calcule par le produit de la pression et de la surface sur laquelle elle s'exerce. Elle vaut donc :

$$F = p\,A = (0{,}01 \text{ atm})\,(1{,}013 \times 10^5 \text{ Pa atm}^{-1})\,(2 \text{ m}^2) = 2026 \text{ N}.$$

Il semble impossible d'ouvrir cette porte manuellement.

---

18 Si l'on considère une personne dont la masse vaut 50 kg, et si la surface des pieds et du corps est égale à 1 dm^2 et 1 m^2 respectivement, la pression sur le sol vaut (a) $p = F / A = (50 \text{ kg})\,(9{,}8 \text{ m s}^{-2}) / (1 \times 10^{-2} \text{ m}^2) = 4{,}9 \times 10^4$ Pa. (b) $p = F / A = (50 \text{ kg})\,(9{,}8 \text{ m s}^{-2}) / (1 \text{ m}^2) = 4{,}9 \times 10^2$ Pa.

10.4 L'ÉQUATION D'ÉTAT DES GAZ PARFAITS

19 Si la température est inchangée, le produit $p\,V$ est constant. On a donc :

$$p_1\,V_1 = p_2\,V_2.$$

La pression devient $p_2 = p_1\,V_1 / V_2 = (1 \text{ atm})\,(5 \text{ m}^3) / (1{,}5 \text{ m}^3) = 3{,}33$ atm.

---

22 A pression constante, le rapport V / T reste constant :

$$V_1 / T_1 = V_2 / T_2.$$

Le rapport du volume final au volume initial vaut :

$$\text{alors } V_2 / V_1 = T_2 / T_1 = (373{,}15\,°) / (273{,}15\,°) = 1{,}37.$$

---

24 Par l'équation d'état des gaz parfaits,

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$T = p\,V / (n\,R) = (0{,}3 \text{ atm})\ (3 \text{ m}^3)\ (1 \times 10^3 \text{ litre m}^{-3})$
$/ [(1 \text{ mole})\ (0{,}08207 \text{ litre atm mole}^{-1}\ \text{K}^{-1})]$
$= 10{,}97 \times 10^3 \text{ K}.$

10.5 MÉLANGES DE GAZ

26 Chaque constituant participe à la pression selon sa concentration dans le mélange. La pression partielle de l'oxygène est donc égale à 35 % de la pression totale, soit (3 atm) (0,35) = 1,05 atm.

---

28 Si l'on considère qu'au niveau du sol, on utilise de l'oxygène pur à une pression de 1 atm et que l'inhalation normale est de 0,21 atm d'oxygène, on calcule l'altitude nécessaire à une chute de $\Delta p = (1 - 0{,}21)$ atm = 0,79 atm, à un taux de 0,078 atm par 1000 m, par $h = (0{,}79)\ (1000 \text{ m}) / (0{,}078) = 10128$ m.

---

29 Chaque fois que la profondeur augmente de 10,3 m, la pression partielle d'oxygène augmente de 0,21 atm. Pour atteindre une pression de 0,8 atm, toxique, il faut donc descendre (0,8) (10,3 m) / (0,21), soit 39,24 m.

10.6 TEMPÉRATURE ET ÉNERGIES MOLÉCULAIRES

32 Le rapport des deux vitesses se réduit à la racine carrée du rapport inverse des deux masses moléculaires sachant que :

$$m(^{238}\text{UF}_6) = 238 \text{ uma} + 6\ (19 \text{ uma}) = 352 \text{ uma}$$
$$\text{et} \quad m(^{235}\text{UF}_6) = 235 \text{ uma} + 6\ (19 \text{ uma}) = 349 \text{ uma}.$$

On déduit $v_{qm352} / v_{qm349} = [m(^{235}\text{UF}_6) / m(^{238}\text{UF}_6)]^{1/2}$. Ce rapport est égal à $[(349 \text{ uma}) / (352 \text{ uma})]^{1/2} = 0{,}9957$.

---

33 L'énergie cinétique moyenne de translation par molécule s'exprime par :

$$(K)_{moy} = (3/2)\ k_B\ T.$$

Par mole de gaz, cette quantité est multipliée par le nombre d'Avogadro :

$$E_c = (3/2)\ k_B\ T\ N_A.$$

Cette énergie sera transformée en énergie potentielle $m\ g\ h$. La hauteur atteinte se calcule donc par :

$h = (3/2)\ k_B\ T\ N_A / (m\ g)$
$= (3/2)\ (1{,}38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1})\ (300 \text{ K})\ (6{,}02 \times 10^{23}) / [(1 \text{ kg})\ (9{,}8 \text{ m s}^{-2})]$
$= 381{,}5$ m.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

34 (a) La vitesse quadratique moyenne des molécules est reliée à l'énergie cinétique moyenne par $v_{qm} = [2\ (K)_{moy} / m]^{1/2}$. On calcule :

$(K)_{moy} = m\ v_{qm}^2 / 2 = (32{,}0\ \text{uma})\ (1{,}66 \times 10^{-27}\ \text{kg uma}^{-1})\ (400\ \text{m s}^{-1})^2 / 2$

$= 4{,}25 \times 10^{-21}\ \text{J}.$

(b) La relation entre la vitesse quadratique moyenne et la température permet de déterminer la valeur de la température :

$T = m\ v_{qm}^2 / (3\ k_B) =$

$(32{,}0\ \text{uma})\ (1{,}66 \times 10^{-27}\ \text{kg uma}^{-1})\ (400\ \text{m s}^{-1})^2 / [3\ (1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J K}^{-1})]$

$= 205\ \text{K}.$

10.7 DIFFUSION

37 L'expression du déplacement quadratique moyen permet de déterminer la constante de diffusion D par :

$D = x_{qm}^2 / (2\ t) = (1 \times 10^{-2}\ \text{m})^2 / [2\ (6\ \text{h})\ (3600\ \text{s h}^{-1})] = 2{,}31 \times 10^{-9}\ \text{m}^2\ \text{s}^{-1}.$

10.8 SOLUTIONS DILUÉES ; PRESSION OSMOTIQUE

39 La pression osmotique est égale au poids de la colonne d'eau divisée par la surface A de sa base. Elle peut donc s'exprimer par $\pi = \rho\ g\ V / A$ ou encore $\pi = \rho\ g\ h\ A / A = \rho\ g\ h$. Elle se calcule aussi par $\pi = c\ R\ T$. De ces deux expressions, on déduit l'expression de :

$c = \rho\ g\ h / (R\ T)$

$= (1000\ \text{kg m}^{-3})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (14\ \text{m})\ / [(8{,}314\ \text{J mole}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (300\ \text{K})]$

$= 55\ \text{mole m}^{-3}.$

SOLUTION DES PROBLÈMES

43 La masse moléculaire en uma et la mole en grammes ont comme valeur numérique 2 (12,011) + 6 (1,008) + 1 (15,999) = 46,069. Une mole contient N_A molécules. Dans 100 gr, on trouve :

(100 gr) (6,02 × 10^{23} molécules) / (46,069 gr) = 13,07 × 10^{23} molécules.

---

45 A cause de la diminution de pression lors de la remontée - la pression passe de (1 + (20/10,3)) atm à 1 atm à la surface - le volume, à température constante, tend à augmenter si la plongeuse n'expulse pas d'air. Ce volume serait égal à

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$V_2 = p_1\ V_1 / p_2 = [(1 + 20/10{,}3)]$ (2,4 litres) / (1 atm) = 7,06 litres. Puisque le volume des poumons est resté constant, il faut que la plongeuse ait expulsé [(7,06 l) – (2,4 l)], soit 4,66 litres d'air ou encore $4{,}66 \times 10^{-3}$ m^3.

---

47 La vitesse quadratique moyenne se calcule grâce à $v_{qm} = [3\ k_B\ T / m]^{1/2}$ où m est la masse d'un atome. On calcule donc :

$$m = 3\ k_B\ T / v_{qm}^2 = 3\ (1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J K}^{-1})\ (300\ \text{K}) / (299\ \text{m s}^{-1})^2$$
$$= 1{,}389 \times 10^{-25}\ \text{kg}.$$

En unités de masse atomique, cette masse représente :

$$(1{,}389 \times 10^{-25}\ \text{kg}) / (1{,}66 \times 10^{-27}\ \text{kg uma}^{-1}) = 83{,}7\ \text{uma}.$$

Il s'agit donc d'atomes de Krypton.

---

49 (a) Partant de la masse moléculaire, on détermine qu'une mole d'albumine pèse 69000 gr et que 0,045 gr représente :

$$(0{,}045\ \text{gr}) / (69000\ \text{gr mole}^{-1}) = 6{,}52 \times 10^{-7}\ \text{mole}.$$

La concentration de l'albumine vaut donc $6{,}52 \times 10^{-7}$ mole m^{-3}. La mole de globuline vaut 140000 gr et on calcule que 0,025 gr représente $1{,}79 \times 10^{-7}$ mole de globuline. La concentration de la globuline vaut donc $1{,}79 \times 10^{-7}$ mole m^{-3}.
(b) La relation $\pi = c\ R\ T$ fournit la pression osmotique. Pour l'albumine, sa valeur est :
$\pi_a = (6{,}52 \times 10^{-7}\ \text{mole m}^{-3})\ (8{,}314\ \text{J mole}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (310\ \text{K}) = 16{,}8 \times 10^{-4}$ Pa
et pour la globuline, elle vaut :
$\pi_g = (1{,}79 \times 10^{-7}\ \text{mole m}^{-3})\ (8{,}314\ \text{J mole}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (310\ \text{K}) = 4{,}61 \times 10^{-4}$ Pa.
(c) Cette pression est capable de supporter une colonne d'eau dont la hauteur est donnée par $\pi = \rho\ g\ h$, soit $h = \pi / (\rho\ g)$. Dans le cas de l'albumine, cette hauteur est égale à $h_a = (16{,}8 \times 10^{-4}\ \text{Pa}) / [(1000\ \text{kg m}^{-3})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})] = 1{,}71 \times 10^{-7}$ m
et dans le cas de la globuline, elle vaut :

$$h_g = (4{,}61 \times 10^{-4}\ \text{Pa}) / [(1000\ \text{kg m}^{-3})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})] = 4{,}707 \times 10^{-8}\ \text{m}.$$

---

50 (a) La distance totale à parcourir est égale à la somme du rayon de l'alvéole, de l'épaisseur de la membrane et du rayon du capillaire, soit $1{,}3 \times 10^{-4}$ m. La constante de diffusion D vaut $1{,}0 \times 10^{-9}$ m^2 s^{-1} et le temps de diffusion se calcule par $t = x_{qm}^2 / (2\ D) = (1{,}3 \times 10^{-4}\ \text{m})^2 / [2\ (1{,}0 \times 10^{-9}\ \text{m}^2\ \text{s}^{-1})] = 8{,}45$ s.
(b) Ce temps de diffusion est 84,5 fois plus grand que le temps de transit.

---

53 On calcule que la pression osmotique extérieure vaut

$\pi = c\ R\ T$
$= (100\ \text{mole m}^{-3})\ (8{,}314\ \text{J mole}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (300\ \text{K}) = 24{,}9 \times 10^4\ \text{Pa} = 2{,}46$ atm.

La pression extérieure est plus faible que la pression osmotique du globule rouge.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Le globule aura donc tendance à se dilater.

---

54 L'énergie cinétique moyenne d'une molécule se calcule par $(K)_{moy} = (3/2)\, k_B\, T$. Pour une mole, soit N_A molécules, l'énergie à fournir pour faire varier la température de 1 K vaut :

$$(3/2)\, N_A\, k_B\, T = (3/2)\, (6{,}02 \times 10^{23})\, (1{,}38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\ K^{-1}})\, (1\ \mathrm{K}) = 12{,}46\ \mathrm{J}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre **11**

Thermodynamique

RAPPELS

Lorsqu'un gaz à la pression p est en contact avec un piston de surface A, il exerce sur celui-ci une force $F = p\ A$. Si le piston se déplace sur une petite distance Δx, le travail effectué par le gaz vaut $\Delta W = F\ \Delta x = p\ \Delta V$. Lorsque la pression est maintenue constante (processus isobare), le travail effectué lors d'un changement de volume est simplement $W = p\ (V_f - V_i)$. On convient de considérer le travail comme positif quand il est fourni par le système.

La chaleur Q reçue ou cédée par un système est l'énergie thermique transférée sous l'effet d'une différence de température. La chaleur est conventionnellement positive lorsqu'elle est fournie au système. Le transfert d'énergie thermique entre objets est appelé flux de chaleur.

La thermodynamique est basée sur deux principes fondamentaux. Le premier principe relie la chaleur transférée à un système au travail fourni par celui-ci et à la variation de son énergie interne par $\Delta U = Q - W$. L'énergie interne d'un gaz parfait composé de N molécules est égale à $U = (3/2)\ N\ k_B\ T$. Ce premier principe affirme que la chaleur et le travail sont équivalents et que la variation d'énergie interne ne dépend que des états initial et final du système. Lorsqu'un processus est isotherme, l'énergie interne du gaz parfait ne varie pas : on a donc $Q = W$. Dans un processus adiabatique ($Q = 0$), l'équation devient $\Delta U = - W$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Le second principe est un principe d'évolution : il indique le sens d'une transformation possible d'un système. Dans sa forme microscopique, il stipule qu'un état moléculaire désordonné est plus probable qu'un état ordonné. Si une petite quantité de chaleur ΔQ est ajoutée à un système à la température T d'une façon réversible (si on peut revenir à l'état initial sans qu'il y ait, au total, de modification, ni dans le système, ni dans le milieu extérieur), la variation d'entropie (de désordre) du système est $\Delta S = \Delta Q / T$. Le second principe, dans sa forme macroscopique, déclare que l'entropie *totale* (système *et* milieu ambiant) - qui ne dépend que des états initial et final du système - ne peut jamais décroître. Sa variation est nulle lorsque la transformation est réversible et positive si le processus est irréversible.

Le théorème de Carnot stipule que le rendement des moteurs thermiques (convertissant de la chaleur en travail mécanique) est toujours inférieur à 100 %. Le rendement e est défini par le travail fourni pendant un cycle complet réversible divisé par la chaleur absorbée : $e = W / Q_2$ qu'on peut aussi écrire $e = 1 - (T_1 / T_2)$.

Les coefficients de performance maximum d'un réfrigérateur et d'une pompe à chaleur traduisent l'efficacité de la machine et valent $CP_R = T_1 / (T_2 - T_1)$ et $CP_{PC} = T_2 / (T_2 - T_1)$ idéalement.

Lors d'une activité humaine, on définit l'équivalent énergétique de l'oxygène d'une substance comme le rapport de l'énergie libérée au volume d'oxygène consommé (J litre^{-1}) et le contenu énergétique par unité de masse par l'énergie libérée divisée par la masse de la substance (J g^{-1}). Pour des hydrocarbures, des protéines ainsi que des graisses couramment consommées, l'équivalent énergétique de l'oxygène est pris égal à la moyenne pour toutes ces substances (20,2 kJ litre^{-1}), pour convertir la consommation d'oxygène en variation d'énergie interne. Le rendement du corps humain utilisant l'énergie chimique des aliments pour fournir du travail utile, exprimé en %, est donné par $e = 100\ [\Delta W / \Delta t] / |(\Delta U / \Delta t) - (\Delta U / \Delta t)_{basal}|$ où $\Delta W / \Delta t$ est la puissance mécanique effectivement fournie, $\Delta U / \Delta t$ la variation par unité de temps de l'énergie interne (ou métabolisme) et $(\Delta U / \Delta t)_{basal}$ vaut 1,2 W kg^{-1} pour un homme moyen âgé de 20 ans et 1,1 W kg^{-1} pour une femme du même âge.

SOLUTION DES EXERCICES

11.1 TRAVAIL MÉCANIQUE

2 Pour chaque cas, le travail fourni se calcule par $W = p\ (V_f - V_i)$. On trouve donc en (a) $W = (1 \times 10^5\ \text{Pa})\ [(2{,}24 \times 10^{-2}\ \text{m}^3) - (1 \times 10^{-2}\ \text{m}^3)] = 1{,}24 \times 10^3$ J et en (b) $W = (1 \times 10^5\ \text{Pa})\ [(0{,}5 \times 10^{-2}\ \text{m}^3) - (2 \times 10^{-2}\ \text{m}^3)] = -1{,}5 \times 10^3$ J.

---

3 Le travail fourni au gaz vaut, en valeur absolue,

$$\Delta W = F\ \Delta x = (10\ \text{N})\ (0{,}14\ \text{m}) = 1{,}4\ \text{J}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

11.2 LE PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

4 (a) Le travail fourni par le système se calcule sur les chemins isobares puisque sur les trajets isochores, le travail est nul. On calcule donc :

$$W = p_3 (V_2 - V_1) + p_2 (V_3 - V_2).$$

(b) Le même raisonnement conduit à $W = p_1 (V_3 - V_1)$. (c) Lors d'un processus adiabatique ($Q = 0$), la variation d'énergie interne est égale à l'inverse du travail fourni par le système. On a donc $U_f - U_i = p_3 (V_1 - V_2) + p_2 (V_2 - V_3)$.

---

6 Le calcul de l'énergie interne, $U_f - U_i = Q - W$ avec les conventions de signe données permet de calculer (a) ΔU = (2000 J) – (500 J) = 1500 J et (b) ΔU = (1100 J) – (– 400 J) = 1500 J.

---

7 Le gaz reçoit de la chaleur à un taux de 100 J par seconde et fournit 75 J de travail par seconde. Le bilan énergétique vaut donc :

$$\Delta U = Q - W = (100 \text{ J}) - (75 \text{ J}) = 25 \text{ J par seconde, soit } 25 \text{ W}.$$

---

8 En se dilatant, le gaz fournit un travail de 75 J par seconde. Après les 10 secondes, l'énergie fournie est égale à 750 J. Sous une pression de 1 atm, la dilatation se mesure par :

$V_f - V_i = W / p = (750 \text{ J}) / [(1 \text{ atm}) (1{,}013 \times 10^5 \text{ Pa atm}^{-1})] = 7{,}40 \times 10^{-3} \text{ m}^3$.

11.3 LE SECOND PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

12 (a) La variation d'entropie du système se calcule par :

$$\Delta S = \Delta Q / T = (1 \times 10^{14} \text{ J}) / (300 \text{ K}) = 3{,}33 \times 10^{11} \text{ J K}^{-1}.$$

(b) Comme l'énergie interne ne dépend que de la température et que celle-ci est restée constante, l'énergie interne n'est pas modifiée.

11.4 LE THÉORÈME DE CARNOT ET LA CONVERSION DE L'ÉNERGIE

16 Le rendement maximum théorique d'une machine thermique est donné par l'expression $e = 1 - (T_1 / T_2)$ où T_1 est la température de Kelvin de la source froide et T_2 celle de la source chaude. On évalue donc :

$$e = 1 - [(373 \text{ K}) / (673 \text{ K})] = 0{,}446,$$

soit un rendement maximum de 44,6 %.

---

17 (a) Le rendement idéal ou maximum est donné par :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$e = 1 - (T_1 / T_2) = 1 - [(900\ \text{K})/(2150\ \text{K})] = 0{,}581 \text{ soit } 58{,}1\ \%.$$

(b) Par le bilan énergétique $\Delta U = Q - W$, on trouve que la capacité effective de travail du moteur vaut $W = Q - \Delta U = (7{,}9 \times 10^6\ \text{J}) - (4{,}6 \times 10^6\ \text{J}) = 3{,}3 \times 10^6\ \text{J}$, soit une puissance effective de $3{,}3 \times 10^6$ W. (c) En utilisant la valeur effective du travail calculée en (b), on déduit, par définition du rendement, que :

$$e = W / Q_2 = (3{,}3 \times 10^6\ \text{J}) / (7{,}9 \times 10^6\ \text{J}) = 0{,}418, \text{ soit } 41{,}8\ \%.$$

---

18 Par la définition du rendement $e = W / Q_2$, on calcule l'énergie mécanique $W = e\,Q_2 = (0{,}4)\ (1 \times 10^4\ \text{J}) = 4 \times 10^3\ \text{J}$ et donc une puissance mécanique de 4×10^3 W.

11.5 CONSÉQUENCES DU THÉORÈME DE CARNOT

19 Par la définition du rendement maximum, on trouve l'expression de la température de la source chaude : $T_2 = T_1 / (1 - e)$. La vapeur produite dans une centrale électrique doit donc avoir une température égale à :

$$T_2 = (300\ \text{K}) / (1 - 0{,}4) = 500\ \text{K}$$

alors que celle de la centrale nucléaire doit valoir :

$$T_2 = (300\ \text{K}) / (1 - 0{,}3) = 429\ \text{K}.$$

---

20 La centrale produit 5×10^8 W avec un rendement de 40 %. Elle doit donc produire une quantité totale égale à $(5 \times 10^8\ \text{W}) / (0{,}4) = 1{,}25 \times 10^9$ W. 60 % de cette énergie est non utilisée et rejetée dans l'eau, soit $7{,}5 \times 10^8$ W. Par seconde, la température de l'eau va donc augmenter suite à l'apport de $\Delta Q = 7{,}5 \times 10^8$ W. Pour augmenter la température de 3×10^4 kg d'eau de 1 K, il faut, par seconde, $(4{,}8 \times 10^3\ \text{J kg}^{-1})\ (3 \times 10^4\ \text{kg}) = 12{,}54 \times 10^7\ \text{J K}^{-1}$. Disposant de $\Delta Q = 7{,}5 \times 10^8$ J, la température de cette masse d'eau va augmenter de $(7{,}5 \times 10^8\ \text{J}) / (12{,}54 \times 10^7\ \text{J K}^{-1}) = 6$ K.

11.6 RÉFRIGÉRATEURS ET POMPES À CHALEUR

21 (a) Le coefficient de performance maximum du réfrigérateur se calcule par $CP_R = T_1 / (T_2 - T_1)$ où T_1 est la température du compartiment (= – 3 °C). Sa valeur est donc $CP_R = (270\ \text{K}) / [(299\ \text{K}) - (270\ \text{K})] = 9{,}31$. (b) Sachant que le coefficient de performance se définit aussi par le rapport de la chaleur évacuée du réservoir à basse température (compartiment à refroidir) au travail fourni au système, on calcule, par seconde, le travail reçu par le système,

$$W = - Q_1 / CP_R = - (100\ \text{J}) / 4 = - 25\ \text{J}.$$

La puissance nécessaire vaut donc 25 W.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

22 Le coefficient de performance d'une pompe à chaleur est défini par la chaleur cédée (au réservoir à température plus élevée) rapportée au travail fourni au système, soit $CP_{PC} = Q_2 / (-W) = (5000\ \text{J}) / (2000\ \text{J}) = 2{,}5$.

11.7 MÉTABOLISME HUMAIN

23 (a) Au repos, la variation d'énergie interne est égale à la chaleur dégagée : $\Delta U = \Delta Q = (55\ \text{kg})\ (1{,}1\ \text{J s}^{-1}\ \text{kg}^{-1}) = 60{,}5\ \text{J s}^{-1}$.

(b) Après un temps : $t = (8\ \text{h})\ (3600\ \text{s h}^{-1}) = 28{,}8 \times 10^3$ s, l'énergie interne aura varié de $(60{,}5\ \text{J s}^{-1})\ (28{,}8 \times 10^3\ \text{s}) = 1{,}74 \times 10^6$ J.

(c) Sachant que le contenu énergétique par unité de masse d'hydrate de carbone vaut $17{,}2 \times 10^3\ \text{J g}^{-1}$, et que l'énergie interne a varié de $1{,}74 \times 10^6$ J, il faut consommer $(1{,}74 \times 10^6\ \text{J}) / (17{,}2 \times 10^3\ \text{J g}^{-1}) = 101$ g d'hydrate de carbone.

---

24 (a) Sachant qu'une variation d'énergie interne de 1 J correspond à une consommation d'oxygène de $[1 / (20{,}2 \times 10^3)]$ litre, on peut calculer qu'une variation totale d'énergie interne de $(3\ \text{W kg}^{-1})\ (50\ \text{kg}) = 150$ J par seconde correspond à une consommation d'oxygène par unité de temps de :

$$(150\ \text{J s}^{-1}) / (20{,}2 \times 10^3\ \text{J litre}^{-1}) = 7{,}43 \times 10^{-3}\ \text{litre s}^{-1}.$$

(b) Après 8 heures, soit $(8\ \text{h})\ (3600\ \text{s h}^{-1}) = 28{,}8 \times 10^3$ s, la consommation d'oxygène vaut $(7{,}43 \times 10^{-3}\ \text{litre s}^{-1})\ (28{,}8 \times 10^3\ \text{s}) = 214$ litres.

---

27 (a) La consommation d'oxygène est de $(1/60)$ litre s^{-1}. Le métabolisme peut se calculer par :

$$\Delta U / \Delta t\ (\text{J s}^{-1}) = (\text{consommation d'oxygène})\ (20{,}2 \times 10^3\ \text{J litre}^{-1})$$
$$= [(1/60)\ \text{litre s}^{-1}]\ (20{,}2 \times 10^3\ \text{J litre}^{-1}) = 337\ \text{W}.$$

(b) Le rendement de son activité se définit, en pourcents, par :

$$e = (100\ \Delta W / \Delta t) / |(\Delta U / \Delta t) - (\Delta U / \Delta t)_{basal}|$$

et doit valoir 100 %. On calcule donc :

$$\Delta W / \Delta t = |(\Delta U / \Delta t) - (\Delta U / \Delta t)_{basal}|$$
$$= |(337\ \text{W}) - (1{,}2\ \text{W kg}^{-1})\ (70\ \text{kg})| = 253\ \text{W}.$$

---

28 (a) Le travail mécanique effectué par le cheval vaut :

$$\Delta W = F\ \Delta x = (1 \times 10^8\ \text{N})\ (0{,}3\ \text{m}) = 3 \times 10^7\ \text{J}.$$

Comparée à la réserve d'énergie interne, cette quantité en représente 25 %.

(b) Le rendement de l'activité est défini par :

$$e = (100\ \Delta W / \Delta t) / |(\Delta U / \Delta t) - (\Delta U / \Delta t)_{basal}|$$

avec $\Delta t = (24\ \text{h})\ (3600\ \text{s h}^{-1}) = 86400$ s. Le métabolisme basal vaut donc :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$(\Delta U / \Delta t)_{basal} = (\Delta U / \Delta t) - (100 / e)\,(\Delta W / \Delta t)$$
$$= [(1{,}2 \times 10^8 \text{ J}) / (86400 \text{ s})] - (100/30)\,[(3 \times 10^7 \text{ J}) / (86400 \text{ s})]$$
$$= 231 \text{ W}.$$

SOLUTION DES PROBLÈMES

29 (a) Puisque l'état final du système est le même en suivant les deux trajets *abc* et *adc*, la variation d'énergie interne ΔU doit être la même pour les deux voies de transformation. Pour le trajet *abc*, elle vaut :

$$\Delta U_{abc} = Q - W = (1 \times 10^5 \text{ J}) - (4 \times 10^4 \text{ J}) = 6 \times 10^4 \text{ J}.$$

En considérant le trajet *adc*, on trouve :

$$Q = \Delta U_{abc} + W = (6 \times 10^4 \text{ J}) + (1 \times 10^4 \text{ J}) = 7 \times 10^4 \text{ J}.$$

(b) Pour retrouver son état initial, un travail est fourni au système ($W < 0$) et la valeur de l'énergie interne diminue, on a donc :

$$\Delta U_{ca} = -6 \times 10^4 \text{ J} = Q - W = Q - (-2 \times 10^4 \text{ J}).$$

On en déduit $Q = (-6 \times 10^4 \text{ J}) - (2 \times 10^4 \text{ J}) = -8 \times 10^4$ J. Cette chaleur est donc dégagée par le système. (c) Sachant que la variation d'énergie interne $U_d - U_a$ vaut $(5 \times 10^4 \text{ J}) - (1 \times 10^4 \text{ J}) = 4 \times 10^4$ J, et que le travail le long du trajet *adc* vaut 1×10^4 J, on calcule :

$$Q_{ad} = \Delta U_{ad} + W_{ad} = (4 \times 10^4 \text{ J}) + (1 \times 10^4 \text{ J}) = 5 \times 10^4 \text{ J}.$$

Pour le trajet *dc*, on peut déterminer la variation d'énergie interne sachant que $(U_c - U_a) = (U_c - U_d) + U_d - U_a$. Connaissant la valeur de U_d, U_a et de $(U_c - U_a)$, on détermine :

$$(U_c - U_d) = (U_c - U_a) - U_d + U_a = (6 \times 10^4 \text{ J}) - (5 \times 10^4 \text{ J}) + (1 \times 10^4 \text{ J})$$
$$= 2 \times 10^4 \text{ J}.$$

Le long du trajet *dc*, le travail est nul puisque la transformation est isochore. On a donc $\Delta U = Q_{dc} = 2 \times 10^4$ J.

---

31 Le rendement se calcule par $e = W / Q_2$ où W est le travail fourni pendant un cycle complet, égal à la différence entre la chaleur reçue Q_2 du réservoir à la température T_2 et la chaleur Q_1 cédée au réservoir à la température T_1 :

$$W = Q_2 - Q_1.$$

La chaleur échangée se calcule sur les trajets où la température reste constante par $\Delta Q = T\ \Delta S$. On calcule Q_2 en additionnant les termes $\Delta Q > 0$ ($\Delta S > 0$) et Q_1 en sommant les contributions $\Delta Q < 0$ ($\Delta S < 0$). On trouve :

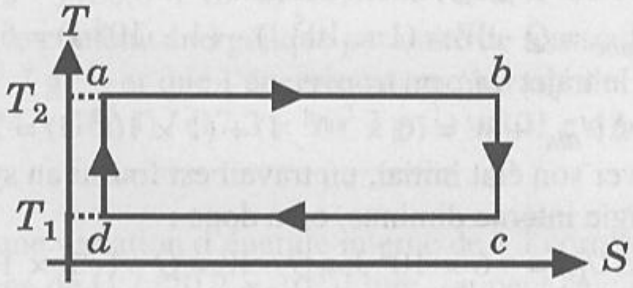
$$Q_2 = (700 \text{ K})\,[(200 \text{ J K}^{-1}) - (100 \text{ J K}^{-1})]$$
$$+ (400 \text{ K})\,[(250 \text{ J K}^{-1}) - (200 \text{ J K}^{-1})]$$
$$= 90 \times 10^3 \text{ J}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

De même, on calcule $|Q_1| = |(300\ \text{K})\ [(100\ \text{J K}^{-1}) - (250\ \text{J K}^{-1})]| = 45 \times 10^3\ \text{J}$. Le rendement vaut donc $e = [(90 \times 10^3\ \text{J}) - (45 \times 10^3\ \text{J})] / (90 \times 10^3\ \text{J}) = 0{,}5$ soit 50 %.

---

32 Si l'on se reporte à la figure 11.8, partant du point a, la première transformation est isotherme (T = constante) et le système absorbe de la chaleur Q_2. Cette chaleur a pour effet d'augmenter l'entropie du gaz. Des points b à c, la transformation est adiabatique ($\Delta Q = 0$); on a par conséquent $\Delta S = 0$ et la température tombe à la valeur T_1. Pendant le chemin cd, le système cède, à température constante, de la chaleur Q_1. L'effet attendu est une diminution de l'entropie. Le chemin da est adiabatique : l'entropie ne varie pas.



---

34 (a) Par la définition du coefficient de performance d'une pompe à chaleur, on détermine l'énergie mécanique nécessaire, par heure, pour maintenir la pompe en fonctionnement par :

$$W = -Q_2 / CP_{PC} = -(5 \times 10^6\ \text{J}) / (3{,}2) = -1{,}56 \times 10^6\ \text{J}.$$

La puissance indispensable vaut donc $(1{,}56 \times 10^6\ \text{J h}^{-1}) / (3600\ \text{s h}^{-1}) = 434\ \text{W}$. (b) En supposant un même taux de tranfert de chaleur, il faudrait une puissance électrique de $(5 \times 10^6\ \text{J h}^{-1}) / (3600\ \text{s h}^{-1}) = 1{,}39 \times 10^3\ \text{W}$. (c) Si le mazout sert à chauffer directement le bâtiment, il faudrait, par heure,

$$(1\ \text{litre})\ (5 \times 10^6\ \text{J}) / [(0{,}8)\ (3{,}7 \times 10^7\ \text{J})] = 0{,}169\ \text{litre}.$$

(d) Avec un rendement de 40 % lors de la production d'énergie électrique, il faudra, par heure, $(1\ \text{litre})\ (1{,}56 \times 10^6\ \text{J}) / [(0{,}4)\ (3{,}7 \times 10^7\ \text{J})] = 0{,}105\ \text{litre}$.

---

36 Le coefficient de performance du réfrigérateur vaut :

$$CP_R = T_1 / (T_2 - T_1) = (270\ \text{K}) / [(300\ \text{K}) - (270\ \text{K})] = 9.$$

Sachant que le moteur lui fournit 200 J par seconde, on peut calculer la quantité de chaleur évacuée par seconde. Elle vaut $Q_1 = CP_R\ W = (9)\ (200\ \text{J}) = 1800\ \text{J}$. En 60 secondes, la quantité de chaleur dégagée est égale à :

$$(1800\ \text{J s}^{-1})\ (60\ \text{s}) = 108 \times 10^3\ \text{J}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

38 Pour que, par seconde, l'énergie effectivement utilisable soit de 500 MJ avec un rendement de 4 %, l'énergie produite doit être égale à :

$$(500 \times 10^6 \text{ J}) / (0{,}04) = 1{,}25 \times 10^{10} \text{ J}.$$

Pour augmenter la température d'un kilogramme d'eau de 12 °C à 30 °C, soit $\Delta T = 18$ K, il faut fournir, par kilogramme d'eau,

$$(4{,}169 \times 10^3 \text{ J K}^{-1}) (18 \text{ K}) = 75{,}04 \times 10^3 \text{ J}.$$

Pour la production désirée, il faut donc élever la température de :

$$(1{,}25 \times 10^{10} \text{ J}) / (75{,}04 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1}) = 167 \times 10^3 \text{ kilogrammes d'eau.}$$

---

42 Par seconde, son énergie interne varie de $(7{,}5 \text{ J s}^{-1} \text{ kg}^{-1}) (90 \text{ kg}) = 675 \text{ J s}^{-1}$.

Consommer un kilogramme de graisse nécessite la dépense de :

$$(38{,}9 \times 10^3 \text{ J g}^{-1}) (1 \times 10^3 \text{ g}) = 38{,}9 \times 10^6 \text{ J}.$$

Au taux de 675 J par seconde, il faudra un temps égal à :

$$(38{,}9 \times 10^6 \text{ J}) / (675 \text{ J s}^{-1}) = 57{,}6 \times 10^3 \text{ s, soit 16 heures.}$$

---

43 Le rendement de l'activité, exprimé en pourcents, permet de calculer la variation d'énergie interne par :

$$\Delta U / \Delta t = (100/20) (\Delta W / \Delta t) + (\Delta U / \Delta t)_{basal}$$

$$= (5) (820 \text{ W}) + (1{,}2 \text{ W kg}^{-1}) (70 \text{ kg}) = 4{,}184 \times 10^3 \text{ W}.$$

L'énergie nécessaire pendant les 11 s que dure le sprint vaut :

$$(4{,}184 \times 10^3 \text{ J s}^{-1}) (11 \text{ s}) = 46{,}02 \times 10^3 \text{ J}.$$

Comme un hydrate de carbone fournit $17{,}2 \times 10^3$ J par gramme consommé, il en faudra $(46{,}02 \times 10^3 \text{ J}) / (17{,}2 \times 10^3 \text{ J g}^{-1})$, soit 2,68 g.

---

44 (a) La puissance mécanique nécessaire à l'escalade vaut :

$$\Delta W / \Delta t = m\, g\, h / \Delta t = (45 \text{ kg}) (9{,}8 \text{ m s}^{-2}) (5 \text{ m}) / (3 \text{ s}) = 735 \text{ W}.$$

(b) Par la définition du rendement de l'activité, on calcule :

$$\Delta U / \Delta t = (100/10) (\Delta W / \Delta t) + (\Delta U / \Delta t)_{basal}$$

$$= (10) (735 \text{ W}) + (1 \text{ W kg}^{-1}) (45 \text{ kg}) = 7395 \text{ W}.$$

Le métabolisme par unité de masse vaut donc $(7395 \text{ W}) / (45 \text{ kg}) = 164{,}3 \text{ W kg}^{-1}$.

(c) Pendant 3 s, la variation d'énergie interne vaut :

$$(7395 \text{ J s}^{-1}) (3 \text{ s}) = 22{,}185 \times 10^3 \text{ J}.$$

La consommation en oxygène correspondante vaut :

$$(22{,}185 \times 10^3 \text{ J}) / (20{,}2 \times 10^3 \text{ J litre}^{-1}) = 1{,}1 \text{ litre}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

46 On peut écrire la loi de proportionnalité entre le métabolisme par unité de masse et la masse comme $\Delta U / (m\ \Delta t) = A\ m^{-0,25}$ où A est une constante. Si l'on fait le rapport entre cette expression pour l'homme et celle pour le cheval, on trouve que $[\Delta U / (m\ \Delta t)]_{cheval} = (1,2\ \text{W kg}^{-1}) / [(60\ \text{kg}) / (960\ \text{kg})]^{-0,25} = 0,6$.

---

47 Le rapport des deux métabolismes $(\Delta U / \Delta t)_s / (\Delta U / \Delta t)_e$ est égal au rapport des masses à la puissance 0,75 si l'on indice par s les variables qui se rapportent à la souris et par e celles de l'éléphant. On trouve donc que :

$$(\Delta U / \Delta t)_e = (0,3\ \text{W}) / [m_s / m_e]^{0,75} = (0,3\ \text{W}) / [(0,04\ \text{kg}) / (6400\ \text{kg})]^{0,75}$$
$$= 2,4 \times 10^3\ \text{W}.$$

Le métabolisme par unité de masse de l'éléphant vaut donc :

$$(2,4 \times 10^3\ \text{W}) / (6400\ \text{kg}) = 0,375\ \text{W kg}^{-1}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 12

Propriétés thermiques de la matière

RAPPELS

La plupart des objets, soumis à une variation de température ΔT, subissent une variation relative de longueur proportionnelle à ΔT : $\Delta \ell / \ell = \alpha \Delta T$ où ℓ est la longueur originale de l'objet et α le coefficient de dilatation linéaire, propriété d'un matériau donné. Les variations relatives de surface et de volume des matériaux uniformes sont données par des formules analogues : $\Delta A / A = 2 \alpha \Delta T$ et $\Delta V / V = 3 \alpha \Delta T = \beta \Delta T$ où β est le coefficient de dilatation volumique. L'eau est un cas particulier dans les matériaux qui se dilatent. En passant de 0 °C à 3,98 °C, elle se contracte. Elle se dilate, une fois cette température dépassée.

La capacité calorifique d'un objet est le rapport de la quantité d'énergie transférée (lors du contact avec un objet dont la température est plus élevée) à la variation de température ΔT.

La capacité calorifique rapportée à une mole d'une substance est appelée la chaleur spécifique molaire C et est définie par la relation $C = \Delta Q / (n \Delta T)$. La chaleur spécifique est généralement mesurée dans des conditions expérimentales particulières. Si le transfert de chaleur se fait à volume constant ($\Delta U = \Delta Q$), la chaleur spécifique molaire à volume constant est donnée par $C_V = \Delta U / (n \Delta T)$. Dans le cas d'un gaz parfait monoatomique, la chaleur spécifique molaire à volume constant vaut $C_V = 3 R / 2$ où R est la constante des gaz parfaits. Expérimentalement, il est plus facile de la mesurer à pression constante. En utilisant le premier principe de la thermodynamique et l'équation d'état des gaz parfaits, la chaleur spécifique molaire à pression constante s'écrit $C_p = C_V + R = 5 R / 2$.

La capacité calorifique rapportée à l'unité de masse est appelée la chaleur spécifique c et elle est reliée à la chaleur spécifique molaire C par $c = C / M$ où M est la masse d'une mole.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

La chaleur requise pour produire un changement de température ΔT d'une masse m est donnée par $\Delta Q = c\ m\ \Delta T$. Le calorimètre permet de mesurer les chaleurs spécifiques à pression constante. La quantité de chaleur ΔQ fournie à l'ensemble du système permet d'accroître la température de l'appareil et celle de l'échantillon. On a donc $\Delta Q = c\ m\ \Delta T + c_c\ m_c\ \Delta T$ où les quantités indicées se rapportent au calorimètre.

Le changement de phase (solide, liquide, gaz) nécessite un apport ou un dégagement de chaleur. Lors d'un changement de phase, la température reste constante tant que deux phases coexistent. L'énergie absorbée ou libérée lors d'un changement de phase est appelée la chaleur latente (chaleur latente de fusion L_f : nécessaire pour fondre une substance, chaleur latente de vaporisation L_V : nécessaire pour évaporer...). La chaleur ΔQ nécessaire au changement de phase d'une masse m est donnée par $\Delta Q = L\ m$.

Le phénomène de conduction de la chaleur se produit lorsque deux objets en contact sont maintenus à des températures différentes. Le flux de chaleur $H = \Delta Q / \Delta t$ s'écrit $H = \kappa\ A\ \Delta T / \ell$ où $\Delta T / \ell$ est le gradient de température, A la section droite de l'objet et κ la conductivité thermique. La quantité ℓ / κ représente la résistance du matériau au transport de chaleur par conduction. On l'appelle parfois *valeur R* du conducteur.

Une quantité de chaleur beaucoup plus importante est emportée par le mouvement du fluide environnant : il s'agit du phénomène de convection. Le flux de chaleur transportée par convection à partir d'une surface A est approximativement donné par la relation $H = q\ A\ \Delta T$ où q est la constante de convection qui dépend de la forme et de l'orientation de la surface. Le transfert de chaleur par convection augmente considérablement si le fluide est en déplacement forcé : les pertes de chaleur sont beaucoup plus importantes par temps venteux.

Le transfert de chaleur par rayonnement se fait par émission ou absorption d'ondes électromagnétiques. Ces ondes se déplacent à la vitesse de la lumière

$$c = 3 \times 10^8\ \text{m s}^{-1}.$$

Une onde est caractérisée par sa longueur d'onde λ et par sa fréquence f telles que $f\lambda = c$. La longueur d'onde à laquelle le rayonnement est le plus intense est donnée par la loi de Wien : $\lambda = B / T$ où B vaut $2{,}898 \times 10^{-3}$ m K. La puissance électromagnétique émise par une surface d'aire A à la température T est donnée par la loi de Stefan : $H = e\ \sigma\ A\ T^4$ où σ est la constante de Stefan ($\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}) tandis que e est l'émissivité du matériau ($0 \leqslant e \leqslant 1$). La chaleur perdue par rayonnement est égale à la différence entre l'énergie émise et l'énergie absorbée par l'objet.

Dans le cas d'un être humain, les différentes contributions à la perte et à la production de chaleur correspondent à la puissance thermique due au métabolisme H_m, comprise entre 80 et 1600 W, la puissance perdue par convection

$$H_c = D_c\ A\ (T_e - T_a),$$

la puissance perdue par rayonnement $H_r = D_r\ A\ (T_e - T_a)$, la puissance perdue par évaporation de la sueur $H_s = D_s\ r$ et la puissance perdue par évaporation dans

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

les poumons $H_p = D_p$ où, dans chaque expression, A représente la surface, T_e la température de la peau, T_a la température de l'air et r le débit de sueur exprimé en kg par heure. Les différentes constantes valent :

$D_c = 7{,}1$ W m^{-2} K^{-1}, $D_r = 6{,}5$ W m^{-2} K^{-1}, $D_s = 674$ W h kg^{-1} et $D_p = 10{,}5$ W.

Si la température du corps est maintenue constante, les pertes de chaleur sont reliées par $H_m = H_c + H_r + H_s + H_p$.

SOLUTION DES EXERCICES

12.1 LA DILATATION THERMIQUE

2 La contraction se calcule, lors d'une diminution de température, par $\Delta\ell = \alpha\, \ell\, \Delta T$. Pour l'acier, le coefficient de dilatation linéaire vaut $1{,}27 \times 10^{-5}$ K^{-1}. La variation de longueur est donc égale à :

$$\Delta\ell = (1{,}27 \times 10^{-5}\ \text{K}^{-1})\ (30\ \text{m})\ [(-20\,°\text{C}) - (0\,°\text{C})] = -7{,}62 \times 10^{-3}\ \text{m}.$$

---

6 La surface initiale vaut $A = (0{,}5\ \text{m})\ (2{,}5\ \text{m}) = 1{,}25\ \text{m}^2$. La variation de surface se calcule par $\Delta A = 2\, \alpha\, A\, \Delta T$ et vaut :

$$\Delta A = 2\ (1{,}27 \times 10^{-5}\ \text{K}^{-1})\ (1{,}25\ \text{m}^2)\ [(40\,°\text{C}) - (0\,°\text{C})] = 1{,}27 \times 10^{-3}\ \text{m}^2.$$

---

7 La longueur du diamètre de l'anneau varie avec la température. Si la bille passe à travers l'anneau à la température de 250 °C, appelons ℓ_{250} le diamètre de la bille à cette température, soit $\ell_{250} = 3 \times 10^{-2}$ m. Le changement de longueur subi est égal à $\Delta\ell = \ell_{250} - \ell_{20} = \alpha\, \ell_{20}\, \Delta T = (1{,}27 \times 10^{-5}\ \text{K}^{-1})\, \ell_{20}\ [(250 - 20)\ \text{K}]$. En résolvant cette équation, on trouve $\ell_{20} = 0{,}02991$ m soit 2,991 cm.

---

8 L'eau devrait être initialement à 0 °C. En subissant la première augmentation de température de 0 °C à 4 °C, l'eau se contracte d'un volume ΔV. Pendant la seconde augmentation, de 4 °C à 8 °C, l'eau se dilate d'un même volume ΔV puisque cette variation volumique ne dépend que de l'écart en température. Au total donc, l'eau ne subit aucune variation de volume et elle ne déborde pas.

12.2 CHALEUR SPÉCIFIQUE

10 Son énergie interne résulte de la conversion de son énergie potentielle initiale en énergie cinétique au sol. Elle vaut donc $\Delta Q = m\, g\, h = m\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (20\ \text{m})$. On peut déterminer la variation de température subie par l'apport de cette énergie :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$\Delta T = \Delta Q / (c\ m) = (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (20\ \text{m}) / (2{,}089\ \text{kJ kg}^{-1}\ \text{K}^{-1}) = 93{,}8 \times 10^{-3}\ \text{K}.$

11 La chaleur apportée par l'eau ajoutée est égale à :

$$\Delta Q = c\ m\ \Delta T = (4{,}169\ \text{kJ kg}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (2{,}5\ \text{kg})\ (10\ \text{K}) = 104{,}2\ \text{kJ}.$$

Cette quantité de chaleur profite au récipient dont la température augmente suivant $\Delta Q = c_r\ m_r\ \Delta T$. On trouve que la chaleur spécifique par unité de masse du récipient vaut $c_r = (104{,}2\ \text{kJ}) / [(0{,}6\ \text{kg})\ (70\ \text{K})] = 2{,}48\ \text{kJ kg}^{-1}\ \text{K}^{-1}$.

12 L'énergie thermique sert à augmenter la température du calorimètre et de l'échantillon suivant la relation $\Delta Q = c\ m\ \Delta T + c_c\ m_c\ \Delta T$. On calcule :

$$\begin{aligned} c &= (\Delta Q - c_c\ m_c\ \Delta T) / (m\ \Delta T) \\ &= [(2{,}45\ \text{kJ}) - (0{,}63\ \text{kJ kg}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (0{,}4\ \text{kg})\ (4\ \text{K})] / [(0{,}55\ \text{kg})\ (4\ \text{K})] \\ &= 655{,}4\ \text{J kg}^{-1}\ \text{K}^{-1}. \end{aligned}$$

12.3 LES CHANGEMENTS DE PHASE

15 La température du point de fusion de la glace est 0 °C. Il faut donc une quantité de chaleur suffisante pour amener le bloc de glace de – 10 °C à 0 °C et pour provoquer le changement de phase. Il faut donc :

$$\begin{aligned} \Delta Q &= c\ m\ \Delta T + L_f\ m \\ &= (2{,}089\ \text{kJ kg}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (10\ \text{kg})\ (10\ \text{K}) + (333\ \text{kJ kg}^{-1})\ (10\ \text{kg}) \\ &= 3{,}539 \times 10^3\ \text{kJ}. \end{aligned}$$

16 La chaleur fournie sert à augmenter la température de l'eau et à l'évaporer. Il faut :

$$\begin{aligned} \Delta Q &= c\ m\ \Delta T + L_V\ m \\ &= (4{,}169\ \text{kJ kg}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (1\ \text{kg})\ (80\ \text{K}) + (2255\ \text{kJ kg}^{-1})\ (1\ \text{kg}) \\ &= 2{,}588 \times 10^3\ \text{kJ}. \end{aligned}$$

17 (a) Si l'on suppose que la glace commence à fondre, on fait l'hypothèse que la température finale est 0 °C. La quantité de chaleur apportée vaudrait donc :

$$\Delta Q = c\ m\ \Delta T = (4{,}169\ \text{kJ kg}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (0{,}25\ \text{kg})\ (20\ \text{K}) = 20{,}845\ \text{kJ}.$$

Pour que la glace fonde complètement, il faudrait que l'énergie fournie soit égale à :

$$\Delta Q = L_f\ m = (333\ \text{kJ kg}^{-1})\ (0{,}15\ \text{kg}) = 49{,}95\ \text{kJ}.$$

La quantité de chaleur apportée par l'eau à 20 °C est donc insuffisante pour faire fondre la glace entièrement et (b) la température finale est égale à 0 °C.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

12.4 LA CONDUCTION DE LA CHALEUR

20 Sachant que la conductivité thermique du bois vaut $\kappa = 0{,}08\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1}$, on calcule le taux de perte de chaleur :

$$H = \kappa A\, \Delta T / \ell = (0{,}08\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (12\ \text{m}^2)\ (20\ \text{K}) / (0{,}05\ \text{m}) = 384\ \text{W}.$$

---

22 La conductivité thermique du bois vaut $\kappa = 0{,}08\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1}$; on calcule le flux de conduction de chaleur par :

$$H = \kappa A\, \Delta T / \ell = (0{,}08\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (25\ \text{m}^2)\ (30\ \text{K}) / (0{,}1\ \text{m}) = 600\ \text{W}.$$

---

26 En utilisant la *valeur R*, on peut calculer la conductivité thermique du matériau : $\kappa = \ell$ / (*valeur R*) = $(0{,}01\ \text{m}) / (0{,}2\ \text{m}^2\ \text{K W}^{-1}) = 0{,}05\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1}$. La différence de température se calcule ensuite par :

$$\Delta T = H\, \ell / (\kappa A) = (50\ \text{W})\ (0{,}01\ \text{m}) / [(0{,}05\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (1\ \text{m}^2)] = 10\ \text{K}.$$

---

27 Comme les *valeurs R* sont additives, la *valeur R* résultante vaut :

$$\ell / \kappa = [(0{,}002\ \text{m}) / (400\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1})] + [(0{,}02\ \text{m}) / (0{,}04\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1})]$$
$$= 500{,}005 \times 10^{-3}\ \text{m}^2\ \text{K W}^{-1}.$$

Le flux de chaleur se transmet intégralement à travers les différentes couches. On peut écrire $H_{resultant} = H_{feutre}$ et donc :

$$(65\ \text{K}) / (500{,}005 \times 10^{-3}\ \text{m}^2\ \text{K W}^{-1})$$
$$= (T_f - 15) / [(0{,}02\ \text{m}) / (0{,}04\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1})].$$

T_f vaut 79,999 °C.

12.5 TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION

28 Le flux de chaleur échangée par convection se calcule par $H = q\, A\ \Delta T$. Il vaut $H = (7{,}1\ \text{W m}^{-2}\ \text{K}^{-1})\ (1{,}4\ \text{m}^2)\ (30\ \text{K}) = 298{,}2\ \text{W}$.

---

29 Par la relation entre la différence de température et la chaleur perdue par convection, on peut écrire $\Delta T = (31 - T) = H / (q\, A)$ et calculer :

$$T = (31\ °\text{C}) - (128\ \text{W}) / [(7{,}1\ \text{W m}^{-2}\ \text{K}^{-1})\ (1{,}8\ \text{m}^2)] = 20{,}98\ °\text{C}.$$

---

31 Le tableau 12.5 indique qu'en cas de vent à $20\ \text{km h}^{-1}$, la température effective descend de – 10 °C à – 20 °C. Comme les coefficients q et les aires sont identiques, le rapport des énergies dissipées est égal au rapport des différences de températures, soit $H_2 / H_1 = \Delta T_2 / \Delta T_1 = (30\ \text{K}) / (20\ \text{K}) = 1{,}5$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

12.6 LE RAYONNEMENT

32 La longueur d'onde à laquelle le rayonnement est le plus intense est donnée par la loi de Wien : $\ell = B / T = (2{,}898 \times 10^{-3}\ \text{m K}) / (310\ \text{K}) = 9{,}35 \times 10^{-6}\ \text{m}$.

---

37 La puissance perdue par rayonnement se calcule par $H_1 - H_2$ si H_1 est la puissance émise par la surface extérieure et H_2 celle du milieu ambiant. Sa grandeur est égale à :

$$e\,\sigma\,A\,(T_1^4 - T_2^4) = (1)(0{,}12\ \text{m}^2)(5{,}67 \times 10^{-8}\ \text{W m}^{-2}\text{K}^{-4})\,[(353\ \text{K})^4 - (293\ \text{K})^4]$$
$$= 55{,}5\ \text{W}.$$

---

38 La puissance émise par la route, par unité de surface vaut :

$$H_{ray} / A = e\,\sigma\,T^4 = (1)\,(5{,}67 \times 10^{-8}\ \text{W m}^{-2}\ \text{K}^{-4})\,(320\ \text{K})^4 = 594{,}5\ \text{W m}^{-2}.$$

En faisant la différence avec la puissance rayonnée par le Soleil, on détermine la puissance thermique absorbée par la route, par mètre carré :

$$H_{abs} = (700\ \text{W m}^{-2}) - (594{,}5\ \text{W m}^{-2}) = 105{,}5\ \text{W m}^{-2}.$$

SOLUTION DES PROBLÈMES

39 (a) L'accroissement de longueur se calcule par :

$$\Delta\ell = \alpha\,\ell\,\Delta T = (1{,}27 \times 10^{-5}\ \text{K}^{-1})\,(1{,}22\ \text{m})\,(20\ \text{K}) = 3{,}10 \times 10^{-4}\ \text{m}.$$

(b) La longueur à parcourir par l'extrémité de la tige augmente; il lui faudra donc plus de temps pour faire un tour de l'horloge : elle retarde donc. (c) Si l'on indice par 1 les variables qui se rapportent à la longueur initiale ℓ et par 2 celles qui se rapportent à la tige dilatée, on évalue :

$$(f_1 - f_2) / f_1 = 1 - [\ell^{1/2} / (\ell + \Delta\ell)^{1/2}] = 1{,}27 \times 10^{-4}$$

(en utilisant la définition de la fréquence d'oscillation $f = (g / \ell)^{1/2} / (2\,\pi)$). (d) Un tour d'horloge, $2\,\pi\,\ell$, est effectué en 3600 s. Le nouveau tour, $2\,\pi\,(\ell + \Delta\ell)$ sera effectué en (3600 s) $(\ell + \Delta\ell) / \ell$ soit 3600,9 s. Par 24 heures, l'horloge retardera donc de (24) [(3600,9 s) – (3600 s)] = 22 s.

---

41 (a) En partant de la relation $\Delta V = \beta\,V\,\Delta T$, on déduit l'expression de :

$$\beta = \Delta V / (V\,\Delta T).$$

La loi d'état des gaz parfaits nous permet d'écrire $V = n\,R\,T / p$ et $\Delta V = n\,R\,\Delta T / p$ quand la pression est constante. En remplaçant V et ΔV dans l'expression de β, on trouve que $\beta = 1 / T$. (b) Le coefficient β vaut $1 / (293\ \text{K}) = 3{,}41 \times 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

42 Une masse m d'eau voit son énergie potentielle $m\ g\ h$ transformée en énergie thermique $c\ m\ \Delta T$. La différence de température vaut donc :

$$(g\ h) / c = (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (30\ \text{m}) / (4{,}169 \times 10^3\ \text{J kg}^{-1}\ \text{K}^{-1}) = 70{,}5 \times 10^{-3}\ \text{K}.$$

---

44 (a) On calcule l'accroissement de longueur par :

$$\Delta\ell = \alpha\ \ell\ \Delta T = (1{,}27 \times 10^{-5}\ \text{K}^{-1})\ (2\ \text{m})\ (100\ \text{K}) = 2{,}54 \times 10^{-3}\ \text{m}.$$

(b) En utilisant la définition du module de Young $\sigma = E\ \varepsilon$, de l'effort $\sigma = F / A$ et de la déformation $\varepsilon = \Delta\ \ell / \ell$, on peut écrire $F / A = E\ \Delta\ell / \ell$. On calcule donc :

$$F = E\ A\ \Delta\ \ell / \ell = (2 \times 10^{11}\ \text{N m}^{-2})\ (1 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)\ (2{,}54 \times 10^{-3}\ \text{m}) / (2\ \text{m})$$
$$= 254 \times 10^3\ \text{N}.$$

---

46 Pour que la balle de plomb fonde, il faut lui fournir $\Delta Q = L_f\ m$ où L_f est la chaleur latente de fusion du plomb. Cette énergie doit provenir de l'énergie cinétique de la balle. On écrit donc $m\ v^2 / 2 = L_f\ m$ et on calcule $v = (2\ L_f)^{1/2} = 221{,}4\ \text{m s}^{-1}$.

---

47 Dans la zone de 30 K à 40 K, la chaleur spécifique molaire à volume constant vaut $C_V = (3/2)\ R$; dans la zone de 260 K et 270 K, elle vaut $(5/2)\ R$ (Fig. 12.6). Dans ces deux régions, les chaleurs spécifiques valent donc respectivement :

$$c_V = (3/2)\ R / (2 \times 10^{-3}\ \text{kg mole}^{-1}) \text{ et } c_V = (5/2)\ R / (2 \times 10^{-3}\ \text{kg mole}^{-1}).$$

Dans le cas (a), on calcule :

$$\Delta Q = c_V\ m\ \Delta T$$
$$= [(3/2)\ (8{,}31\ \text{J K}^{-1}\ \text{mole}^{-1}) / (2 \times 10^{-3}\ \text{kg mole}^{-1})]\ (1\ \text{kg})\ (10\ \text{K})$$
$$= 62{,}4\ \text{kJ}.$$

Pour (b), on calcule :

$$\Delta Q = [(5/2)\ (8{,}31\ \text{J K}^{-1}\ \text{mole}^{-1}) / (2 \times 10^{-3}\ \text{kg mole}^{-1})]\ (1\ \text{kg})\ (10\ \text{K})$$
$$= 104\ \text{kJ}.$$

---

49 A une mole d'azote, soit à une masse de $m = 2\ (14{,}0067\ \text{g}) = 28{,}0134 \times 10^{-3}\ \text{kg}$, il faut fournir $\Delta Q = L_f\ m = (25{,}5 \times 10^3\ \text{J kg}^{-1})\ (28{,}0134 \times 10^{-3}\ \text{kg}) = 714\ \text{J}$.

---

51 (a) (b) Comme les *valeurs* $R = \ell / \kappa$ sont additives, elle vaut, pour le système,

$$R = (2 \times 10^{-3}\ \text{m}) / (79\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1}) + (5 \times 10^{-3}\ \text{m}) / (400\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1})$$
$$= 37{,}82 \times 10^{-6}\ \text{m}^2\ \text{K W}^{-1}.$$

On calcule alors le flux de chaleur transmis par conduction par :

$$H = A\ \Delta T / R = (0{,}04\ \text{m}^2)\ (3\ \text{K}) / (37{,}82 \times 10^{-6}\ \text{m}^2\ \text{K W}^{-1}) = 3{,}173 \times 10^3\ \text{W}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Comme le flux de chaleur est identique dans la couche d'acier et dans celle de cuivre, on peut utiliser sa valeur pour calculer la température à l'interface : $H = \kappa_{acier}\, A\, (T_f - 373) / \ell_{acier}$ et on détermine :

$$T_f = (373\ \text{K}) + (3{,}173 \times 10^3\ \text{W})\ (2 \times 10^{-3}\ \text{m}) / [(79\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (0{,}04\ \text{m}^2)]$$
$$= 375\ \text{K, soit } 102\,^\circ\text{C}.$$

---

52 (a) Le flux de chaleur se calcule par :

$$H = \kappa\, A\, \Delta T / \ell$$
$$= (0{,}08\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (20\ \text{m}^2)\ (40\ \text{K}) / (3 \times 10^{-2}\ \text{m})$$
$$= 2{,}133 \times 10^3\ \text{W}.$$

(b) Comme les *valeurs R* d'un système sont additives, on calcule la *valeur R* équivalente : $(\ell / \kappa)_{bois} + (\ell / \kappa)_{laine} = 1{,}375\ \text{m}^2\ \text{K W}^{-1}$. On évalue ensuite le flux de chaleur par $H = A\ \Delta T / R = (20\ \text{m}^2)\ (40\ \text{K}) / (1{,}375\ \text{m}^2\ \text{K W}^{-1}) = 582\ \text{W}$, soit 582 J par seconde.

---

53 On peut calculer la puissance thermique fournie à l'eau :

$$H = \Delta Q / t = L_V\, m / t = (2255 \times 10^3\ \text{J kg}^{-1})\ (0{,}05\ \text{kg}) / [3\ (60\ \text{s})] = 626{,}4\ \text{W}.$$

On trouve la température de la surface extérieure par $H = \kappa\, A\, (T_f - 100\,^\circ\text{C}) / \ell$. En résolvant cette équation, on détermine :

$$T_f = (100\,^\circ\text{C}) + (626{,}4\ \text{W})\ (1 \times 10^{-2}\ \text{m}) / [(79\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (0{,}1\ \text{m}^2)]$$
$$= 100{,}8\,^\circ\text{C}.$$

---

54 (a) Pour calculer le flux de chaleur qui se dégage par conduction, il est nécessaire de connaître la surface de l'objet. On l'obtient en additionnant la surface des 6 faces, soit :

$$2\ (0{,}3\ \text{m})\ (0{,}5\ \text{m}) + 2\ (0{,}3\ \text{m})\ (0{,}35\ \text{m}) + 2\ (0{,}5\ \text{m})\ (0{,}35\ \text{m}) = 0{,}685\ \text{m}^2.$$

On évalue :

$$H = \kappa\, A\, \Delta T / \ell = (0{,}04\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (0{,}685\ \text{m}^2)\ (35\ \text{K}) / (2 \times 10^{-2}\ \text{m})$$
$$= 47{,}95\ \text{W}.$$

(b) En une heure, l'énergie transmise vaut :

$$\Delta Q = (47{,}95\ \text{W})\ (3600\ \text{s}) = 172{,}6 \times 10^3\ \text{J}$$

et elle sert à faire fondre la glace. La masse de glace fondue se calcule grâce à $\Delta Q = L_f\, m$ et on détermine :

$$m = \Delta Q / L_f = (172{,}6 \times 10^3\ \text{J}) / (333 \times 10^3\ \text{J kg}^{-1}) = 0{,}518\ \text{kg}.$$

---

58 (a) La puissance émise par rayonnement, par unité de surface du Soleil, est égale à :

$$H / A = e\, \sigma\, T^4 = (1)\ (5{,}67 \times 10^{-8}\ \text{W m}^{-2}\ \text{K}^{-4})\ (6000\ \text{K})^4 = 73{,}5 \times 10^6\ \text{W m}^{-2}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(b) Toute la puissance émise à la surface du Soleil, soit $(H / A)\ 4\ \pi\ R_S^2$ se redistribue sur une surface $4\ \pi\ R_T^2$ à distance R_T du Soleil. On a donc, par unité de surface de l'atmosphère terrestre, une puissance égale à :

$$(H / A)\ R_S^2 / R_T^2 = (73{,}5 \times 10^6\ \text{W m}^{-2})\ [(1{,}39 \times 10^6\ \text{km}) / 2]^2 / (1{,}49 \times 10^8\ \text{km})^2$$
$$= 1{,}599 \times 10^3\ \text{W m}^{-2}.$$

---

60 La définition du flux maximum de chaleur dégagée par conduction permet de calculer $T = (34\,°\text{C}) - (84\ \text{W})\ (0{,}03\ \text{m}) / [(0{,}04\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (1{,}2\ \text{m}^2)] = -18{,}5\,°\text{C}$.

---

61 On additionne la puissance thermique rayonnée à celle issue de la convection $H_c = q\,A\,\Delta T = (9{,}5\ \text{W m}^{-2}\ \text{K}^{-1})\ 2\ (0{,}15\ \text{m}^2)\ (10\ \text{K}) = 28{,}5\ \text{W}$, soit une puissance totale de $(20\ \text{W}) + (28{,}5\ \text{W}) = 48{,}5\ \text{W}$. L'énergie fournie à la glace en une minute vaut donc $\Delta Q = H\,t = (48{,}5\ \text{W})\ (60\ \text{s}) = 2910\ \text{J}$ et elle sert à faire fondre :

$$m = \Delta Q / L_f = (2910\ \text{J}) / (333\ \text{kJ kg}^{-1}) = 8{,}739 \times 10^{-3}\ \text{kg de glace.}$$

---

64 Par heure, l'énergie thermique perdue vaut :

$$\Delta Q = H\ (3600\ \text{s}) = [\kappa\ A\ \Delta T / \ell]\ (3600\ \text{s})$$
$$= [(0{,}8\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ (1\ \text{m}^2)\ (10\ \text{K}) / (3 \times 10^{-3}\ \text{m})]\ (3600\ \text{s})$$
$$= 9{,}6 \times 10^6\ \text{J}.$$

La quantité de mazout nécessaire est donnée par (1 l) :

$$(9{,}6 \times 10^6\ \text{J}) / (3{,}846 \times 10^7\ \text{J}) = 0{,}25\ \text{l}.$$

Le coût du processus est donc de : $(0{,}25\ \text{l})\ (39{,}6\ \text{cents l}^{-1}) = 9{,}9\ \text{cents}$.

---

65 (a) La chaleur transmise par conduction dans l'épaisseur du cuivre est égale à celle qui se dégage par convection. On peut donc écrire $\kappa\ A\ \Delta T_1 / \ell = q\ A\ \Delta T_2$ où $\Delta T_1 = (80\,°\text{C}) - T$ et $\Delta T_2 = T - (20\,°\text{C})$. En résolvant l'équation par rapport à T, on trouve $T = 79{,}996\,°\text{C}$. (b) La puissance perdue par conduction vaut $H = \kappa\ A\ \Delta T / \ell$ où $A = 2\ \pi\ r\ L = 2\ \pi\ (1 \times 10^{-2}\ \text{m})\ (2\ \text{m})$. On trouve alors :

$$H = (400\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1})\ 2\ \pi\ (1 \times 10^{-2}\ \text{m})\ (2\ \text{m})\ (0{,}004\ \text{K}) / (2 \times 10^{-3}\ \text{m})$$
$$\cong 100\ \text{W}.$$

---

66 Le flux de chaleur échangée par convection est le même à travers les deux couches; on peut écrire $(T_2 - T) / R_1 = (T - T_1) / R_2$. On trouve alors l'expression de $T = (T_2\ R_2 + T_1\ R_1) / (R_1 + R_2)$. Le flux de chaleur à travers le système est aussi égal au flux à travers chacune des couches. On exprime ceci par :

$$(T_2 - T_1) / R = (T_2 - T) / R_1.$$

On remplace T par son expression et l'on trouve que $R = R_1 + R_2$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

67 La puissance perdue par évaporation de la sueur s'exprime par $H_S = D_S\, r$ où D_S est une constante dont la valeur est $D_S = 674$ W h kg^{-1} et r est le débit de sueur exprimé en kg par heure. On calcule :

$$r = H_S / D_S = (175 \text{ W}) / (674 \text{ W h kg}^{-1}) = 0{,}260 \text{ kg h}^{-1}.$$

---

68 (a) La puissance absorbée se calcule par :

$$H = e\,\sigma\,A\,T^4 = (1)\,(5{,}67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4})\,(1{,}5 \text{ m}^2)\,(358 \text{ K})^4 = 1397 \text{ W}.$$

(b) La puissance perdue par rayonnement vaut :

$$D_r\,A\,(T_e - T_a) = (6{,}5 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1})\,(1{,}5 \text{ m}^2)\,[(85\,^\circ\text{C}) - (40\,^\circ\text{C})] = 439 \text{ W}.$$

(c) Le reste de la puissance absorbée est perdu par évaporation de la sueur, soit $H_S = (1397 \text{ W}) - (439 \text{ W}) = 958$ W. On calcule le débit de sueur :

$$r = H_S / D_S = (958 \text{ W}) / (674 \text{ W h kg}^{-1}) = 1{,}42 \text{ kg h}^{-1}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 13

La mécanique des fluides non visqueux

RAPPELS

L'hypothèse essentielle faite dans ce chapitre est qu'il n'existe pas de forces de frottement entre les couches d'un fluide en déplacement les unes par rapport aux autres. Ceci est vrai pour les fluides au repos et pour les fluides parfaits (non visqueux) en mouvement que nous considérons ici. La seconde hypothèse est que le fluide est incompressible.

Le principe d'Archimède exprime que tout corps plongé dans un fluide subit de la part de ce fluide une force ou poussée dirigée vers le haut égale au poids de fluide déplacé. Mathématiquement, ce principe s'écrit $B = \rho_0\, g\, V$ où ρ_0 est la masse volumique de fluide et V le volume immergé de l'objet.

L'équation de continuité exprime qu'il y a conservation du débit Q c'est-à-dire que la quantité de fluide entrant dans un tube est égale à la quantité qui en sort. Comme le débit est égal au produit de la vitesse v par la section droite A du conduit, l'équation de continuité prend la forme $A_1\ v_1 = A_2\ v_2$. A condition de l'écrire en termes de vitesse moyenne, cette équation reste valable lorsqu'on se trouve dans la situation où les couches de fluide à proximité des parois du tube se déplacent moins vite que celles de la région centrale.

Le théorème de Bernoulli s'écrit $p_a + \rho\, g\, y_a + \rho\, v_a^2 / 2 = p_b + \rho\, g\, y_b + \rho\, v_b^2 / 2$ et exprime que la somme de la pression et de l'énergie mécanique par unité de volume est constante tout le long d'un tube de courant. Il est valable dans les conditions suivantes : le fluide doit être incompressible, non visqueux, l'écoulement laminaire et non turbulent et le régime d'écoulement stationnaire. Si le fluide est au repos, la pression à une hauteur h du fluide est égale à la pression à la surface libre augmentée de la quantité $\rho\, g\, h$. Par conséquent, la pression est la même en tous les points situés à une même profondeur. On désigne par p la pression absolue alors que la différence entre p et la pression atmosphérique est la pression de jauge.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

SOLUTION DES EXERCICES

13.1 LE PRINCIPE D'ARCHIMÈDE

2 La différence entre les deux poids est due à la poussée d'Archimède exercée par l'eau. On peut calculer le volume de l'objet par :

$$B = (100\ \text{N}) - (75\ \text{N}) = 25\ \text{N} = \rho_{eau}\ g\ V.$$

On déduit $V = (25\ \text{N}) / [(1000\ \text{kg m}^{-3})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})] = 2{,}551 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$. La masse volumique de l'objet vaut donc :

$$\rho = (100\ \text{N}) / [(2{,}551 \times 10^{-3}\ \text{m}^3)\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})] = 4000\ \text{kg m}^{-3}.$$

La densité, définie par le rapport de la masse volumique de l'objet à la masse volumique de l'eau, est égale à 4.

---

3 Le poids du saumon se trouve réduit de la grandeur de la poussée d'Archimède mais cette force est associée à une réaction du poisson sur l'eau, égale à celle associée à l'eau que le saumon remplace. Au total donc, on retrouve, sur la balance, $[(200\ \text{N}) + B] + [(12\ \text{N}) - B]$, soit 212 N.

---

5 La densité, rapport de la masse volumique de l'objet à la masse volumique de l'eau, permet de déterminer $\rho = 800\ \text{kg m}^{-3}$. Connaissant la masse de la bûche, on en calcule son volume : $V = m / \rho = (40\ \text{kg}) / (800\ \text{kg m}^{-3}) = 0{,}05\ \text{m}^3$. La poussée d'Archimède s'exerce sur la partie immergée de l'objet. A l'équilibre, on peut donc écrire $\rho_0\ g\ V_i = \rho\ g\ V$ et déterminer :

$$V_i = (800\ \text{kg m}^{-3})\ (0{,}05\ \text{m}^3) / (1000\ \text{kg m}^{-3}) = 0{,}04\ \text{m}^3.$$

Le volume qui émerge vaut donc $0{,}01\ \text{m}^3$.

13.2 L'EQUATION DE CONTINUITÉ ; L'ÉCOULEMENT LAMINAIRE

6 L'équation de continuité permet de calculer le débit dans la section large du tube $Q_1 = \pi\ r_1^2\ v_1$ et de l'égaler au débit dans la partie étroite. On détermine alors $v_2 = v_1\ r_1^2 / r_2^2 = (3\ \text{m s}^{-1})\ [(0{,}2\ \text{m}) / (0{,}1\ \text{m})]^2 = 12\ \text{m s}^{-1}$.

---

8 Par la conservation du débit, on peut écrire que le débit Q_1 dans le vaisseau large est égal à quatre fois le débit Q_2 dans un vaisseau étroit. On exprime alors $\pi\ r^2\ v = 4\ \pi\ (r / 3)^2\ v_2$ et on déduit $v_2 = 9\ v / 4$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

13.3 LE THÉORÈME DE BERNOULLI

9 Non, une des hypothèses d'application du théorème de Bernoulli est que l'écoulement soit laminaire, ce qui n'est pas le cas dans l'écoulement de l'eau dans les rapides.

---

11 La pression diminue lorsque le fluide s'élève. Ceci est dû au travail qu'il faut effectuer contre la pesanteur. Puisque la section droite des tuyaux reste constante, le débit l'est aussi et la vitesse en deux points différents est identique. Il reste donc du théorème de Bernoulli, $p_a + \rho\, g\, y_a = p_b + \rho\, g\, y_b$. En un point $y_b > y_a$, la pression p_b doit être plus faible que p_a pour maintenir l'égalité.

---

12 (a) Le débit est constant et est donné par $Q = 200$ litres par minute. En unités MKSA, cette quantité est donnée par :

$$Q = (200 \text{ litres})\ (1 \times 10^{-3}\ \text{m}^3\ \text{litre}^{-1}) / (60\ \text{s}) = (1/3) \times 10^{-2}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}.$$

(b) Le débit se définit par le produit de la vitesse du fluide et de la section droite de la conduite d'eau : $Q = A\ v$. Il est constant et permet de calculer la vitesse de l'eau au niveau du sol par $Q = \pi\ r_{sol}^2\ v_{sol}$. Elle vaut $v_{sol} = 4{,}72\ \text{m s}^{-1}$. Cette même définition permet de calculer la vitesse de l'eau à son arrivée sur le toit :

$$v_{toit} = 10{,}6\ \text{m s}^{-1}.$$

Si nous supposons que l'écoulement du fluide est laminaire, nous utilisons le théorème de Bernoulli entre le sol (indice 1) et le toit (indice 2) :

$$P_1 + \rho\, g\, h_1 + \rho\, v_1^2 / 2 = P_2 + \rho\, g\, h_2 + \rho\, v_2^2 / 2.$$

La hauteur h_1 est nulle, les pressions P_1 et P_2 valent respectivement 343350 Pa et 101325 Pa, la vitesse v_1 est la valeur de v_{sol} tandis que v_2 est celle de v_{toit}. On calcule aisément $h_2 = h_{toit} = 20{,}1$ m.

13.4 CONSÉQUENCES STATIQUES DU THÉORÈME DE BERNOULLI

14 Au niveau de la surface de l'eau, la pression est égale à la pression atmosphérique. En profondeur, elle est égale à la pression en surface augmentée de la pression due aux couches de fluide, soit :

$$p = p_{atm} + \rho\, g\, h = (1{,}013 \times 10^5\ \text{Pa}) + (1025\ \text{kg m}^{-3})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (8000\ \text{m})$$
$$= 804{,}6 \times 10^5\ \text{Pa}.$$

La force se calcule par le produit de la pression par la surface sur laquelle elle s'exerce; elle vaut donc :

$$F = p\, A = (804{,}6 \times 10^5\ \text{Pa})\ [(0{,}1\ \text{m})\ (0{,}15\ \text{m})] = 12{,}07 \times 10^5\ \text{N}.$$

---

15 Lorsque la vitesse reste constante, le théorème de Bernoulli se résume à :

$$p + \rho\, g\, h = \text{constante}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Dans le cas de la girafe, on écrit $p_c + \rho\, g\, h_c = p_{cv} + \rho\, g\, h_{cv}$ où l'indice c se rapporte au coeur et cv au cerveau. Puisque $(h_{cv} - h_c) = 2$ m, on peut calculer $(p_c - p_{cv}) = \rho\, g\, (2\text{ m}) = (1059{,}5\text{ kg m}^{-3})\,(9{,}8\text{ m s}^{-2})\,(2\text{ m}) = 20{,}8$ kPa.

---

18 La pression de jauge est la différence entre la pression réelle et la pression atmosphérique. Cette pression vaut :

$$\rho\, g\, h = (1025\text{ kg m}^{-3})\,(9{,}8\text{ m s}^{-2})\,(100\text{ m}) = 10{,}045 \times 10^5\text{ Pa}.$$

---

19 Dans les deux cas, $p = \rho\, g\, h$ où ρ est la masse volumique de la substance constituant la colonne. Comme la pression reste inchangée, on peut écrire :

$$\rho_{eau}\, g\, h_{eau} = \rho_{sol}\, g\, h_{sol}$$

et déterminer :

$$\rho_{sol} = \rho_{eau}\, h_{eau} / h_{sol} = (1000\text{ kg m}^{-3})\,(0{,}7) / (0{,}6) = 1{,}2 \times 10^3\text{ kg m}^{-3}.$$

13.5 LE RÔLE DE LA GRAVITATION DANS LA CIRCULATION SANGUINE

21 La différence de hauteur du cerveau entre la position debout et la position penchée vaut (0,5 m) + (0,4 m), soit 0,9 m. Le changement de pression au niveau du cerveau est égale à :

$$\Delta p = \rho\, g\, h = (1059{,}5\text{ kg m}^{-3})\,(9{,}8\text{ m s}^{-2})\,(0{,}9\text{ m}) = 9{,}34\text{ kPa}.$$

---

23 En subissant une accélération vers la bas, son poids effectif devient :

$$m\,(g - 4\,g) = m\,(-3\,g).$$

Dans le théorème de Bernoulli, g sera donc remplacé par $(-3\,g)$. On obtient :

$$p_{cv} = p_c - \rho\,(-3\,g)\,(h_{cv} - h_c)$$

où la différence de hauteur entre le coeur et le cerveau est typiquement égale à 0,4 m. En utilisant la valeur de la pression $p_c = 13{,}3$ kPa donnée dans le texte, on calcule $p_{cv} = (13{,}3\text{ kPa}) + (1059{,}5\text{ kg m}^{-3})\,(3)\,(9{,}8\text{ m s}^{-2})\,(0{,}4\text{ m}) = 25{,}8$ kPa.

---

24 En subissant une accélération vers la haut, son poids effectif devient :

$$m\,(g + 3\,g) = m\,(4\,g).$$

Dans l'expression du théorème de Bernoulli, on calcule alors, en remplaçant g par $(4\,g)$, $p_{cv} = p_c - \rho\,(4\,g)\,(h_{cv} - h_c)$ et, en utilisant la valeur de p_c donnée dans le texte, on calcule :

$$p_{cv} = (13{,}3\text{ kPa}) - (1059{,}5\text{ kg m}^{-3})\,(4)\,(9{,}8\text{ m s}^{-2})\,(0{,}4\text{ m}) = -3{,}31\text{ kPa}.$$

On peut donc prévoir que le pilote va s'évanouir lors de la manoeuvre.

---

25 Par suite de son accélération, le poids effectif de la personne devient $m\,(g + a)$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Par l'expression du théorème de Bernoulli, en remplaçant g par $(g + a)$, on calcule $p_{cv} = 0 = p_c - \rho\,(g + a)\,(h_{cv} - h_c)$. En utilisant la valeur de p_c donnée dans le texte, on calcule :

$$a = p_c / [(h_{cv} - h_c)\,\rho] - g$$
$$= (13{,}3\text{ kPa}) / [(0{,}4\text{ m})\,(1059{,}5\text{ kg m}^{-3})] - (9{,}8\text{ m s}^{-2}) = -3{,}31\text{ m s}^{-2}.$$

13.6 MESURE DE LA TENSION ARTÉRIELLE AU SPHYGMOMANOMÈTRE

27 Lorsque la personne est couchée, la pression sanguine est pratiquement identique en tout point du corps. En position assise ou debout, la pression sanguine varie d'un endroit à l'autre du corps et une mesure au niveau de la jambe ne reflète pas la grandeur de la pression au niveau du coeur.

13.7 LES DÉBITMÈTRES

29 L'équation de continuité fournit la réponse à la question (b), soit $A_1\,v_1 = A_2\,v_2$ où la surface est circulaire. On calcule donc :

$$v_1 = v_2\,(r_2 / r_1)^2 = (0{,}1\text{ m s}^{-1})\,[(2 \times 10^{-2}\text{ m}) / (1 \times 10^{-2}\text{ m})]^2 = 0{,}4\text{ m s}^{-1}.$$

Le théorème de Bernoulli, appliqué sur une ligne de courant horizontale, permet d'écrire $p_1 + \rho\,v_1^2 / 2 = p_2 + \rho\,v_2^2 / 2$ et de calculer :

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho\,(v_1^2 - v_2^2) / 2$$
$$= (1000\text{ kg m}^{-3})\,[(0{,}4\text{ m s}^{-1})^2 - (0{,}1\text{ m s}^{-1})^2] / 2 = 75\text{ Pa}.$$

30 Considérons la figure 13.13. En négligeant la différence de hauteur entre les points A et B, on peut écrire $p_A - p_B = \rho\,v^2 / 2$, sachant que la vitesse au point A est nulle. Comme les pressions p_C et p_D sont identiques, on détermine :

$$p_A - p_B = (\rho_m - \rho)\,g\,h$$

et en comparant les deux expressions, on déduit que $\rho\,v^2 / 2 = (\rho_m - \rho)\,g\,h$ où ρ est la masse volumique du fluide en mouvement et ρ_m celle du fluide du manomètre. On calcule donc :

$$h = (1/2)\,\rho\,v^2 / [(\rho_m - \rho)\,g]$$
$$= (1/2)\,(1059{,}5\text{ kg m}^{-3})\,(0{,}1\text{ m s}^{-1})^2$$
$$/ \{[(1000\text{ kg m}^{-3}) - (1059{,}5\text{ kg m}^{-3})]\,(9{,}8\text{ m s}^{-2})\}$$
$$= -9{,}1 \times 10^{-3}\text{ m}.$$

31 Aux points 1 et 2, les pressions p sont égales à la pression atmosphérique augmentée de $\rho\,g\,y$. Si on écrit l'expression du théorème de Bernoulli sur une ligne de flux horizontale, on trouve :

$$p_{atm} + \rho\,g\,y_1 + \rho\,v_1^2 / 2 = p_{atm} + \rho\,g\,y_2 + \rho\,v_2^2 / 2$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

avec, par l'équation de continuité, $v_2 = v_1\ (A_1 / A_2)$. En remplaçant alors v_2 par son expression et en simplifiant, on exprime effectivement :

$$g\ (y_1 - y_2) = (1/2)\ v_1^2\ [(A_1 / A_2)^2 - 1].$$

13.8 LE VOL DES ANIMAUX ET DES AVIONS

33 La poussée dynamique F_L est égale au poids W de l'avion. Cette poussée est proportionnelle au carré de la vitesse et à d'autres constantes liées à la forme de l'avion, qui ne change pas. On peut donc écrire $W' / W = v'^2 / v^2$ et calculer :

$$v' = (120\ \text{m s}^{-1})\ [(16000\ \text{kg}) / (9000\ \text{kg})]^{1/2} = 160\ \text{m s}^{-1}.$$

---

35 La masse varie comme le cube d'une longueur caractéristique $m \propto \ell^3$ tandis que, par la loi d'échelle, la vitesse varie comme la racine carrée de cette longueur $v \propto \ell^{1/2}$. La masse est donc proportionnelle à v^6. En effectuant le rapport et en utilisant les données du problème, on peut écrire :

$$(0{,}05\ \text{kg}) / (3{,}2\ \text{kg}) = (6\ \text{m s}^{-1})^6 / v^6$$

et calculer $v = [(3{,}2\ \text{kg})\ (6\ \text{m s}^{-1})^6 / (0{,}05\ \text{kg})]^{1/6} = 12\ \text{m s}^{-1}$.

---

36 Par la loi d'échelle $v \propto \ell^{1/2}$, on effectue le rapport :

$$v / (6\ \text{m s}^{-1}) = [(16\ \text{m}) / (0{,}25\ \text{m})]^{1/2}$$

et on détermine $v = 48\ \text{m s}^{-1}$, soit une vitesse de $173\ \text{km h}^{-1}$, vitesse assez considérable.

SOLUTION DES PROBLÈMES

37 Pour chaque constituant de l'ensemble ainsi que pour le système complet, on peut écrire $W = m\ g - \rho\ g\ V$. Ainsi, pour le plomb seul, on trouve que :

$$m_{Pb}\ g - \rho_{eau}\ g\ V_{Pb} = 130\ \text{N}.$$

On introduit ceci dans l'expression de W pour l'ensemble du système et on obtient $100\ \text{N} = m_{bois}\ g - \rho_{eau}\ g\ V_{bois} + (130\ \text{N})$. Par l'intermédiaire du poids du bois dans l'air, on calcule sa masse et son volume : $V_{bois} = 1{,}22 \times 10^{-2}\ \text{m}^3$. Sa masse volumique est égale à :

$$\rho = m_{bois} / V_{bois} = [(90\ \text{N}) / (9{,}8\ \text{m s}^{-2})] / (1{,}22 \times 10^{-2}\ \text{m}^3) = 750\ \text{kg m}^{-3}.$$

---

38 A partir de la valeur de la densité, on calcule la masse volumique de l'acier, soit $\rho_a = 8000\ \text{kg m}^{-3}$. Lorsque la bille se trouve dans le fluide de masse volumique ρ_f, son mouvement résultant est accéléré. Comme elle est soumise à son poids

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

et à la poussée d'Archimède, on peut écrire $m\,a = m\,g - \rho_f\,g\,V$ où m se calcule par $m = \rho_a\,V$. On détermine l'accélération par :

$$a = g\,(\rho_a - \rho_f) / \rho_{acier} = g\,(1 - \rho_f / \rho_a).$$

(a) Dans l'eau, a vaut :

$$(9{,}8\ \text{m s}^{-2})\,[1 - (1000\ \text{kg m}^{-3}) / (8000\ \text{kg m}^{-3})] = 8{,}575\ \text{m s}^{-2},$$

vers le haut. (b) Dans le mercure,

$$a = (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\,[1 - (13600\ \text{kg m}^{-3}) / (8000\ \text{kg m}^{-3})] = -6{,}86\ \text{m s}^{-2},$$

dirigée vers le fond du récipient.

---

42 (a) Dans un tel système, la pression exercée d'un côté du vérin se transmet intégralement vers l'autre côté, de sorte que $F_1 / A_1 = F_2 / A_2$. On calcule donc que $F_1 = F_2\,A_1 / A_2 = (1500\ \text{N})\,(75\ \text{cm}^2) / (1500\ \text{cm}^2) = 75\ \text{N}$. (b) Le volume du fluide déplacé est égal des deux côtés du vérin. Du côté de la section large, le volume déplacé doit être égal à $(15 \times 10^{-2}\ \text{m}^2)\,(0{,}1\ \text{m}) = 15 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$ pour soulever le fauteuil de 0,1 m. Le volume équivalent du côté de la section étroite nécessite un déplacement du piston égal à :

$$(15 \times 10^{-3}\ \text{m}^3) / (75 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) = 2\ \text{m}.$$

---

43 Comme la pression sur une surface horizontale du fluide est identique en tout point, la pression en un point du fond du réservoir est égale à la pression en surface du fluide, augmentée de la pression due aux couches de fluide. On écrit donc $\Delta p = \rho\,g\,h$ et on déduit :

$$\Delta p = (1{,}43\ \text{kg m}^{-3})\,(9{,}8\ \text{m s}^{-2})\,(1\ \text{m})] / (1{,}013 \times 10^5\ \text{Pa atm}^{-1})$$
$$= 1{,}38 \times 10^{-4}\ \text{atm}.$$

---

46 Le théorème de Bernoulli permet d'écrire, au niveau du coeur et des pieds,

$$p_c + \rho\,g\,h_c + \rho\,v_c^2 / 2 = p_p + \rho\,g\,h_p + \rho\,v_p^2 / 2$$

ou encore $p_p - p_c = \rho\,g\,(h_c - h_p) + \rho\,(v_c^2 - v_p^2) / 2$. Si on considère que la vitesse est inchangée, la différence absolue entre les deux grandeurs est égale à $\rho\,(v_c^2 - v_p^2) / 2$. L'erreur relative ER, exprimée en %, se calcule par le rapport de l'erreur absolue et de la valeur exacte de la différence de pression, soit :

$$ER = 100\,[(v_c^2 - v_p^2) / 2] / [g\,(h_c - h_p) + (v_c^2 - v_p^2) / 2]$$
$$= 100\,\{[(0{,}2\ \text{m s}^{-1})^2 - (0{,}01\ \text{m s}^{-1})^2] / 2\} / \{(9{,}8\ \text{m s}^{-2})\,(1{,}3\ \text{m})$$
$$+ [(0{,}2\ \text{m s}^{-1})^2 - (0{,}01\ \text{m s}^{-1})^2] / 2\}$$
$$= 0{,}16\ \%.$$

---

47 Si l'on indice par 1 les grandeurs qui se rapportent à l'extrémité plongée dans le fluide et par 2 celles qui se rapportent à l'extrémité extérieure, on peut écrire, par le théorème de Bernoulli,

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$p_1 + \rho\, g\, h_1 + \rho\, v_1^2 / 2 = p_2 + \rho\, g\, h_2 + \rho\, v_2^2 / 2.$$

Considérons le niveau horizontal d'origine à l'extrémité extérieure du siphon ; la hauteur h_2 est donc nulle. Comme la vitesse du fluide à l'intérieur du récipient, v_1, est nulle, l'équation précédente se réduit à $p_1 + \rho\, g\, h_1 = p_2 + \rho\, v_2^2 / 2$. (a) p_1 est égale à $p_{atm} + \rho\, g$ (0,25 m) et p_2 est la pression atmosphérique. On détermine la vitesse à l'extrémité extérieure du siphon par :

$$v_2 = [2\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{,}75\ \text{m})]^{1/2} = 3{,}83\ \text{m s}^{-1}.$$

(c) La pression p_1 est à présent égale à $p_{atm} + \rho\, g$ (0,1 m) tandis que p_2 reste inchangée. On trouve $v_2 = [2\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{,}6\ \text{m})]^{1/2} = 3{,}43\ \text{m s}^{-1}$. (b) Comme on le voit, la vitesse dans ce siphon dont la section droite ne change pas n'est pas constante et donc le débit ne l'est pas non plus même si l'eau continue à s'écouler tant que le niveau n'a pas baissé de plus de 25 cm.

---

48 (a) Le même développement mathématique que celui utilisé dans l'exercice précédent nous conduit à une vitesse de sortie égale à :

$$v_2 = [2\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{,}5\ \text{m})]^{1/2} = 3{,}13\ \text{m s}^{-1}.$$

(b) Le débit se calcule par :

$$Q = A\, v = (4 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)\ (3{,}13\ \text{m s}^{-1}) = 1{,}25 \times 10^{-3}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}.$$

---

52 Le poids est proportionnel à ℓ^3, la surface à ℓ^2 et la masse volumique est indépendante de ℓ. La puissance varie donc en $[\ell^9 / \ell^2]^{1/2} = \ell^{7/2}$.

---

53 (a) La puissance développée vaut :

$$[W^3 / (2\, \rho\, A)]^{1/2} = \{[(3 \times 10^{-3}\ \text{kg})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})]^3 / [2\ (1{,}2\ \text{kg m}^{-3})\ (3 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)]\}^{1/2}$$
$$= 5{,}9 \times 10^{-2}\ \text{W}.$$

(b) Par kilogramme de muscle, la puissance développée par l'oiseau vaut :

$$(5{,}9 \times 10^{-2}\ \text{W}) / (0{,}75 \times 10^{-3}\ \text{kg}) = 79{,}2\ \text{W kg}^{-1},$$

soit une grandeur tout à fait comparable à celle développée par un muscle humain.

---

54 Le volume et le poids sont proportionnels à r^3 et donc à $\ell^{9/2}$; la surface, elle, varie en r^2, soit en ℓ^3. La poussée dynamique variant comme $A\, v^2$ est proportionnelle à $\ell^3\, v^2$ et, égale au poids de l'oiseau, elle varie aussi en $l^{9/2}$. On détermine alors que $\ell^3\, v^2 \propto l^{9/2}$ et donc que $v \propto \ell^{3/2}$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre **14**

Écoulement des fluides visqueux

RAPPELS

La déformation d'un fluide fait apparaître de la chaleur, comme si les particules qui le composent subissaient des frottements. Un fluide capable de dissiper de cette façon son énergie cinétique est un fluide *visqueux*. Considérons deux lames planes, d'aire A, séparées par un film lubrifiant d'épaisseur Δy. Si l'on veut faire glisser l'une des lames par rapport à l'autre et lui conserver une vitesse constante Δv, il est nécessaire de lui appliquer une force F proportionnelle à Δv, à l'aire A des surfaces en contact, et inversement proportionnelle à l'épaisseur du film de fluide. On écrit $F = \eta A \, \Delta v / \Delta y$, définissant ainsi le coefficient de viscosité η du fluide. Celui-ci s'exprime en Pa s, et le tableau 14.1 de la page 369 du livre fournit les valeurs nécessaires à la résolution des exercices de ce chapitre.

Le débit d'un fluide dans une canalisation de section droite A est le volume de fluide s'écoulant, par unité de temps, à travers cette section. Généralement, la vitesse du fluide n'est pas uniforme sur la section de la canalisation : la vitesse du fluide est nulle sur la paroi interne et maximale au centre de la section circulaire, sur l'axe du tube. On montre que le débit Q est égal au produit de la vitesse moyenne du fluide sur la section droite et de l'aire A de celle-ci : $Q = v_{moy} \, A$. Pour une canalisation cylindrique, on peut montrer de plus que la vitesse maximale du fluide, atteinte sur l'axe, est le double de la vitesse moyenne : $v_{max} = 2 \, v_{moy}$.

Pour qu'un fluide reste en mouvement dans une canalisation, il est nécessaire de maintenir entre les extrémités de celle-ci une différence de pression Δp, aussi appelée *perte de charge*. La loi de Poiseuille indique que le débit Q observé dans une canalisation est proportionnel à la perte de charge Δp. On écrit que $\Delta p = R_f \, Q$, où R_f est la résistance du fluide dans la canalisation. Si la section est circulaire,

$$R_f = 8 \, \eta \, \ell / \pi \, R^4,$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

où ℓ est la longueur de la canalisation, R son rayon intérieur et η le coefficient de viscosité du fluide. Ces résultats ne s'appliquent qu'en cas d'écoulement laminaire. Un écoulement (dans un tube de rayon R) est laminaire lorsque le nombre de Reynolds, $N_R = 2\,\rho\,v_{moy}\,R\,/\,\eta$, est inférieur à 2000. Il est turbulent lorsque N_R prend des valeurs supérieures à 3000 et il est instable dans les autres cas.

La connaissance de la perte de charge Δp et du débit Q suffisent pour déterminer la puissance P dissipée par le fluide en mouvement dans la canalisation. On montre en effet que $P = \Delta p\,Q$.

Les forces de résistance visqueuse qui s'appliquent à un objet en mouvement dans un fluide augmentent avec la vitesse de l'objet. La loi est toutefois différente pour les "hautes" et "basses" vitesses. On peut distinguer les deux régimes en utilisant le nombre de Reynolds. Pour une sphère de rayon R se déplaçant à vitesse v dans un fluide de masse volumique ρ_0, ce nombre vaut $N_R = \rho_0\,v\,R\,/\,\eta$. La vitesse est considérée comme "basse" si $N_R < 1$ et "élevée" si $N_R > 1$. A basse vitesse, la force de résistance visqueuse s'exprime par la loi de Stokes $F_R = \phi\,\eta\,R\,v$, où ϕ est un facteur numérique sans dimension ($\phi = 6\,\pi$ pour un objet sphérique de rayon R). A haute vitesse, la force de résistance est proportionnelle au carré de la vitesse de l'objet, ce qu'on exprime par la relation $F_R = C_x\,A\,\rho_0\,v^2\,/\,2$. Dans cette expression, A est l'enveloppe des sections droites de l'objet, prises perpendiculairement au mouvement ($\pi\,R^2$ pour un objet sphérique de rayon R), ρ_0 est la masse volumique du fluide et C_x est un coefficient dépendant de la forme de l'objet (normalement mesuré par l'expérience, éventuellement sur des modèles réduits).

La centrifugation permet d'accélérer la sédimentation de particules placées en suspension dans un liquide visqueux. Dans une centrifugeuse, il est possible de simuler des pesanteurs bien supérieures à la pesanteur terrestre, l'accélération g étant remplacée par l'accélération centrifuge $g^e = \omega^2\,r$. La vitesse de sédimentation v_s pour une particule de masse m et de masse volumique ρ, tombant dans un fluide de viscosité η et de masse volumique ρ_0 vaut

$$v_s = \frac{m\,g^e}{\phi\,R\,\eta}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

Lorsque le coefficient $\phi\,R$ peut être obtenu séparément (par des mesures de diffusion, par exemple), cette relation permet la mesure des masses moléculaires m.

SOLUTION DES EXERCICES

14.1 VISCOSITÉ

1 La vitesse augmente proportionnellement à la distance à la paroi fixe, jusqu'à atteindre la vitesse de la paroi mobile. La vitesse à mi-distance entre la paroi fixe

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

et la paroi mobile vaut donc la moitié de la vitesse de la paroi mobile.

---

2 A froid, une huile de viscosité étudiée pour la température normale du moteur présente une dissipation d'énergie mécanique trop élevée. L'addition de composants lubrifiants moins visqueux diminue les résistances mécaniques aux basses températures.

---

3 La puissance dissipée par la force F qui apparaît du fait de la viscosité est le produit $F\,v$ de la force par la vitesse de son point d'application. La force $F = \eta\, A\, \Delta v / \Delta y$ vaut $(1{,}8 \times 10^{-5}\ \text{Pa s})\ (15\ \text{m}^2)\ (20\ \text{m s}^{-1}) / (0{,}06\ \text{m}) = 0{,}09\ \text{N}$ et la puissance $P = (0{,}09\ \text{N})\ (20\ \text{m s}^{-1}) = 1{,}8\ \text{W}$.

14.2 ÉCOULEMENT LAMINAIRE DANS UN TUBE ANALYSE DIMENSIONNELLE

5 (a) Le débit Q est proportionnel au gradient de pression $\Delta p / \ell$. Suivant la loi de Poiseuille,

$$\begin{aligned} Q &= (\pi R^4 / 8\,\eta)\ (\Delta p / \ell) \\ &= [(\pi / 8)\ (1 \times 10^{-3}\ \text{m})^4 / (2{,}084 \times 10^{-3}\ \text{Pa s})]\ (600\ \text{Pa m}^{-1}) \\ &= 1{,}13 \times 10^{-7}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

(b) La vitesse maximale est liée au débit du fluide par $v_{max} = 2\,Q / A$, où A est la section droite du tube. On calcule donc :

$$v_{max} = 2\ (1{,}13 \times 10^{-7}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}) / [\pi\ (1 \times 10^{-3}\ \text{m})^2] = 0{,}0720\ \text{m s}^{-1}.$$

---

6 La vitesse moyenne est définie de telle façon que le débit s'écrive $Q = v_{moy}\, A$. La vitesse maximale vaut $v_{max} = 2\,Q / A$ et est donc égale au double de la vitesse moyenne. (a) Ici, $v_{max} = 6 \times 10^{-2}\ \text{m s}^{-1}$. (b) Le débit vaut :

$$Q = (3 \times 10^{-2}\ \text{m s}^{-1})\ [\pi\ (2 \times 10^{-3}\ \text{m})^2] = 3{,}77 \times 10^{-7}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}.$$

(c) La loi de Poiseuille lie la perte de pression Δp au débit : $\Delta p = R_v\, Q$, où R_v est la résistance vasculaire. Pour une conduite cylindrique de rayon R,

$$R_v = 8\,\eta\,\ell\,/(\pi R^4).$$

Ici, $R_v = 8\ (2{,}084 \times 10^{-3}\ \text{Pa s})\ (0{,}05\ \text{m}) / [\pi\ (2 \times 10^{-3}\ \text{m})^4] = 16{,}6 \times 10^6\ \text{Pa m}^{-3}\ \text{s}$ et $\Delta p = (16{,}6 \times 10^6\ \text{Pa m}^{-3}\ \text{s})\ (3{,}77 \times 10^{-7}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}) = 6{,}25\ \text{Pa}$.

---

7 (a) La force résultante est la différence entre les forces dues à la pression à chaque extrémité de la canalisation $F = \Delta p\, A = (100\ \text{Pa})\ [\pi\ (1 \times 10^{-2}\ \text{m})^2] = 0{,}0314\ \text{N}$. (b) La puissance moyenne dissipée est la force moyenne multipliée par la vitesse du point d'application : $(0{,}0314\ \text{N})\ (1{,}5 \times 10^{-2}\ \text{m s}^{-1}) = 4{,}71 \times 10^{-4}\ \text{W}$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

9 (a) En cas d'écoulement laminaire, la vitesse moyenne de l'eau est le rapport du débit à la section droite de l'aiguille :

$$v_{moy} = (1 \times 10^{-7}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}) / [\pi\ (0{,}3 \times 10^{-3}\ \text{m})^2] = 0{,}354\ \text{m s}^{-1}.$$

(b) La perte de charge correspondant à ce débit s'obtient à partir de la loi de Poiseuille $\Delta p = R_f\, Q$, où, pour un tube cylindrique,

$$\begin{aligned} R_f &= 8\,\eta\,\ell / (\pi R^4) \\ &= 8\ (1{,}005 \times 10^{-3}\ \text{Pa s})\ (2 \times 10^{-2}\ \text{m}) / [\pi\ (0{,}3 \times 10^{-3}\ \text{m})^4] \\ &= 6{,}32 \times 10^9\ \text{Pa s m}^{-3}. \end{aligned}$$

D'où $\Delta p = (6{,}32 \times 10^9\ \text{Pa s m}^{-3})\ (1 \times 10^{-7}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}) = 632\ \text{Pa}$.

14.3 ÉCOULEMENT TURBULENT

10 (a) Le nombre de Reynolds est égal à :

$$\begin{aligned} N_R &= 2\,\rho_0\, v_{moy}\, R / \eta \\ &= 2\ (1000\ \text{kg m}^{-3})\ (0{,}2\ \text{m s}^{-1})\ (0{,}1\ \text{m}) / (1{,}005 \times 10^{-3}\ \text{Pa s}) \\ &= 39{,}8 \times 10^3. \end{aligned}$$

Ce nombre est supérieur à 3000, valeur caractéristique d'un écoulement turbulent. (b) Le débit correspondant vaut :

$$Q = v_{moy}\, A = (0{,}2\ \text{m s}^{-1})\ [\pi\ (0{,}1\ \text{m})^2] = 6{,}28 \times 10^{-3}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}.$$

---

11 (a) La vitesse moyenne de l'eau vaut :

$$v_{moy} = Q / A = (0{,}01\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}) / [\pi\ (0{,}02\ \text{m})^2] = 7{,}96\ \text{m s}^{-1}.$$

(b) Le nombre de Reynolds vaut :

$$\begin{aligned} N_R &= 2\,\rho_0\, v_{moy}\, R / \eta \\ &= 2\ (1000\ \text{kg m}^{-3})\ (7{,}96\ \text{m s}^{-1})\ (0{,}02\ \text{m}) / (1{,}005 \times 10^{-3}\ \text{Pa s}) \\ &= 0{,}317 \times 10^6 : \end{aligned}$$

on obtient un écoulement turbulent. (c) Il n'y a pas assez d'information pour déterminer la vitesse maximum atteinte par les particules de fluide.

---

13 L'écoulement est laminaire tant que le nombre de Reynolds reste inférieur à 2000 : (a) $(2\,\rho_0\, R / \eta)\, v_{moy} < 2000$ implique que :

$v_{moy} < (2000)\ (2{,}084 \times 10^{-3}\ \text{Pa s}) / [2\ (1{,}0595 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3})\ (2 \times 10^{-3}\ \text{m})]$, soit $0{,}983\ \text{m s}^{-1}$. (b) Le débit correspondant vaut :

$$Q = v_{moy}\, A = (0{,}983\ \text{m s}^{-1})\ \pi\ (2 \times 10^{-3}\ \text{m})^2 = 1{,}24 \times 10^{-5}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

14.4 L'ÉCOULEMENT DU SANG DANS LE SYSTÈME CIRCULATOIRE

14 Le débit dans l'artère vaut $Q = v_{moy}\ \pi\ R^2$. Si celle-ci se ramifie en n vaisseaux de rayon r, le débit dans l'ensemble vaut $Q = n\ (v_{moy} / 2)\ \pi\ r^2$. La conservation du débit impose que $R^2 = n\ r^2 / 2$ et donc $n = 2\ (R / r)^2$.

---

16 La résistance de l'artère est égale à (a) :

$$R_f = 8\ \eta\ \ell / (\pi\ R^4)$$
$$= 8\ (2{,}084 \times 10^{-3}\ \text{Pa s})\ (0{,}11 \times 10^{-2}\ \text{m}) / [\pi\ (2{,}5 \times 10^{-5}\ \text{m})^4]$$
$$= 1{,}49 \times 10^{13}\ \text{Pa s m}^{-3}$$

et le débit vaut (b) :

$$Q = \Delta p / R_f = (1{,}3 \times 10^3\ \text{Pa}) / (1{,}49 \times 10^{13}\ \text{Pa s m}^{-3}) = 8{,}70 \times 10^{-11}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}.$$

---

17 La résistance vaut :

$$R_f = 8\ \eta\ \ell / (\pi\ R^4)$$
$$= 8\ (1 \times 10^{-3}\ \text{Pa s})\ (0{,}1\ \text{m}) / [\pi\ (1 \times 10^{-5}\ \text{m})^4]$$
$$= 0{,}255 \times 10^9\ \text{Pa s m}^{-3}$$

et le débit vaut :

$$Q = \Delta p / R_f = (1 \times 10^3\ \text{Pa}) / (0{,}255 \times 10^9\ \text{Pa s m}^{-3}) = 3{,}93 \times 10^{-6}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}.$$

14.5 FORCES DE RÉSISTANCE VISQUEUSE

18 La vitesse de sédimentation, pour un objet sphérique de rayon R, dans un fluide de viscosité η, vaut $v_\ell = (2/9)\ (R^2 / \eta)\ g\ (\rho - \rho_0)$, où ρ est la masse volumique de l'objet et ρ_0 est la masse volumique du fluide. On trouve ici :

$$v_\ell = (2/9)\ [(5 \times 10^{-6}\ \text{m})^2 / (2{,}084 \times 10^{-3}\ \text{Pa s})]\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})$$
$$[(1{,}3 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3}) - (1{,}0595 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3})]$$
$$= 6{,}28 \times 10^{-6}\ \text{m s}^{-1}.$$

---

19 (a) En appliquant directement l'expression de la vitesse limite,

$$v_\ell = (2/9)\ (R^2 / \eta)\ g\ (\rho - \rho_0)$$

aux données présentées dans cet exercice, on trouve :

$$v_\ell = (2/9)\ [(2 \times 10^{-8}\ \text{m})^2 / (1{,}005 \times 10^{-3}\ \text{Pa s})]\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})$$
$$[(1{,}5 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3}) - (1 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3})]$$
$$= 4{,}33 \times 10^{-10}\ \text{m s}^{-1}.$$

(b) Pour décider si la loi de Stokes est ou non applicable, il faut évaluer le nombre de Reynolds :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$N_R = \rho_0 R v_{moy} / \eta$$
$$= (1000 \text{ kg m}^{-3}) (2 \times 10^{-2} \text{ m}) v_{moy} / (1{,}005 \times 10^{-3} \text{ Pa s})$$
$$= (1{,}99 \times 10^{-2} \text{ s m}^{-1}) v_{moy}.$$

La force de résistance reste proportionnelle à la vitesse tant que $N_R < 1$, ou encore tant que $v_{moy} < 1 / (1{,}99 \times 10^{-2} \text{ s m}^{-1}) = 50 \text{ m s}^{-1}$.

---

20 La loi de Stokes est valable tant que le nombre de Reynolds reste inférieur à 1. Pour un corps qui se déplace à la vitesse limite, le nombre de Reynolds vaut :

$$N_R = (2 \rho_0 g / 9) (\rho - \rho_0) (R^3 / \eta^2).$$

Dans cette expression, ρ_0 est la masse volumique du fluide, ρ est celle de l'objet, η est le coefficient de viscosité du fluide et R est le rayon de l'objet. (a) Pour l'air à 20 °C, on trouve ainsi $N_R = (2{,}39 \times 10^{13}) R^3$, ce qui conduit à un rayon maximum $R_{max} = 3{,}47 \times 10^{-5}$ m. (b) Pour l'eau, $N_R = (4{,}31 \times 10^{12}) R^3$ et $R_{max} = 6{,}14 \times 10^{-5}$ m.

---

21 La vitesse limite est donnée par $v_\ell = (2/9) (R^2 / \eta) g (\rho - \rho_0)$ et donc :

$$R^2 = 9 v_\ell \eta / [2 g (\rho - \rho_0)]$$
$$= 9 (2 \times 10^{-7} \text{ m s}^{-1}) (1{,}81 \times 10^{-5} \text{ Pa s})$$
$$/ \{2 (9{,}8 \text{ m s}^{-2}) [(930 \text{ kg m}^{-3}) - (1{,}2 \text{ kg m}^{-3})]\}.$$

On trouve $R = 4{,}23 \times 10^{-8}$ m.

14.6 RÉSISTANCE DES FLUIDES À "HAUTE VITESSE"

22 La vitesse limite est atteinte lorsque la force de freinage $F_r = C_x A \rho v^2 / 2$ compense exactement le poids $m g$ de l'objet. Utilisant d'une part l'expression de la masse $m = \rho [(4 \pi / 3) R^3]$ et d'autre part l'expression de la section normale $A = \pi R^2$, on trouve $v^2 = (8 R g) / (3 C_x)$ et $v = 1{,}09 \text{ m s}^{-1}$.

---

23 En supposant qu'une personne offre une surface $A = 1 \text{ m}^2$ à la prise du vent, on trouve $F_r = C_x A \rho v^2 / 2 = (1) (1 \text{ m}^2) (1{,}2 \text{ kg m}^{-3}) (20 \text{ m s}^{-1})^2 / 2 = 240$ N.

---

25 Les deux balles étant lancées dans l'air avec la même vitesse initiale, le rapport des forces F_{bb} / F_{pp} se réduit au rapport des sections normales au déplacement, et donc à $(R_{bb} / R_{pp})^2 = 4{,}23$. La force appliquée à la balle de base-ball vaut :

$$F_{bb} = C_x A \rho v^2 / 2$$
$$= (1) [\pi (37 \times 10^{-3} \text{ m})^2] (1{,}2 \text{ kg m}^{-3}) (15 \text{ m s}^{-1})^2 / 2 = 0{,}581 \text{ N}$$

et l'accélération correspondante vaut $a_{bb} = (0{,}581 \text{ N}) / (0{,}149 \text{ kg}) = 3{,}90 \text{ m s}^{-2}$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Pour la balle de ping-pong, on trouve de la même façon $a_{pp} = 45{,}8 \text{ m s}^{-2}$.

14.7 CENTRIFUGATION

27 La masse de la molécule est $m = (1 \times 10^5)\,(1{,}66 \times 10^{-27} \text{ kg}) = 1{,}66 \times 10^{-22} \text{ kg}$ et (a) son poids effectif est donc :

$$w^e = m\,g^e = (1{,}66 \times 10^{-22} \text{ kg})\,(2 \times 10^5)\,(9{,}8 \text{ m s}^{-2}) = 3{,}25 \times 10^{-16} \text{ N}.$$

(b) Le volume de la molécule peut s'obtenir à partir de la connaissance de sa masse et de la masse volumique fournie :

$$V = m / \rho = (1{,}66 \times 10^{-22} \text{ kg}) / (1350 \text{ kg m}^{-3}) = 1{,}23 \times 10^{-25} \text{ m}^3.$$

La poussée d'Archimède est donc :

$$\begin{aligned} B &= \rho_0\, V\, g^e \\ &= (1000 \text{ kg m}^{-3})\,(1{,}23 \times 10^{-25} \text{ m}^3)\,(2 \times 10^5)\,(9{,}8 \text{ m s}^{-2}) \\ &= 2{,}41 \times 10^{-16} \text{ N}. \end{aligned}$$

---

28 L'accélération centripète a_r est liée à la vitesse angulaire ω par $a_r = \omega^2 R$. Ici,

$$\begin{aligned} \omega &= [(200000)\,(9{,}8 \text{ m s}^{-2}) / (0{,}1 \text{ m})]^{1/2} = 4427 \text{ s}^{-1} \\ &= (4427 \text{ s}^{-1})\,[1 \text{ tour} / (2\,\pi)] \\ &= [4427 / (2\,\pi)]\,(1 / 60 \text{ min})^{-1} = 42{,}3 \times 10^3 \text{ tours min}^{-1}. \end{aligned}$$

---

29 La vitesse de sédimentation est liée à la pesanteur effective par la relation :

$$\begin{aligned} v_S &= (m\,g^e / \phi\, R\, \eta)\,(1 - \rho_0 / \rho) \\ &= \{(1{,}06 \times 10^7)\,(1{,}66 \times 10^{-27} \text{ kg})\,(1 \times 10^5)\,(9{,}8 \text{ m s}^{-2}) \\ &\quad / [(3{,}58 \times 10^{-7} \text{ m})(1{,}005 \times 10^{-3} \text{ Pa s})]\}\,[1 - (1000 \text{ kg m}^{-3}) / (1350 \text{ kg m}^{-3})] \\ &= 1{,}24 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

Le temps pris pour sédimenter sur une distance de 1 cm est donc :

$$t = (1 \times 10^{-2} \text{ m}) / (1{,}24 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}) = 805 \text{ s}.$$

---

30 La masse du globule rouge est :

$$m = (1{,}3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3})\,[(4\,\pi / 3)\,(2 \times 10^{-6} \text{ m})^3] = 4{,}36 \times 10^{-14} \text{ kg}.$$

(a) Si l'accélération est celle de la pesanteur, la vitesse de sédimentation vaut $v_S = (m\,g^e / \phi\, R\, \eta)\,(1 - \rho_0 / \rho)$ où $\phi = 6\,\pi$ pour une molécule sphérique. On trouve :

$$\begin{aligned} v_S &= (4{,}3 \times 10^{-14} \text{ kg})\,(9{,}8 \text{ m s}^{-2}) / [6\,\pi\,(2 \times 10^{-6} \text{ m})\,(2{,}084 \times 10^{-3} \text{ Pa s})] \\ &\qquad [1 - (1059{,}5 \text{ kg m}^{-3}) / (1300 \text{ kg m}^{-3})] \\ &= 1{,}006 \times 10^{-6} \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

Le temps nécessaire pour obtenir une sédimentation sur 1 cm est donc :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$t = (1 \times 10^{-2}\ \text{m}) / (1{,}006 \times 10^{-6}\ \text{m s}^{-1}) = 9{,}94 \times 10^{3}\ \text{s}$

(près de trois heures). (b) Si l'accélération vaut $1 \times 10^{5}\ g$, la vitesse de sédimentation sera 1×10^{5} fois plus grande et le temps nécessaire à cette sédimentation sera diminué d'autant : $t = (9{,}94 \times 10^{3}\ \text{s}) / (1 \times 10^{5}) = 9{,}92 \times 10^{-2}\ \text{s}$.

---

31 En utilisant l'expression de la vitesse de sédimentation, on peut obtenir une relation liant la masse m de la molécule à sa masse volumique ρ :

$$m = (\phi\, R\, \eta\, v_s) / [g^e\, (1 - \rho_0 / \rho)].$$

La viscosité de l'eau sera approchée par sa valeur à 37 °C extraite du tableau 14.1. Une valeur plus précise pourrait être obtenue par interpolation des données présentées dans ce tableau. On trouve :

$$m = (1{,}16 \times 10^{-6}\ \text{m})\ (0{,}6947 \times 10^{-3}\ \text{Pa s})\ (3{,}7 \times 10^{-5}\ \text{m s}^{-1}) / \{(2 \times 10^{5})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ [1 - (1000\ \text{kg m}^{-3}) / (1370\ \text{kg m}^{-3})]\}$$

$$= 5{,}63 \times 10^{-20}\ \text{kg} = 3{,}39 \times 10^{7}\ \text{uma}.$$

SOLUTION DES PROBLÈMES

32 La force est liée au gradient de vitesse dans l'épaisseur de la couche $(\Delta v / \Delta y = (0{,}1\ \text{m s}^{-1}) / (3 \times 10^{-3}\ \text{m}) = 33{,}3\ \text{s}^{-1})$: $F = \eta\, A\, (\Delta v / \Delta y)$. (a) Pour l'eau, $F = (1{,}005 \times 10^{-3}\ \text{Pa s})\ (0{,}25\ \text{m}^2)\ (33{,}3\ \text{s}^{-1}) = 0{,}00837\ \text{N}$; (b) pour l'huile, $F = (0{,}01\ \text{Pa s})\ (0{,}25\ \text{m}^2)\ (33{,}3\ \text{s}^{-1}) = 0{,}08325\ \text{N}$, soit une force dix fois supérieure. (c) L'huile a l'avantage de prévenir l'oxydation des pièces mécaniques.

---

33 La vitesse moyenne du sang dans l'aorte vaut :

$$Q / A = (4{,}20 \times 10^{-6}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}) / [\pi\ (1{,}3 \times 10^{-2}\ \text{m})^2] = 7{,}91 \times 10^{-3}\ \text{m s}^{-1}$$

et (b) la loi de Poiseuille donne la perte de charge $\Delta p = R_f\, Q$, où :

$$R_f = 8\, \eta\, \ell / (\pi\, R^4)$$

$$= 8\ (2{,}084 \times 10^{-3}\ \text{Pa s})\ (0{,}1\ \text{m}) / [\pi\ (1{,}3 \times 10^{-2}\ \text{m})^4]$$

$$= 18{,}58 \times 10^{3}\ \text{Pa s m}^{-3}.$$

On trouve $\Delta p = (18{,}58 \times 10^{3}\ \text{Pa s m}^{-3})\ (4{,}20 \times 10^{-6}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}) = 147\ \text{Pa}$. (c) La puissance nécessaire pour forcer le sang à travers cette partie de l'aorte vaut $Q\ \Delta p = 6{,}17 \times 10^{-4}\ \text{J}$.

---

34 La résistance de la conduite vaut :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$R_f = 8\,\eta\,\ell / (\pi R^4) = 8\,(1{,}005 \times 10^{-3}\ \text{Pa s})\,\ell / [\pi\,(2 \times 10^{-2}\ \text{m})^4]$$
$$= (15995\ \text{Pa s m}^{-4})\,\ell.$$

(a) Le débit est donné par la loi de Poiseuille :

$$Q = \Delta p / R_f = (100\ \text{Pa m}^{-1})\,\ell / [(15995\ \text{Pa s m}^{-4})\,\ell] = 6{,}25 \times 10^{-3}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}.$$

(b) La vitesse moyenne vaut :

$$v_{moy} = Q / [\pi R^2] = (6{,}25 \times 10^{-3}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}) / [\pi\,(2 \times 10^{-2}\ \text{m})^2] = 4{,}97\ \text{m s}^{-1}.$$

(c) L'écoulement est laminaire si le nombre de Reynolds est inférieur à 2000. Ici,

$$N_R = 2\,\rho\,v_{moy}\,R / \eta$$
$$= 2\,(1000\ \text{kg m}^{-3})\,(4{,}97\ \text{m s}^{-1})\,(2 \times 10^{-2}\ \text{m}) / (1{,}005 \times 10^{-3}\ \text{Pa s})$$
$$= 1{,}98 \times 10^5,$$

valeur caractéristique d'un écoulement turbulent.

---

35 La perte de puissance $w\,\ell$ est le produit de la perte de charge par le débit :

$$w\,\ell = \Delta p\,Q = R_f\,Q^2.$$

On en déduit que :

$$R_f / \ell = w / Q^2 = (1{,}5\ \text{W m}^{-1}) / (0{,}01\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1})^2 = 15000\ \text{Pa s m}^{-4}.$$

---

36 La puissance dissipée vaut :

$$P = \Delta p\,Q = R_f\,Q^2 = (4 \times 10^4\ \text{Pa s m}^{-3})\,(0{,}15\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1})^2 = 900\ \text{W}.$$

---

39 La résistance d'un des tubes de petit diamètre vaut $R_1 = 8\,\eta\,L / (\pi R^4)$. Mis en parallèle, les deux tubes offrent une résistance deux fois plus petite, soit, ensemble, $4\,\eta\,L / (\pi R^4)$. Le second tube présente une résistance de :

$$8\,\eta\,(1{,}5\ \text{L}) / [\pi\,(1{,}5\,R)^4] = (3/2)^{-3}\,[8\,\eta\,L / (\pi R^4)].$$

En montant ce tube en série avec les deux autres, on trouve une résistance de :

$$[1 + 2\,(3/2)^{-3}]\,[4\,\eta\,L / (\pi R^4)] = 6{,}37\,\eta\,L / (\pi R^4).$$

---

44 (a) La résistance est le rapport :

$$R_f = \Delta p / Q = (1000\ \text{Pa}) / (0{,}01\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}) = 100000\ \text{Pa s m}^{-3}.$$

(b) La puissance nécessaire pour maintenir cet écoulement est le produit :

$$\Delta p\,Q = (1000\ \text{Pa})\,(0{,}01\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}) = 10\ \text{W}.$$

(c) L'hypothèse d'un écoulement laminaire n'est pas nécessaire.

---

45 La résistance vasculaire vaut :

$$R_f = \Delta p / Q = (12 \times 10^3\ \text{Pa}) / (6 \times 10^{-5}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}) = 2{,}00 \times 10^8\ \text{Pa s m}^{-3}.$$

(b) La puissance fournie par le coeur vaut :

$$\Delta p\,Q = (12 \times 10^3\ \text{Pa})\,(6 \times 10^{-5}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}) = 0{,}72\ \text{W}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(c) La pompe devra développer le double de la puissance nécessaire, soit 1,44 W.

---

46 La résistance d'un capillaire de rayon R vaut :
$R_f = 8\,\eta\,\ell / (\pi\,R^4) = 8\,(2{,}084 \times 10^{-3}\ \text{Pa s})\,(1 \times 10^{-3}\ \text{m}) / [\pi\,(2 \times 10^{-6}\ \text{m})^4]$,
soit $3{,}32 \times 10^{17}\ \text{Pa s m}^{-3}$. (b) La résistance totale entre les systèmes artériel et veineux vaut :

$$\Delta p / Q = (11{,}6 \times 10^3\ \text{Pa}) / (9{,}7 \times 10^{-5}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}) = 0{,}12 \times 10^9\ \text{Pa s m}^{-3}.$$

9% de la perte de charge représentent une résistance de :

$$(9/100)\,(0{,}12 \times 10^9\ \text{Pa s m}^{-3}) = 10{,}8 \times 10^6\ \text{Pa s m}^{-3}.$$

Les n résistances des capillaires étant placées en parallèle, on doit vérifier que :

$$1 / (10{,}8 \times 10^6\ \text{Pa s m}^{-3}) = n / (3{,}32 \times 10^{17}\ \text{Pa s m}^{-3})$$

et donc $n = 3{,}08 \times 10^{10}$.

---

48 La loi de Stokes s'applique lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à 1 : $N_R = \rho_0\,R\,v / \eta < 1$. Comme dimension caractéristique de R, nous prendrons la valeur 0,1 m :

$$N_R = (1000\ \text{kg m}^{-3})\,(0{,}1\ \text{m})\,v / (1{,}005 \times 10^{-3}\ \text{Pa s}) = (1 \times 10^5\ \text{s m}^{-1})\,v.$$

La loi de Stokes n'est applicable que dans le cas de vitesses inférieures à $1 \times 10^{-5}\ \text{m s}^{-1}$: il vaut mieux dire qu'elle ne l'est pratiquement jamais.

---

49 Les dimensions d'une force se représentent par l'expression $[\text{M L T}^{-2}]$. Si nous identifions la force de résistance visqueuse à basse vitesse à une expression du type $F_R = \phi\,R^a\,\eta^b\,v^c$ (l'inertie du fluide étant supposée ne jouer aucun rôle à basse vitesse), les dimensions de celle-ci doivent coïncider avec :

$$[\text{L}]^a\,[\text{M L T}^{-2}\,\text{L}^{-2}\,\text{T}]^b\,[\text{L T}^{-1}]^c = \text{M}^b\,\text{L}^{a-b+c}\,\text{T}^{-b-c}.$$

Il en résulte que $b = 1$, $a - b + c = 1$ et $-b - c = -2$, ce qui implique que $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$.

---

50 Si nous identifions la force de résistance à haute vitesse à l'expression $F_R = \phi\,R^a\,\rho^b\,v^c$ (nous négligeons les effets de la viscosité devant l'effet de l'inertie du fluide mis en mouvement par le déplacement de l'objet), nous devons vérifier que $[\text{M L T}^{-2}] = [\text{L}]^a\,[\text{M L}^{-3}]^b\,[\text{L T}^{-1}]^c = [\text{M}]^b\,[\text{L}]^{a-3b+c}\,[\text{T}]^{-c}$ et donc $b = 1$, $a - 3b + c = 1$ et $-c = -2$. Ceci fournit $a = 2$, $b = 1$ et $c = 2$.

---

52 Puisque $\phi = 6\,\pi$ pour une molécule sphérique, $\phi\,R = 18{,}8 \times 10^{-8}$ m.

---

53 (a) Le volume du nucléohistone est le rapport :

$$V = m / \rho = (2{,}1 \times 10^6)\,(1{,}66 \times 10^{-27}\ \text{kg}) / (1520\ \text{kg m}^{-3}) = 2{,}29 \times 10^{-24}\ \text{m}^3.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(b) $R = [V / (4\,\pi / 3)]^{1/3} = 8{,}18 \times 10^{-9}$ m.
(c) $\phi\, R = (6\,\pi)\,(8{,}18 \times 10^{-9}\ \text{m}) = 1{,}54 \times 10^{-7}$ m.
(d) La molécule est probablement allongée.

---

54 Pour une bulle de rayon constant, la poussée vers le haut, X, est constante : elle correspond à la différence entre la poussée d'Archimède et le poids de l'air dans la bulle. La vitesse limite est atteinte lorsque cette poussée X est équilibrée par la force de résistance visqueuse : $6\,\pi\,\eta\,R\,v_\ell = X$. Lorsque la vitesse de la bulle est exactement égale à la moitié de la vitesse limite, la force de freinage vaut $6\,\pi\,\eta\,R\,(v_\ell / 2) = X / 2$. La résultante ascensionnelle vaut $X - X / 2 = X / 2$ et l'accélération est donnée par $a = X / (2\,m)$, où m est la masse de la bulle de gaz. Si V correspond à son volume, on trouve que :

$$a = (\rho_{eau} - \rho_{air})\,V\,g / (2\,\rho_{air}\,V)$$
$$= [(\rho_{eau} - \rho_{air}) / (2\,\rho_{air})]\,g = 412\,g = 4{,}0 \times 10^3\ \text{m s}^{-2}.$$

La grande valeur obtenue implique que la vitesse limite est atteinte presqu'instantanément.

---

55 (a) $F_R = C_x\,A\,\rho\,v^2 / 2$
$= (0{,}055)\,(0{,}11\ \text{m}^2)\,(1000\ \text{kg m}^{-3})\,(8{,}3\ \text{m s}^{-1})^2 / 2$
$= 208$ N.

(b) La puissance à développer pour vaincre cette force vaut :

$$P = F_R\,v = (208\ \text{N})\,(8{,}3\ \text{m s}^{-1}) = 1730\ \text{W}$$

et est fournie par (15/100) (90 kg) = 13,5 kg de muscle. La puissance fournie par kilogramme de muscle est donc 128 W kg^{-1}, soit (c) 3,2 fois plus élevée que chez l'homme.

---

56 La vitesse du nageur A est constante et vaut (25 m) / (20 s) = 1,25 m s^{-1}. Le travail contre la résistance de l'eau vaut $C_x\,A\,(4\,\ell)\,(\rho / 2)\,(1{,}25\ \text{m s}^{-1})^2$ où ℓ représente une longueur de bassin. Le nageur B parcourt les deux premières longueurs à la vitesse de (25 m) / (15 s) = 1,67 m s^{-1} et, ce faisant, développe un travail de $C_x\,A\,(2\,\ell)\,(\rho / 2)\,(1{,}67\ \text{m s}^{-1})^2$. Les deux derniers trajets sont effectués à la vitesse de 1 m s^{-1} et le travail nécessaire est alors :

$$C_x\,A\,(4\,\ell)\,(\rho / 2)\,(1\ \text{m s}^{-1})^2.$$

Le rapport des travaux W_A et W_B développés respectivement par les nageurs A et B est égal à $W_B / W_A = 2\,[(1{,}67)^2 + (1)^2] / [4\,(1{,}25)^2] = 1{,}21$: le nageur B produit 21% de travail en plus.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre **15**

Forces de cohésion dans les liquides

RAPPELS

Les molécules à la surface d'un liquide subissent des forces qui tendent à les ramener à l'intérieur de celui-ci. Ces forces sont responsables de la tendance des molécules à s'agglomérer. Les surfaces libres d'un liquide tendent à diminuer leur mesure et induisent de ce fait des forces tangentielles sur leur périmètre. La tension superficielle γ est définie comme étant la force par unité de longueur exercée par la surface du liquide. La force sur une longueur ℓ du périmètre vaut $F = \gamma\, \ell$ pour une surface libre et $F = 2\, \gamma\, \ell$ pour un film présentant deux surfaces.

Lorsqu'un liquide est mis en contact avec un corps solide, les forces d'interaction liquide-liquide et liquide-solide entrent en compétition dans la région proche du contact. La forme de la surface et l'angle de contact de la surface du liquide dépendent du résultat de cette compétition. Si les forces de cohésion liquide-liquide dominent les forces d'interaction liquide-solide, la surface du liquide subit une dépression à l'intérieur d'un tube plongé dans ce liquide. Il se produit une ascension dans le cas inverse. La hauteur h atteinte par la surface du liquide à l'intérieur d'un capillaire de rayon r est donnée par la loi de Jurin : $h = 2\, \gamma \cos \theta / (\rho\, g\, r)$. Dans cette expression, θ est l'angle de contact entre la surface liquide et la paroi solide.

La loi de Laplace donne la relation entre la différence de pression d'une membrane fermée et la tension de cette membrane. Pour une membrane sphérique de rayon r, la différence entre la pression intérieure p_i et la pression extérieure p_e vaut :

$$p_i - p_e = 2\, \gamma / r.$$

Puisqu'une bulle sphérique présente deux surfaces, la différence de pression vaut :

$$p_i - p_e = 4\, \gamma / r.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

SOLUTION DES EXERCICES

15.1 TENSION SUPERFICIELLE

1 La tension superficielle est le rapport $\gamma = F / 2\,\ell$, où F est la force totale appliquée pour maintenir la surface du film constante (ici, le poids du fil et des masses) et ℓ est la longueur du fil. Le facteur 2 vient de ce qu'un film a deux surfaces.

$$\gamma = (2 \times 10^{-3}\ \text{N}) / [2\,(5 \times 10^{-2}\ \text{m})] = 0{,}2\ \text{N m}^{-1}.$$

---

2 $F = 2\,\ell\,\gamma = 2\,(20 \times 10^{-2}\ \text{m})\,(0{,}03\ \text{N m}^{-1}) = 0{,}012\ \text{N}.$

---

3 La surface du film tend à prendre une valeur minimale : le cercle étant, pour un périmètre donné, la figure géométrique qui présente la surface la plus grande, la formation d'un trou circulaire conduit à minimiser la surface restante du film.

15.2 ANGLES DE CONTACT ET CAPILLARITÉ

4 La loi de Jurin donne, en fonction de l'angle de contact θ, la hauteur h atteinte par un liquide dans un tube de rayon r : $h = 2\,\gamma \cos\theta / (\rho\,g\,r)$. (a) Pour un tube en verre,

$$h = 2(7{,}56 \times 10^{-2}\ \text{N m}^{-1})(1) / [(1000\ \text{kg m}^{-3})(9{,}8\ \text{m s}^{-2})(1 \times 10^{-3}\ \text{m})]$$
$$= 1{,}54 \times 10^{-2}\ \text{m}.$$

(b) Pour un tube en paraffine,

$$h = 2(7{,}56 \times 10^{-2}\ \text{N m}^{-1})(\cos 107\,°) / [(1000\ \text{kg m}^{-3})(9{,}8\ \text{m s}^{-2})(1 \times 10^{-3}\ \text{m})]$$
$$= -4{,}51 \times 10^{-3}\ \text{m}.$$

---

5 Vraisemblablement, le tube est en verre, la loi de Jurin donne :

$$h = 2\,(0{,}465\ \text{N m}^{-1})\,(\cos 140\,°) / [(13600\ \text{kg m}^{-3})\,(9{,}8\ \text{m s}^{-2})\,(1 \times 10^{-4}\ \text{m})]$$
$$= -5{,}35 \times 10^{-2}\ \text{m}.$$

---

6 (a) Le ménisque est déplacé d'une quantité :

$$h = 2\,\gamma \cos\theta / (\rho\,g\,r)$$
$$= 2\,(0{,}465\ \text{N m}^{-1})\,(\cos 140\,°) / [(13600\ \text{kg m}^{-3})\,(9{,}8\ \text{m s}^{-2})\,(1 \times 10^{-3}\ \text{m})]$$
$$= -5{,}35 \times 10^{-3}\ \text{m}.$$

(b) Il s'agit d'une dépression, l'angle de contact étant plus grand que l'angle droit. (c) Cette expression représente une erreur de :

$$(5{,}35 \times 10^{-3}\ \text{m}) / (0{,}76\ \text{m}) = 0{,}7 \times 10^{-2}\ (0{,}7\%).$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

7 0,01% de 76 cm représente $\delta = 0{,}76 \times 10^{-4}$ m. Pour que la dépression h du mercure reste inférieure à δ, il faut que $|2\,\gamma \cos\theta / (\rho\, g\, r)| < \delta$, ou :

$$r > |2\,\gamma \cos\theta / (\rho\, g\, \delta)| = 2\,(0{,}465\ \text{N m}^{-1})\,(\cos 140°) / [(13600\ \text{kg m}^{-3})\,(9{,}8\ \text{m s}^{-2})\,(0{,}76 \times 10^{-4}\ \text{m})] = 7{,}03 \times 10^{-2}\ \text{m}.$$

15.3 LES MOLÉCULES TENSIO-ACTIVES

9 La loi de Laplace donne la différence de pression Δp entre l'intérieur et l'extérieur d'une surface sphérique de rayon r. Pour une bulle sphérique (deux surfaces) $\Delta p = 4\,\gamma / r$. Ici, $\gamma = r\ \Delta p / 4 = (5 \times 10^{-2}\ \text{m})\,(2\ \text{Pa}) / 4 = 0{,}025\ \text{N m}^{-1}$.

10 La loi de Laplace donne la différence de pression entre l'intérieur de l'alvéole pulmonaire et la cavité pleurale :

$$\Delta p = 2\,\gamma / r = 2\,(0{,}05\ \text{N m}^{-1}) / (0{,}1 \times 10^{-3}\ \text{m}) = 1000\ \text{Pa}.$$

(b) La somme des grandeurs des forces correspondant à cette surpression s'écrit :

$$F = (1000\ \text{Pa})\,(4\,\pi)\,0{,}1 \times 10^{-3}\ \text{m})^2 = 1{,}26 \times 10^{-4}\ \text{N}.$$

11 La tension superficielle dans un alvéole pulmonaire est donnée par la loi de Laplace : $\gamma = \Delta p\, r / 2 = [(534\ \text{Pa}) - (400\ \text{Pa})]\,(0{,}05 \times 10^{-3}\ \text{m}) / 2 = 0{,}00335\ \text{N m}^{-1}$. Cette tension est très inférieure, à cause du surfactant, à la tension superficielle normale de $0{,}05\ \text{N m}^{-1}$.

13 $\Delta p = 4\,\gamma / r = 4\,(0{,}02\ \text{N m}^{-1}) / (2 \times 10^{-2}\ \text{m}) = 4\ \text{Pa}$.

16 $\Delta p = 2\,\gamma / r = 2\,(6{,}31 \times 10^{-2}\ \text{N m}^{-1}) / (0{,}1 \times 10^{-3}\ \text{m}) = 1262\ \text{Pa}$.

15.4 LE COEUR EN TANT QUE POMPE

17 La force sur la paroi vaut $F = \pi\, r^2\, \Delta p$. Si le rayon augmente de 10%, la force varie de $\Delta F = \pi\, \Delta p\, [(r + \Delta r)^2 - r^2]$, ce qui donne une variation relative :

$$\Delta F / F = 2\,\Delta r / r + (\Delta r / r)^2 = 2\,(0{,}1) + (0{,}1)^2 = 0{,}21\ (21\%).$$

18 La tension artérielle est proportionnelle à la perte de charge et donc au débit sanguin. (a) Si cette tension est multipliée par 1,5, le débit est multiplié par le même facteur et vaut $(1{,}5)\,(9{,}7 \times 10^{-5}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}) = 1{,}45 \times 10^{-4}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}$. La perte

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

de charge Δp est alors égale à $(1{,}5)\ (11{,}7 \times 10^3\ \text{Pa}) = 17{,}550 \times 10^3\ \text{Pa}$ et la puissance fournie par le coeur vaut :

$$P = \Delta p\, Q = (1{,}45 \times 10^{-6}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1})\ (17{,}5 \times 10^3\ \text{Pa}) = 2{,}55\ \text{W}.$$

15.5 L'ASCENSION DE LA SÈVE DANS LES ARBRES ; PRESSIONS NÉGATIVES

19 Si l'on insère un tube dans le xylème, l'étanchéité de celui-ci n'est plus assurée et la sève ne peut plus se trouver dans un état de pression négative.

---

21 La pression p_h à la tête d'un arbre de hauteur h vaut $p_h = p_a - \rho\, g\, h$, où p_a est la pression atmosphérique. Ici, on trouve :

$$p_h = (101300\ \text{Pa}) - (1000\ \text{kg m}^{-3})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (20\ \text{m})$$
$$= -94{,}7 \times 10^{-3}\ \text{Pa}\ (-0{,}935\ \text{atm}).$$

---

22 Une atmosphère (1 atm) vaut, par définition, $p_a = 1\ \text{atm} = 101300\ \text{Pa}$. Exprimée dans cette unité, l'équation (15.8) devient :

$$p_h / \text{atm} = 1 - \rho\, g\, h / \text{atm} = 1 - (1000\ \text{kg m}^{-3})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ h / (101300\ \text{Pa})$$
$$= 1 - (0{,}0967\ \text{m}^{-1})\ h.$$

SOLUTION DES PROBLÈMES

23 La force nécessaire pour arracher l'anneau est la somme du poids w de celui-ci et de la force associée à la tension superficielle : $F = w + 2\,\gamma\,(2\,\pi\,r)$.

---

24 La résultante verticale des forces dues à la tension des surfaces vaut :

$$F_v = 2\,\pi\,r\,\gamma\cos\theta = 2\,\pi\,(1 \times 10^{-3}\ \text{m})\ (7{,}28 \times 10^{-2}\ \text{N m}^{-1})\ (\cos 30\,°)$$
$$= 3{,}96 \times 10^{-4}\ \text{N}.$$

Le poids de l'insecte est équilibré par les forces verticales agissant sur les 6 pattes $w = 6\ (3{,}96 \times 10^{-4}\ \text{N}) = 0{,}0238\ \text{N}$.

---

26 La surpression dans chaque bulle est inversement proportionnelle au rayon : la pression dans la bulle de petit diamètre est plus élevée que dans la grande. La petite bulle va donc se vider au profit de la grande.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

27 La pression requise pour conserver sa forme à une surface sphérique de fluide est donnée par la loi de Laplace $\Delta p = 2\,\gamma / r$, où γ est la tension superficielle du fluide et r est le rayon de sa surface. Dans une bulle de savon, la surpression nécessaire vaut $\Delta p = 4\,\gamma / r$ du fait qu'il y a deux surfaces. La pression dans la bulle est donc bien $p = p_a + 4\,\gamma / r$, où p_a est la pression atmosphérique.

---

28 Le poids du liquide dans le tube capillaire au-dessus de la surface libre du liquide vaut $\rho\, g\, \ell\, \pi\, (2\,r)^2 + \rho\, g\, x\, \pi\, r^2 = \rho\, g\, (4\,\ell + x)\, \pi\, r^2$ et doit être compensé par la force verticale due à la tension superficielle, $2\,\pi\,\rho\, g$. On trouve :

$$2\,\pi\,\rho\, g = \rho\, g\, (4\,\ell + x)\, \pi\, r^2 \text{ et } x = (2 / r^2) - 4\,\ell$$

(positif, dans les hypothèses indiquées).

---

29 La hauteur h_1 atteinte par l'eau dépend du rayon r du tube :

$$h_1 = 2\,\gamma_1 \cos\theta_1 / (\rho_1\, g\, r).$$

La hauteur h_2 atteinte dans l'autre liquide vérifie :

$$h_2 = 2\,\gamma_2 \cos\theta_2 / (\rho_2\, g\, r).$$

En divisant membre à membre ces deux relations, on peut éliminer le rayon du tube et écrire :

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= (h_2 / h_1)\,(\rho_2 / \rho_1)\,(\cos\theta_1 / \cos\theta_2)\,\gamma_1 \\ &= [(0{,}15\text{ m}) / (0{,}2\text{ m})]\,[(700\text{ kg m}^{-3}) \\ &\qquad / (1000\text{ kg m}^{-3})]\,[(1) / (1)]\,(7{,}28 \times 10^{-2}\text{ N m}^{-1}) \\ &= 3{,}82 \times 10^{-2}\text{ N m}^{-1}.\end{aligned}$$

---

30 Le travail de la force associée à la tension superficielle pour un allongement Δx du film vaut $W = F\,\Delta x = 2\,\gamma\,\ell\,\Delta x = \gamma\,(2\,\Delta A)$. L'énergie communiquée au film est donc proportionnelle à l'accroissement $2\,\Delta A$ de l'aire de sa surface, et le coefficient de proportionnalité est la tension superficielle γ.

---

31 (a) Lorsque le rayon de la bulle vaut r, la force totale appliquée pour repousser l'atmosphère vaut $p_a\,(4\,\pi\,r^2)$, où $p_a = 101300$ Pa est la pression atmosphérique normale. Le travail développé contre l'atmosphère lorsque la bulle passe d'un rayon r_A à un rayon r_B vaut

$$W = \int_{r_A}^{r_B} p_a \left(4\,\pi\,r^2\right) \mathrm{d}r = p_a\,\frac{4}{3}\,\pi\,\left[r_B^3 - r_A^3\right]$$

Entre $r_A = 3$ cm et $r_B = 5$ cm, $W = 41{,}5$ J. (b) La surface passe de $(4\,\pi\,r_A^2)$ à $(4\,\pi\,r_B^2)$ (on ne considère qu'une seule des deux surfaces sphériques) et augmente

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

de $4\,\pi\,(r_B^2 - r_A^2) = 0{,}0201\ \text{m}^2$. L'énergie superficielle s'accroît de :

$$(2{,}5 \times 10^{-2}\ \text{N m}^{-1})\ (0{,}0201\ \text{m}^2) = 5{,}03 \times 10^{-4}\ \text{J}.$$

---

33 (a) La hauteur atteinte est donnée par la loi de Jurin :

$h = 2\,\gamma \cos\theta / \rho\, g\, r$

$= 2\ (7{,}56 \times 10^{-2}\ \text{N m}^{-1})\ (1) / [(1000\ \text{kg m}^{-3})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{,}03 \times 10^{-3}\ \text{m})]$

$= 0{,}51\ \text{m}.$

(b) Si le tube est plus court, le ménisque se forme à l'extrémité haute du tube et la force sur son périmètre n'est plus verticale : l'eau remplit le tube mais ne s'écoule pas.

---

34 Une colonne de fluide d'épaisseur d, de hauteur h et de largeur ℓ a un poids égal à $\rho\ g\ \ell\ d\ h$. Celui-ci est compensé par la force verticale due à la tension superficielle dans le ménisque, $F = 2\ \ell\ \gamma \cos\theta$ (θ est l'angle de contact et γ est la tension superficielle). L'équilibre signifie que :

$$2\ \ell\ \gamma \cos\theta = \rho\ g\ \ell\ d\ h \text{ et } h = 2\,\gamma \cos\theta / (\rho\ g\ d).$$

---

35 La hauteur se calcule par :

$h = 2\ (7{,}28 \times 10^{-2}\ \text{N m}^{-1})\ (1) / [(1000\ \text{kg m}^{-3})\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{,}3 \times 10^{-3}\ \text{m})]$

$= 0{,}0516\ \text{m}.$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre **16**

Forces électriques, champs et potentiels

RAPPELS

La force de Coulomb qui s'exerce entre deux charges électriques s'exprime par $F = k\,q\,Q\,/\,r^2$ où k est une constante dont la valeur est $k = 9{,}0 \times 10^9$ N m^2 C^{-2} lorsque les charges q et Q sont mesurées en coulombs et leur interdistance r en mètres. La force est attractive lorsque les deux charges sont de signes différents et répulsive dans le cas contraire. Lorsque plusieurs charges sont mises en présence, la force sur l'une d'entre elles est la somme vectorielle des forces de Coulomb dues à toutes les autres.

Nous pouvons également exprimer qu'une charge q produit dans son voisinage un champ électrique **E** qui agit à son tour sur toute autre charge Q amenée dans cette région. La force subie par Q s'écrit alors $\mathbf{F} = Q\,\mathbf{E}$ et l'on déduit donc que :

$$E = k\,q\,/\,r^2.$$

Comme la force **F** et le champ **E** sont des vecteurs, on trouve que des charges positives subissent des forces dans le sens du champ et des charges négatives dans le sens opposé au champ.

Deux charges égales mais opposées $+\,q$ et $-\,q$ séparées d'une distance a forment ce que l'on appelle un dipôle électrique. A grande distance r du dipôle, la grandeur du champ vaut $E = 4\,k\,q\,a\,/\,r^3$.

Près d'une surface plane d'aire A portant une charge totale Q distribuée uniformément, le champ s'exprime par $E = 2\,\pi\,k\,Q\,/\,A$. Dans le cas de deux surfaces planes d'aire A et portant des charges égales et opposées $+\,Q$ et $-\,Q$, le champ entre les plaques vaut $E = 4\,\pi\,k\,Q\,/\,A$ et est nul dans le reste de l'espace.

Le potentiel électrique est l'énergie potentielle électrique par unité de charge $V = U\,/\,q$. Il permet de caractériser les effets d'une ou de plusieurs charges sans spécifier l'importance ou le signe de la charge sur laquelle ces effets se manifestent. Quand on déplace une charge positive d'une distance ℓ dans le sens opposé à un

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

champ constant, son énergie potentielle augmente de $\Delta U = q\ \Delta V = q\ E\ \ell$. Le potentiel à une distance r d'une charge ponctuelle Q est donné par $V = k\ Q / r$. Cette expression implique que le potentiel électrique a été choisi égal à zéro en $r = \infty$. Lorsque plusieurs charges agissent simultanément, le potentiel résultant en un point est la somme algébrique des potentiels développés par chacune d'elles.

Une surface en tout point de laquelle le potentiel est le même est une surface équipotentielle. Les surfaces équipotentielles sont toujours perpendiculaires aux lignes de force du champ électrique. Deux charges $+ q$ et $- q$ séparées par une distance ℓ ont un moment dipolaire $\mathbf{p} = q\ \ell$. Dans un champ électrique uniforme, il n'y a pas de force résultante sur un dipôle mais il y a un couple de forces tendant à l'aligner parallèlement au champ. Le moment du couple sur le dipôle est :

$$\tau = \ell \times (q\ \mathbf{E}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

et son énergie potentielle vaut $U = - pE \cos \theta$.

Deux conducteurs séparés par le vide ou par un isolant forment un condensateur. Si les deux conducteurs ont des charges égales et opposées $\pm\ Q$, la capacité du condensateur se définit comme $C = Q / V$ où V est la différence de potentiel entre les deux lames. Lorsque le condensateur est composé de lames parallèles dans le vide, la capacité s'exprime par $C = \varepsilon_0\ A / \ell$ où $\varepsilon_0 = 1 / (4\ \pi\ k)$.

Le champ électrique déforme la distribution de charge des molécules de l'isolant ou diélectrique que l'on introduit entre les lames d'un condensateur, les transformant en dipôles qui, à leur tour, réduisent le champ électrique total et par conséquent la différence de potentiel. La capacité du condensateur augmente donc et se calcule par $C = K\ \varepsilon_0\ A / \ell$ où K est la constante diélectrique du matériau isolant.

Un condensateur chargé accumule de l'énergie électrique $U = Q\ V / 2$. Si l'on connecte les lames par un fil conducteur, un courant continu circule entre les lames jusqu'à ce qu'elles redeviennent neutres.

SOLUTION DES EXERCICES

16.1 FORCES ÉLECTRIQUES

2 La charge $(2\ Q)$ est placée à une distance $(3\ b)$ de la charge Q et subit une force égale à :

$$F = k\ (2\ Q)\ Q / (3\ b)^2$$

$$= (9{,}0 \times 10^9\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2})\ (2)\ (1 \times 10^{-6}\ \text{C})^2 / [3\ (0{,}1\ \text{m})]^2 = 0{,}2\ \text{N}.$$

Cette force est dirigée dans le sens opposé à Q puisque les deux charges se repoussent.

---

3 Deux forces s'exercent sur cette charge Q additionnelle : celle due à la présence

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

de Q ($\mathbf{F_1}$) et l'autre due à la présence de ($2\,Q$) ($\mathbf{F_2}$). La force $\mathbf{F_1}$ est répulsive et s'exerce dans la direction de ($-\,\mathbf{y}$) si $\mathbf{y}$ est un vecteur unitaire dirigé dans le sens des distances positives croissantes. Elle s'écrit donc $\mathbf{F_1} = k\,Q\,Q\,(-\,\mathbf{y}) / b^2$. La force $\mathbf{F_2}$ est aussi répulsive et s'exerce dans la direction $\mathbf{y}$. On peut donc l'écrire $\mathbf{F_2} = k\,Q\,(2\,Q)\,\mathbf{y} / (2\,b)^2$. La résultante des forces se calcule par :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = (k\,Q^2 / b^2)\,[-\,1 + 1/2]\,\mathbf{y} = -\,k\,Q^2\,\mathbf{y} / b^2,$$

dirigée vers les $\mathbf{y}$ décroissants, soit vers le bas.

---

4 Les deux charges positives ne sont plus alignées avec la charge $-\,Q$. Les deux forces qui s'exercent sur la charge ($-\,Q$) sont attractives et valent :

$$\mathbf{F_y} = k\,Q\,(-\,Q)\,(-\,\mathbf{y}) / a^2 \text{ et } \mathbf{F_x} = kQ\,(-\,Q)\,(-\,\mathbf{x}) / a^2.$$

La grandeur de la résultante est :

$$\mathbf{F} = [F_x^2 + F_y^2]^{1/2} = [2\,k^2\,Q^4 / a^4]^{1/2} = \sqrt{2}\,k\,Q^2 / a^2$$

et l'angle d'inclinaison de cette résultante par rapport à l'horizontale vaut :

$$\theta = \text{arctg}\,(F_y / F_x) = \text{arctg}\,1 = 45\,°.$$

---

6 La force qui s'exerce entre les deux ions vaut, suivant la loi de Coulomb,

$$\begin{aligned} F &= k\,(+\,e)\,(-\,e) / r^2 \\ &= -\,(9{,}0 \times 10^9\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2})\,(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2 / (1 \times 10^{-8}\ \text{m})^2 \\ &= -\,2{,}30 \times 10^{-12}\ \text{N}. \end{aligned}$$

Le signe moins indique que la force est attractive.

16.2 LE CHAMP ÉLECTRIQUE
LE CHAMP ÉLECTRIQUE DÛ À DES DISTRIBUTIONS DE CHARGES

7 (a) Le champ électrique a la direction et le sens du mouvement d'une particule positive qui serait placée au voisinage du noyau. Puisque le noyau est positif, la particule est repoussée. La grandeur du champ électrique se calcule alors par :

$$\begin{aligned} E &= k\,Q / r^2 \\ &= (9{,}0 \times 10^9\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2})\,(92)\,(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C}) / (1 \times 10^{-10}\ \text{m})^2 \\ &= 1{,}32 \times 10^{13}\ \text{N C}^{-1}. \end{aligned}$$

b) L'électron est négatif ; il est attiré par le noyau en subissant une force égale à $F = q\,E = (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})\,(1{,}32 \times 10^{13}\ \text{N C}^{-1}) = 2{,}11 \times 10^{-6}\ \text{N}$.

---

9 La force qui s'exerce sur l'électron est d'origine électrique ; elle est égale à $F = q\,E$. Elle est responsable d'une accélération que l'on obtient à partir de la loi de Newton $F = m\,a$. En comparant les deux expressions, on déduit le champ électrique :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$E = m\,a\,/\,q = (9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})\,(1 \times 10^{8}\ \text{m s}^{-2})\,/\,(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})$$
$$= 5{,}69 \times 10^{-4}\ \text{N C}^{-1}.$$

Le champ a la direction du mouvement de l'électron mais est opposé à son accélération.

---

10 Le champ électrique est dirigé vers la charge négative. Sa grandeur est égale à $E = k\,Q\,/\,r^2 = (9{,}0 \times 10^{9}\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2})\,(1 \times 10^{-4}\ \text{C})\,/\,(0{,}1\ \text{m})^2 = 90 \times 10^{6}\ \text{N C}^{-1}$.

---

12 Si l'on place une charge positive en $y = -b$, elle se trouve alors à une distance $(2\,b)$ de la charge Q par laquelle elle est repoussée. Le champ $\mathbf{E_1}$ est dirigé vers le bas et s'écrit $\mathbf{E_1} = k\,Q\,(-\mathbf{y})\,/\,(2\,b)^2$. Elle est également repoussée par la charge $(2\,Q)$ dont le champ électrique associé est égal à $\mathbf{E_2} = k\,(2\,Q)\,\mathbf{y}\,/\,b^2$. Le champ résultant vaut $\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}$, soit $\mathbf{E} = (k\,Q\,/\,b^2)\,[(-1/4) + 2]\,\mathbf{y} = 7\,k\,Q\,\mathbf{y}\,/\,(4\,b^2)$.

---

13 La plaque est chargée négativement puisque le champ est dirigé vers elle. Au voisinage de l'une des plaques, le champ vaut $E = 2\,\pi\,k\,Q\,/\,A$. On calcule donc :

$$Q = -\,E\,A\,/\,(2\,\pi\,k)$$
$$= -\,(1 \times 10^{-4}\ \text{N C}^{-1})\,(0{,}1\ \text{m}^2)\,/\,[2\,\pi\,(9{,}0 \times 10^{9}\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2})]$$
$$= -\,17{,}7 \times 10^{-9}\ \text{C}.$$

---

14 (a) Le champ entre deux plaques se calcule par :

$$E = 4\,\pi\,k\,Q\,/\,A$$
$$= 4\,\pi\,(9{,}0 \times 10^{9}\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2})\,(1 \times 10^{-6}\ \text{C})\,/\,[(0{,}1\ \text{m})\,(0{,}1\ \text{m})]$$
$$= 11{,}3 \times 10^{6}\ \text{N C}^{-1}.$$

Le champ est dirigé vers la plaque chargée négativement. (b) Si l'on place un électron entre les plaques, il remonte le champ électrique vers la plaque positive, dirigé par une force dont la grandeur vaut :

$$F = q\,E = (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})\,(11{,}3 \times 10^{6}\ \text{N C}^{-1}) = 1{,}81 \times 10^{-12}\ \text{N}.$$

(c) Le travail se calcule par le produit $F\,d$ et vaut :

$$W = (1{,}81 \times 10^{-12}\ \text{N})\,(1 \times 10^{-2}\ \text{m}) = 18{,}1 \times 10^{-15}\ \text{J}.$$

16.3 LE POTENTIEL ÉLECTRIQUE

16 Le potentiel total s'obtient en sommant les contributions apportées par les deux charges. (a) $V = [k\,q\,/\,a] + [k\,(-3\,q)\,/\,a] = -2\,k\,q\,/\,a$. (b) La charge $+q$ se trouve alors à une distance $4\,a$ de l'endroit où l'on souhaite connaître V tandis que celle de $(-3\,q)$ est distante de $2\,a$. Le potentiel vaut donc :

$$V = [k\,q\,/\,(4\,a)] + [k\,(-3\,q)\,/\,(2\,a)] = -5\,k\,q\,/\,(4\,a).$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

17 Si cette position se trouve entre les deux charges, à gauche de l'origine, il faut que $V = [k\,q\,/\,(a - r)] + [k\,(-3\,q)\,/\,(a + r)] = 0$ si r est la distance par rapport à l'origine. On déduit que $r = a\,/\,2$, soit $x = -a\,/\,2$. Elle peut aussi se trouver à gauche de la charge $+q$ et il faut alors que :

$$V = [k\,q\,/\,(r - a)] + [k\,(-3\,q)\,/\,(r + a)] = 0.$$

On trouve que $r = 2\,a$ ou $x = -2\,a$. Si l'on suppose que la position demandée est à droite de l'origine, les calculs conduisent aux mêmes positions.

---

19 (a) Supposons que l'on place une charge positive au centre du carré. Les champs électriques dus aux deux charges situées sur le sommet en haut à gauche et en bas à droite sont égaux mais opposés; ils s'annulent mutuellement. Il en va de même pour les charges sur les deux autres sommets. Le champ électrique s'annule donc au centre du carré. (b) Le centre du carré se trouve à une distance égale à $a\,/\,\sqrt{2}$ de chacune des charges $+Q$. Le potentiel vaut donc $V = 4\,k\,Q\,\sqrt{2}\,/\,a$.

---

20 Par définition du potentiel électrique, on calcule :

$$\begin{aligned}\Delta V &= U\,/\,q = m\,v^2\,/\,(2\,q)\\ &= (6{,}64 \times 10^{-27}\ \text{kg})\,(1 \times 10^{7}\ \text{m s}^{-1})^2\,/\,[2\,(2)\,(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})]\\ &= 1{,}04 \times 10^{6}\ \text{V}.\end{aligned}$$

---

21 (a) L'électron, charge négative, sera attiré par la plaque positive alors que (b) le proton, particule positive, sera accéléré dans la direction de la plaque négative. (c) L'énergie cinétique sera identique pour les deux particules puisque leurs charges sont égales et la différence de potentiel est constante. (d) Puisque leurs énergies cinétiques sont identiques, on peut écrire $m_e\,v_e^2\,/\,2 = m_p\,v_p^2\,/\,2$ et calculer le rapport des vitesses comme la racine carrée du rapport inverse des masses : $v_e\,/\,v_p = [m_p\,/\,m_e]^{1/2} = [(1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg})\,/\,(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})]^{1/2} = 42{,}9$.

16.4 DIPÔLES ÉLECTRIQUES

24 Par la définition du moment dipolaire, on calcule :

$$q = p\,/\,\ell = (1 \times 10^{-45}\ \text{C m})\,/\,(1 \times 10^{-15}\ \text{m}) = 1 \times 10^{-30}\ \text{C},$$

soit $(1 \times 10^{-30}\ \text{C})\,/\,(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C}\,e^{-1}) = 6{,}25 \times 10^{-12}\ e$.

---

25 Lorsque le dipôle est parallèle au champ, son énergie vaut $-p\,E$ alors que dans la position antiparallèle, elle vaut $+p\,E$. Pour retourner le dipôle, il faut fournir une énergie égale à $p\,E - (-pE) = 2\,p\,E$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

27 Le moment d'un couple de force se calcule par $\tau = p\,E \sin\theta$. (a) Lorsque le dipôle est parallèle au champ, l'angle θ est nul et le sinus l'est aussi; la grandeur du moment du couple est nulle. (b) Dans cette situation, l'angle θ vaut 90 ° et le sinus est égal à 1. Le moment du couple vaut alors :

$$\tau = p\,E = (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})\,(1 \times 10^{-10}\ \text{m})\,(1 \times 10^{6}\ \text{N C}^{-1})$$
$$= 1{,}6 \times 10^{-23}\ \text{N m}.$$

(c) L'angle θ est de 180 ° et le sinus s'annule à nouveau. Le moment du couple est donc nul.

16.5 CAPACITÉ

28 La définition de la capacité d'un condensateur permet de calculer la charge $Q = V\,C = (1000\ \text{V})\,(100 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 100 \times 10^{-3}\ \text{C} = 100\ \text{mC}$.

---

30 Lorsqu'un condensateur est formé de deux lames conductrices parallèles séparées par un espace vide, la capacité du condensateur s'exprime par :

$$C = \varepsilon_0\,A / \ell = [1 / (4\,\pi\,k)]\,(0{,}1\ \text{m})\,(0{,}1\ \text{m}) / (1 \times 10^{-3}\ \text{m})$$
$$= 8{,}84 \times 10^{-11}\ \text{F} = 88{,}4\ \text{pF}.$$

16.6 EFFETS DES DIÉLECTRIQUES

31 Le tableau 16.1 donne une valeur de la constante diélectrique du papier égale à 3,5. La capacité du condensateur se calcule alors par :

$$C = K\,\varepsilon_0\,A / \ell = (3{,}5)\,[1 / (4\,\pi\,k)]\,A / (1 \times 10^{-4}\ \text{m})$$

et permet de déterminer $A = 3{,}23\ \text{m}^2$.

---

32 Puisque la surface des plaques et leur interdistance sont inchangées, le rapport de la capacité des condensateurs s'exprime par :

$$C_{verre} / C_{air} = (1 \times 10^{-5}\ \text{F}) / (2 \times 10^{-6}\ \text{F}) = K_{verre} / (1{,}00059)$$

et l'on détermine $K_{verre} = (1{,}00059)\,(5) = 5{,}00295$.

---

34 (a) La définition de la capacité permet de calculer la charge des lames par $Q = VC = (50\ \text{V})\,(2 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 0{,}1\ \text{mC}$. (b) Le champ électrique se calcule par $E = V / \ell = (50\ \text{V}) / (1 \times 10^{-3}\ \text{m}) = 50 \times 10^{3}\ \text{V m}^{-1}$. (c) La capacité d'un condensateur augmente d'un facteur égal à la constante diélectrique. Sa nouvelle valeur est égale à $C = (5)\,(2 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 10\ \mu F$. Comme la différence de potentiel ne change pas, on peut prévoir que :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$Q = VC = (50\ \text{V})\ (10 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 0{,}5\ \text{mC}.$$

(d) Lorsqu'on introduit le diélectrique entre les plaques, le champ électrique est réduit d'un facteur égal à la constante diélectrique. Il vaut donc :

$$E = (50 \times 10^3\ \text{V m}^{-1}) / (5) = 1 \times 10^4\ \text{V m}^{-1}.$$

16.7 ENERGIE EMMAGASINÉE DANS UN CONDENSATEUR

36 (a) On calcule l'énergie emmagasinée dans le condensateur par le produit de la puissance par le temps : $U = (1 \times 10^4\ \text{W})\ (2 \times 10^{-3}\ \text{s}) = 20\ \text{J}$. On peut déduire la différence de potentiel initiale par $U = C\ V^2 / 2$. On calcule $V = 894\ \text{V}$. (b) Suivant la définition de la capacité d'un condensateur, la charge vaut :

$$Q = VC = (894\ \text{V})\ (50 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 4{,}5 \times 10^{-2}\ \text{C}.$$

---

39 (a) La charge des plaques se calcule par le produit de la différence de potentiel par la capacité du condensateur qui vaut :

$$C = K\ \varepsilon_0\ A / \ell = (1{,}00059)\ [1 / (4\ \pi\ k)]\ (0{,}1\ \text{m}^2) / (0{,}01\ \text{m}) = 8{,}85 \times 10^{-11}\ \text{F}.$$

On en déduit la charge par :

$$Q = V\ C = (1000\ \text{V})\ (8{,}85 \times 10^{-11}\ \text{F}) = 8{,}85 \times 10^{-8}\ \text{C}.$$

(b) L'énergie emmagasinée se calcule par :

$$U = Q\ V / 2 = (8{,}85 \times 10^{-8}\ \text{C})\ (1000\ \text{V}) / 2 = 4{,}43 \times 10^{-5}\ \text{J}.$$

(c) La différence de potentiel se déduit du rapport $V = Q / C$. Quand on introduit un diélectrique entre les plaques, la capacité du condensateur augmente d'un facteur égal à la constante diélectrique. Par conséquent, la différence de potentiel diminue d'un même facteur et vaut $V = 100\ \text{V}$. L'énergie emmagasinée diminue elle aussi du même facteur : $U = 4{,}43 \times 10^{-6}\ \text{J}$.

SOLUTION DES PROBLÈMES

40 Le mouvement de l'électron est un MRUA; la loi des vitesses permet d'exprimer le temps en fonction de l'accélération :

$$t = (1 \times 10^6\ \text{m s}^{-1}) / a.$$

En introduisant le temps dans la loi des espaces, on calcule l'accélération $a = (1 \times 10^6\ \text{m s}^{-1})^2 / [2\ (0{,}2\ \text{m})] = 2{,}5 \times 10^{12}\ \text{m s}^{-2}$. Le mouvement est provoqué par une force électrique; on peut donc calculer :

$$E = m\ a / q = (9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})\ (2{,}5 \times 10^{12}\ \text{m s}^{-2}) / (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})$$
$$= 14{,}2\ \text{N C}^{-1}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

42 Le champ électrique est toujours dirigé vers l'origine, direction que suivrait une particule positive placée aux différents endroits.

(a) $E = k\,Q / r^2 = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}})\,(1 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}) / (1\ \mathrm{m})^2 = 9 \times 10^3\ \mathrm{N\,C^{-1}}$.

(b) $E = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}})\,(1 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}) / (-2\ \mathrm{m})^2 = 2{,}25 \times 10^3\ \mathrm{N\,C^{-1}}$.

(c) La distance r se calcule par $r^2 = 2^2 + 2^2 = 8\ \mathrm{m^2}$ et le champ électrique vaut :

$$E = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}})\,(1 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}) / (8\ \mathrm{m^2}) = 1125\ \mathrm{N\,C^{-1}}.$$

---

46 Comme la particule positive est injectée dans le sens opposé au champ, sa vitesse s'annule après un laps de temps donné par la loi des vitesses du MRUA : $t = v / a$. Pendant ce temps, l'espace parcouru vaut $x = v^2 / (2\,a)$. La décélération est due à la force électrique et s'exprime par $a = q\,E / m$. L'expression finale du déplacement s'écrit $x = m\,v^2 / (2\,q\,E)$.

---

49 (a) La définition du moment dipolaire électrique permet de calculer :

$$\ell = p / q = (6{,}13 \times 10^{-30}\ \mathrm{C}) / (1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}) = 3{,}83 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}.$$

Le rapport au rayon de l'atome d'hydrogène vaut :

$$(3{,}83 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}) / (5{,}29 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}) = 0{,}724.$$

(b) Pour le retourner, il faut lui donner une énergie égale à :

$$|-p\,E \cos 0° + p\,E \cos 180°| = 2\,p\,E = 2\,(6{,}13 \times 10^{-30}\ \mathrm{C\,m})\,(1 \times 10^6\ \mathrm{V\,m^{-1}})$$
$$= 1{,}23 \times 10^{-23}\ \mathrm{J} = 7{,}66 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV}.$$

(c) Avec les 0,04 eV, les molécules d'eau ont suffisamment d'énergie pour se retourner.

---

50 (a) Comme le moment dipolaire est dirigé de $-q$ à $+q$, la somme vectorielle des deux moments dipolaires est dirigée vers la gauche, horizontalement. (b) La grandeur du moment dipolaire total se calcule par $2\,q\,l \cos 52°$ et permet de déterminer :

$$q = p / (2\,\ell \cos 52°) = (6{,}0 \times 10^{-30}\ \mathrm{C\,m}) / [2\,(9{,}65 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}) \cos 52°]$$
$$= 5{,}05 \times 10^{-20}\ \mathrm{C} = 0{,}316\,e.$$

---

51 (a) Sachant qu'une mole contient N_A ions de Na^+, soit une charge de :

$$N_A\,(1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}),$$

la charge transférée par heure se calcule par :

$$Q = (3 \times 10^{-11}\ \mathrm{mole\,s^{-1}\,cm^{-2}})\,(3600\ \mathrm{s})\,[2\,\pi\,(5 \times 10^{-3}\ \mathrm{cm})\,(10\ \mathrm{cm})]$$
$$(6{,}02 \times 10^{23}\ \mathrm{ions\,mole^{-1}})\,(1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C\,ions^{-1}})$$
$$= 3{,}27 \times 10^{-3}\ \mathrm{C}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(b) Le travail est le produit de la différence de potentiel V par la charge Q transférée. Il vaut $W = V\,Q = (0{,}09\ \text{V})\ (3{,}27 \times 10^{-3}\ \text{C}) = 2{,}9 \times 10^{-4}\ \text{J}$.

---

52 Comme la différence de potentiel aux bornes des condensateurs est identique, on peut écrire $V = Q_1 / C_1 = Q_2 / C_2 = (Q_1 + Q_2) / C_p$. De la dernière égalité, on peut déduire $C_p = (Q_1 + Q_2)\ C_2 / Q_2 = Q_1\ C_2 / Q_2 + C_2$ et de la seconde $Q_1 / Q_2 = C_1 / C_2$. En introduisant cette dernière expression dans la précédente, on démontre que $C_p = C_1 + C_2$.

---

55 La différence de potentiel totale V se partage entre les bornes des deux condensateurs de sorte que $V = V_1 + V_2$. Par définition de la capacité d'un condensateur, $V = Q / C$ et l'égalité précédente devient $Q / C_s = Q / C_1 + Q / C_2$ puisque la charge est la même sur les deux condensateurs. En simplifiant par la charge Q, on démontre que $1 / C_s = 1 / C_1 + 1 / C_2$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre **17**

Courants continus

RAPPELS

Le courant électrique moyen dans un fil est la charge ΔQ qui traverse une section droite du fil par unité de temps : $i = \Delta Q / \Delta t$ tandis que le courant instantané s'exprime par $i = \mathrm{d}Q / \mathrm{d}t$. Par convention, le courant est supposé être un flux de particules positives. Dans un conducteur métallique, les électrons de conduction peuvent se déplacer librement parmi les ions positifs du réseau. Quand un champ électrique règne dans un fil, les électrons acquièrent une faible vitesse de dérive v, parallèle à la force électrique. S'il y a n électrons de conduction par unité de volume et que la section droite du fil est A, le courant est défini comme $i = e\, n\, A\, v$.

Les conducteurs ohmiques obéissent à la loi d'Ohm $V = R\, i$; leur résistance est constante. La loi de Pouillet indique que la valeur de la résistance dépend de la taille, la forme et la composition du conducteur. Elle s'exprime par $R = \rho\, \ell / A$ où ρ est la résistivité du matériau. La conductivité d'un matériau est l'inverse de sa résistivité : $\sigma = 1 / \rho$.

Une source d'énergie, appelée source de FEM (force électromotrice), est nécessaire pour maintenir un courant continu dans un circuit. Remarquons qu'une pile ou un générateur n'est pas une source de charge électrique; il convertit une énergie non électrique (chimique par exemple) en énergie électrique. Des effets dissipatifs de diverse nature se produisent dans les piles et générateurs réels. La différence de potentiel aux bornes d'une telle pile est donc différente de la FEM quand elle débite un courant.

Lorsqu'un élément d'un circuit présente à ses bornes une différence de potentiel V et est parcouru par un courant i, la puissance fournie ou dissipée est égale au produit $V\, i$. S'il s'agit d'un générateur, la différence de potentiel est égale à la FEM et la puissance fournie s'écrit $P = E\, i$. Dans le cas d'une résistance ohmique R, la puissance dissipée peut aussi s'écrire $P = R\, i^2$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Les deux règles de Kirchhoff régissent le parcours du courant dans un circuit électrique. Elles stipulent que la somme des différences de potentiel le long de tout chemin fermé est nulle et qu'en tout point d'un circuit, le courant entrant doit être égal au courant sortant. Lorsque des résistances sont connectées en série, une seule résistance équivalente, égale à la somme des différentes résistances, produit le même courant dans le circuit. Lorsque des résistances sont connectées en parallèle, une résistance équivalente unique R_p donnera lieu au même courant si :

$$1 / R_p = 1 / R_1 + 1 / R_2 + 1 / R_3 + ...$$

Le voltmètre et l'ampèremètre sont les deux appareils de mesure fondamentaux. Le premier permet de mesurer la différence de potentiel aux bornes d'un élément du circuit; il se place en parallèle avec cet élément. Pour que le courant qui y circule soit négligeable, il faut que sa résistance soit très grande; on place donc une résistance R_s très élevée en série avec celle du galvanomètre R_g. La différence de potentiel aux bornes du voltmètre s'écrit $V = i_g\ (R_g + R_s)$. L'ampèremètre doit être inséré en série et sert à la mesure du courant qui circule dans un élément de circuit. Pour perturber le moins possible le courant existant, il faut que la résistance de l'ampèremètre soit réduite au maximum. Pour le construire, on place, en parallèle sur la résistance R_g du galvanomètre, une très petite résistance r. Si le courant dans le circuit est i et celui sélectionné dans le galvanomètre i_g, on peut écrire $i_g\ R_g = (i - i_g)\ r$.

Dans un circuit contenant un condensateur de capacité C, une résistance R et une FEM E, le bilan des différences de potentiel aux bornes des différents éléments s'écrit $E - i\ R - Q / C = 0$. Dans le cas de la charge d'un condensateur, le courant initial s'exprime par $i_0 = E / R$ puisqu'en $t = 0$ s, la charge du condensateur est nulle. Il faut un temps donné par le produit $T = R\ C$, appelé constante de temps, pour que la charge du condensateur atteigne 63 % de sa valeur finale. Le condensateur est complètement chargé lorsque sa charge atteint la valeur $Q_f = E\ C$; à ce moment, le courant s'annule. La charge du condensateur suit la relation : $Q = Q_f\ (1 - e^{-t/T})$. Le courant obéit à la progression $i = i_0\ e^{-t/T}$. La loi de décharge d'un condensateur s'écrit $Q = Q_0\ e^{-t/T}$ où Q_0 est la charge initiale du condensateur. Le courant suit une loi similaire $i = i_0\ e^{-t/T}$.

SOLUTION DES EXERCICES

17.1 COURANT ÉLECTRIQUE

2 La charge qui se déplace vaut $\Delta Q = i\ \Delta t = (0{,}5\ \text{A})\ (3600\ \text{s}) = 1800\ \text{C}$. Cette charge équivaut à un nombre d'électrons égal à :

$$(1800\ \text{C}) / (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C}\ e^{-1}) = 1{,}125 \times 10^{22}\ \text{électrons.}$$

Ces électrons sont capables de neutraliser :

$$(1{,}125 \times 10^{22}\ \text{électrons}) / (2\ \text{électrons ion}^{-1}) = 5{,}625 \times 10^{21}\ \text{ions.}$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

3 Le courant est le produit de la charge de l'électron, de la densité des électrons de conduction, de la surface et de la vitesse de dérive moyenne. On calcule donc :
$v = i / (e\,n\,A) = (10\text{ A}) / [(1{,}6 \times 10^{-19}\text{ C})\,(5{,}8 \times 10^{28}\text{ m}^{-3})\,\pi\,(1 \times 10^{-3}\text{ m})^2]$
$= 3{,}43 \times 10^{-4}\text{ m s}^{-1}$.

---

5 La charge qui circule entre les électrodes vaut :
$$\Delta Q = i\ \Delta t = (0{,}04\text{ A})\,(3600\text{ s}) = 1440\text{ C}.$$
Cette charge correspond à l'arrivée de $(1440\text{ C}) / (1{,}6 \times 10^{-19}\text{ C}\,e^{-1}) = 9 \times 10^{21}$ électrons qui neutralisent $4{,}5 \times 10^{21}$ ions. La masse totale de ces atomes formés vaut $(4{,}5 \times 10^{21}\text{ atomes})\,(63{,}6\text{ uma atome}^{-1})\,(1{,}67 \times 10^{-27}\text{ kg uma}^{-1}) = 0{,}48\text{ g}$.

17.2 LA RÉSISTANCE

7 Par la loi d'Ohm, la résistance vaut $R = V / i = (10\text{ V}) / (4\text{ A}) = 2{,}5\ \Omega$.

---

8 Un conducteur ohmique a une résistance constante calculable par $R = V / i$. La comparaison des deux rapports $(2\text{ V}) / (10\text{ A}) = (6\text{ V}) / i$ permet de déterminer le courant $i = (6\text{ V})\,(10\text{ A}) / (2\text{ V}) = 30\text{ A}$.

---

9 La loi de Pouillet permet de déterminer la valeur de la résistance ohmique $R = \rho\,\ell / A$ où ρ est la résistivité du cuivre. On obtient :
$$R = (1{,}72 \times 10^{-8}\ \Omega\text{ m})\,(10\text{ m}) / [\pi\,(4 \times 10^{-5}\text{ m})^2] = 34{,}2\ \Omega.$$

---

12 (a) La loi d'Ohm permet de calculer $R = V / i = (2\text{ V}) / (0{,}4\text{ A}) = 5\ \Omega$. (b) Par la même loi, $R = V / i = (8\text{ V}) / (1{,}6\text{ A}) = 5\ \Omega$. (c) A chaque mesure, V et i varient alors que leur rapport, R, reste constant. Il s'agit donc bien d'un conducteur ohmique.

17.3 SOURCES D'ÉNERGIE DANS LES CIRCUITS ÉLECTRIQUES

17 (a) Grâce à la loi d'Ohm, on peut calculer $i = V / R = (12\text{ V}) / (2\ \Omega) = 6\text{ A}$. (b) La définition du courant permet de déterminer :
$$\Delta Q = i\ \Delta t = (6\text{ A})\,(10\text{ s}) = 60\text{ C}.$$
(c) Dans la batterie, le champ électrique fait passer les charges positives (courant conventionnel) de la borne négative à la borne positive, soit en remontant le champ. Le travail effectué vaut :
$$-V\,i\ \Delta t = -(12\text{ V})\,(6\text{ A})\,(10\text{ s}) = -720\text{ J}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(d) Dans la résistance, les charges circulent dans le sens du champ. Le travail effectué se calcule par $R\,i^2\,\Delta t = (2\ \Omega)\ (6\ \text{A})^2\ (10\ \text{s}) = 720$ J. (e) Le travail total est la somme des deux contributions : il est donc nul. (f) L'énergie convertie en chaleur est celle perdue dans la résistance, soit 720 J. (g) La transformation d'énergie non électrique en énergie électrique est la source de l'énergie dissipée.

18 Les trois résistances qui constituent le circuit extérieur sont montées en série. La résistance totale vaut donc $R = (1\ \Omega) + (2\ \Omega) + (6\ \Omega) = 9\ \Omega$. (a) La loi d'Ohm permet de calculer le courant par $i = V / R = (6\ \text{V}) / (9\ \Omega) = (2/3)$ A. (b) La différence de potentiel aux bornes de chaque résistance est égale à $V = R\,i$, soit respectivement :

$(1\ \Omega)\ ((2/3)\ \text{A}) = (2/3)$ V, $(2\ \Omega)\ ((2/3)\ \text{A}) = (4/3)$ V et $(6\ \Omega)\ ((2/3)\ \text{A}) = 4$ V.

19 (a) Trois piles sont connectées en série, dont deux en opposition. La FEM résultante se limite à 1,5 V. La résistance totale du circuit extérieur est la somme des deux résistances puisqu'elles sont connectées en série. Elle vaut :

$$R = (6\ \Omega) + (4\ \Omega) = 10\ \Omega.$$

La loi d'Ohm permet ensuite de calculer le courant par :

$$i = V / R = (1{,}5\ \text{V}) / (10\ \Omega) = 0{,}15\ \text{A}.$$

(b) Aux bornes de la résistance de 4 Ω, la différence de potentiel se calcule par $V = R\,i = (4\ \Omega)\ (0{,}15\ \text{A}) = 0{,}6$ V tandis qu'aux bornes de celle de 6 Ω, elle vaut $V = R\,i = (6\ \Omega)\ (0{,}15\ \text{A}) = 0{,}9$ V.

17.4 LA PUISSANCE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES

21 (a) La seule résistance du circuit étant la résistance interne de la batterie, le courant est donné par $i = E / r_i = (12\ \text{V}) / (0{,}004\ \Omega) = 3 \times 10^3$ A et la puissance vaut $P = E\,i = (12\ \text{V})\ (3 \times 10^3\ \text{A}) = 36 \times 10^3$ W. (b) Le démarreur joue le rôle d'une résistance extérieure R. La résistance totale vaut dans ce cas $R_T = (0{,}004\ \Omega) + R$. La loi d'Ohm permet alors de calculer la résistance inconnue R en utilisant $E = R_T\,i$. On trouve $R = (E / i) - (0{,}004\ \Omega) = 0{,}146\ \Omega$. (c) La puissance fournie au démarreur vaut $P = R\,i^2 = (0{,}146\ \Omega)\ (80\ \text{A})^2 = 934$ W. (d) La puissance dissipée dans la batterie l'est dans la résistance interne et se calcule par $r_i\,i^2 = (0{,}004\ \Omega)\ (80\ \text{A})^2 = 25{,}6$ W.

22 L'énergie est égale au produit de la puissance consommée et du temps nécessaire pour griller le pain. On trouve que cette énergie vaut :

$$(1{,}5\ \text{kW})\ (1/60\ \text{h}) = 25 \times 10^{-3}\ \text{kW h}.$$

Le coût de l'opération est calculé par :

$$(25 \times 10^{-3}\ \text{kW h})\ (6\ \text{cents}\ (\text{kW h})^{-1}) = 0{,}150\ \text{cents}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

24 Dans chaque fil circule un courant de 10 A sur une longueur de 30 m. La résistance de chaque fil est égale à 30 fois la résistance d'un fil de longueur unitaire puisque la loi de Pouillet indique une proportionnalité directe entre la valeur d'une résistance et la longueur du fil qui la compose. (a) La chute de potentiel dans chaque fil s'obtient par la loi d'Ohm :

$$V = R\,i = 30\ (5{,}2 \times 10^{-3}\ \Omega)\ (10\ \text{A}) = 1{,}56\ \text{V}$$

et la puissance totale dissipée vaut $2\ V\,i = 2\ (1{,}56\ \text{V})\ (10\ \text{A}) = 31{,}2\ \text{W}$.

---

25 Les deux générateurs du circuit sont en opposition. C'est la FEM la plus grande qui fait circuler le courant dans le sens anti-horlogique. La FEM résultante est la différence entre les deux, soit 4 V. La résistance totale du circuit se calcule par la somme des deux résistances en série, soit $R = (6\ \Omega) + (4\ \Omega) = 10\ \Omega$. (a) Le courant est déterminé par application de la loi d'Ohm :

$$i = V / R = (4\ \text{V}) / (10\ \Omega) = 0{,}4\ \text{A}.$$

(b) La puissance fournie par la pile de 12 V se calcule par $P = E\,i$ et vaut :

$$P = (12\ \text{V})\ (0{,}4\ \text{A}) = 4{,}8\ \text{W}.$$

La puissance fournie à celle de 8 V vaut $-\ (8\ \text{V})\ (0{,}4\ \text{A}) = -\ 3{,}2\ \text{W}$. (c) Dans une résistance, la puissance dissipée s'évalue par $P = R\,i^2$ et vaut :

$$(6\ \Omega)\ (0{,}4\ \text{A})^2 = 0{,}96\ \text{W}$$

dans la résistance de 6 Ω et $(4\ \Omega)\ (0{,}4\ \text{A})^2 = 0{,}64\ \text{W}$ dans celle de 4 Ω.

---

26 La résistance totale du circuit est égale à $R = (3\ \Omega) + (1\ \Omega) = 4\ \Omega$. (a) Sachant que le courant circule dans le sens anti-horlogique, on déduit que $E > 2$ V. Par la loi d'Ohm, on peut écrire $E - (2\ \text{V}) = (4\ \Omega)\ (2\ \text{A})$ et déterminer $E = 10$ V. (b) Dans les résistances, la puissance fournie se calcule par $R\,i^2$; elle vaut donc $(1\ \Omega)\ (2\ \text{A})^2 = 4\ \text{W}$ dans la résistance de 1 Ω et $(3\ \Omega)\ (2\ \text{A})^2 = 12\ \text{W}$ dans celle de 3 Ω. (c) La puissance fournie par la FEM de 10 V est égale à :

$$V\,i = (10\ \text{V})\ (2\ \text{A}) = 20\ \text{W}$$

et celle dissipée dans la FEM de 2 V est égale à $(2\ \text{V})\ (2\ \text{A}) = 4\ \text{W}$. La somme des puissances dissipées, $(4\ \text{W}) + (4\ \text{W}) + (12\ \text{W})$, est donc bien égale à la puissance fournie, (20 W).

17.5 RÉSISTANCES EN SÉRIE ET EN PARALLÈLE. LES RÈGLES DE KIRCHHOFF

29 (a) Par l'expression de la puissance $P = V\,i$, on peut déterminer le courant qui circule dans les 25 ampoules : $i = P / V = (500\ \text{W}) / (120\ \text{V}) = 4{,}17\ \text{A}$. (b) Les ampoules étant connectées en série, la résistance totale est égale à $R = 25\ r$ où r est la résistance d'une ampoule. La loi d'Ohm permet alors d'écrire $V = R\,i = 25\ r\,i$ et de calculer $r = (120\ \text{V}) / [25\ (4{,}17\ \text{A})] = 1{,}15\ \Omega$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

31 Tous les appareils sont alimentés en 230 V : ils sont connectés en parallèle et chaque appareil prend une part du courant total égale à :

$$P / V = (100 \text{ W}) / (230 \text{ V}) = 434{,}8 \text{ mA}.$$

On peut donc connecter :

$$(200 \text{ A}) / (434{,}8 \times 10^{-3} \text{ A appareil}^{-1}) = 460 \text{ appareils en parallèle}.$$

---

32 (a) La puissance peut s'exprimer de deux façons : $P = V\,i$ et $P = R\,i^2$; la première expression permet de déterminer $i = P / V = (1800 \text{ W}) / (120 \text{ V}) = 15 \text{ A}$ et par la seconde, on calcule $R = P / i^2 = (1800 \text{ W}) / (15 \text{ A})^2 = 8\ \Omega$. (b) La puissance dissipée dans la faible résistance du cordon vaut :

$$R\,i^2 = (0{,}021\ \Omega)\,(15 \text{ A})^2 = 4{,}73 \text{ W}.$$

---

33 (a) En utilisant l'expression de la puissance individuelle des ampoules, on peut calculer le courant qui y circule : $i = P / V = (60 \text{ W}) / (120 \text{ V}) = 0{,}5 \text{ A}$ et déterminer la résistance d'une lampe par $r = P / i^2 = (60 \text{ W}) / (0{,}5 \text{ A})^2 = 240\ \Omega$. (b) Le calcul de la résultante effective des ampoules branchées en parallèle s'effectue par $1 / R = 6 / r$ et l'on détermine $R = r / 6 = (240\ \Omega) / 6 = 40\ \Omega$.

---

34 (a) En connaissant la puissance consommée par chaque lampe, on peut calculer le courant qui y circule et déterminer ensuite leur résistance. On trouve :

$$i = P / V = (100 \text{ W}) / (120 \text{ V}) = 0{,}833 \text{ A et } r = P / i^2 = 144\ \Omega.$$

Si on les connecte en série, elles forment une résistance équivalente :

$$R = 2\ (144\ \Omega) = 288\ \Omega.$$

La loi d'Ohm permet de déterminer le courant qui circule dans l'ensemble par $i = V / R = (120 \text{ V}) / (288\ \Omega) = 0{,}417 \text{ A}$. La puissance totale consommée vaut alors $R\,i^2 = (288\ \Omega)\,(0{,}417 \text{ A})^2 = 50 \text{ W}$. (b) Le courant qui y circule est la moitié de celui que l'on obtient lorsqu'elles sont connectées directement sur le secteur. Les ampoules sont donc moins brillantes que précédemment.

---

37 Dans ce circuit, deux résistances sont montées en parallèle. Leur résistance équivalente, $[(1/3\ \Omega) + (1/6\ \Omega)]^{-1} = 2\ \Omega$, est mise ensuite en série avec la résistance de 2 Ω. La résistance équivalente totale est alors :

$$R = (2\ \Omega) + (2\ \Omega) = 4\ \Omega.$$

(a) Le courant dans la résistance de 2 Ω est le même que le courant total, calculé par la loi d'Ohm, $i = E / R = (6 \text{ V}) / (4\ \Omega) = 1{,}5 \text{ A}$. (b) La différence de potentiel aux bornes de la résistance de 3 Ω est identique à celle que l'on trouve aux bornes de la résistance équivalente de 2 Ω. Cette différence de potentiel se calcule par la loi d'Ohm $V = R\,i = (2\ \Omega)\,(1{,}5 \text{ A}) = 3 \text{ V}$. (c) Connaissant la différence de potentiel aux bornes de cette résistance, on calcule le courant qui y circule :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$i = V / R = (3\ \text{V}) / (3\ \Omega) = 1\ \text{A}.$$

---

38 Dans ce circuit, deux résistances R sont en série; leur résistance équivalente est égale à $2\ R$. Cette résistance équivalente est en parallèle sur une autre résistance R ; la résistance totale du circuit se calcule par $R_T = [1/R + 1/(2\ R)]^{-1} = 2\ R / 3$. Le courant du générateur s'obtient alors par la loi d'Ohm $i = E / R_T = 3\ E / (2\ R)$.

17.6 VOLTMÈTRES ET AMPÈREMÈTRES

40 (a) Pour construire un voltmètre, on place, en série avec la résistance R_g du galvanomètre, une très forte résistance R_s de façon à ce que le voltmètre ne perturbe pas le courant débité. L'indication du voltmètre est donnée par :

$$V = i_g\ (R_g + R_s).$$

On détermine alors :

$$R_s = V / i_g - R_g = (10\ \text{V}) / (1 \times 10^{-5}\ \text{A}) - (100\ \Omega) = 1\ \text{M}\Omega.$$

(b) Pour construire un ampèremètre qui ne perturbe pas le courant total, on place une résistance r très petite en parallèle sur celle du galvanomètre. Aux bornes du galvanomètre, on peut écrire $R_g\ i_g = (i - i_g)\ r$ et calculer :

$r = R_g\ i_g / (i - i_g) = (100\ \Omega)\ (1 \times 10^{-5}\ \text{A}) / [(10\ \text{A}) - (1 \times 10^{-5}\ \text{A})] = 100\ \mu\Omega.$

17.7 CIRCUITS CONTENANT UNE RÉSISTANCE ET UN CONDENSATEUR

42 (a) La constante de temps d'un circuit contenant une résistance et un condensateur vaut $T = R\ C = (1000\ \Omega)\ (1 \times 10^{-5}\ \text{F}) = 1 \times 10^{-2}$ s. (b) La charge finale du condensateur s'obtient lorsque le courant s'annule. Elle vaut donc :

$$Q_f = E\ C = (100\ \text{V})\ (1 \times 10^{-5}\ \text{F}) = 1 \times 10^{-3}\ \text{C}.$$

---

43 La charge finale du condensateur est égale à Q_0 / e^2 si Q_0 est la charge initiale. La loi de décharge du condensateur conduit à l'expression $Q_0 / \text{e}^2 = Q_0\ \text{e}^{-t/T}$ qui permet de déterminer l'instant t où la charge finale est atteinte. En divisant par Q_0 les deux termes de l'égalité et en prenant le logarithme népérien des deux membres, on trouve $2 = t / T$ et l'on déduit :

$$t = 2\ R\ C = 2\ (100\ \Omega)\ (1 \times 10^{-4}\ \text{F}) = 2 \times 10^{-2}\ \text{s}.$$

---

44 La loi d'Ohm permet d'écrire $R = V / i$ et par définition du courant, $i = Q / t$. L'expression de R est alors $R = V\ t / Q$. La capacité d'un condensateur est définie par $C = Q / V$. Le produit $R\ C$ représente donc bien un temps.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

45 (a) Le courant initial tient sa valeur du moment où la charge du condensateur est encore nulle. Il vaut $i_0 = E / R = (6\ \text{V}) / (500\ \Omega) = 12 \times 10^{-3}$ A. (b) Le courant s'exprime par $i = i_0\ e^{-t/T}$ où $i = i_0 / e$. Après simplification de i_0 et après avoir pris le logarithme népérien des deux termes de l'égalité, on trouve :

$$t = T = R\,C = (500\ \Omega)\,(10 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 5 \times 10^{-3}\ \text{s}.$$

17.8 SÉCURITÉ ÉLECTRIQUE

46 La réponse est fournie par la loi d'Ohm, qui indique qu'un courant i circulera dans un conducteur de résistance R si la différence de potentiel à ses bornes est $V = R\,i$. Ici, (a) un courant de 10×10^{-3} A circulera dans la résistance de 1000 Ω lorsque $V = (1000\ \Omega)\,(10 \times 10^{-3}\ \text{A}) = 10$ V. (b) Pour obtenir un courant de 100×10^{-3} A, on doit créer une différence de potentiel dix fois plus élevée, soit $V = 100$ V.

---

47 Dans l'exercice 17-46, on met en évidence qu'une personne qui a les mains humides peut présenter une résistance de 1000 Ω. Si la résistance interne de la batterie n'est pas trop grande, une différence de potentiel de 12 volts peut être maintenue en délivrant un courant $i = V / R = (12\ \text{V}) / (1000\ \Omega) = 12$ mA. Ce courant ne peut pas causer la fibrillation ventriculaire, mais est suffisant pour bloquer les contrôles musculaires.

17.9 APPLICATIONS DES MESURES DE RÉSISTANCE

48 Cette expérience constitue un exemple d'application de la loi de Pouillet où le conducteur est constitué par l'électrolyte existant entre les deux électrodes. On calcule sa résistivité par :

$$\rho = R\,A / \ell = (370\ \Omega)\,(1{,}4 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) / (4 \times 10^{-2}\ \text{m}) = 1{,}295\ \Omega\ \text{m}.$$

---

49 (a) Par définition de la constante de la cellule, on calcule :

$$k = R\,\sigma = (190\ \Omega)\,(0{,}277\ \Omega^{-1}\ \text{m}^{-1}) = 52{,}63\ \text{m}^{-1}.$$

(b) L'application de la loi de Pouillet permet de déterminer :

$$\ell = R\,A / \rho = R\,A\,\sigma = (190\ \Omega)\,(1{,}2 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)\,(0{,}277\ \Omega^{-1}\ \text{m}^{-1})$$
$$= 6{,}32 \times 10^{-3}\ \text{m}.$$

---

51 La constante k d'une cellule a une valeur fixe. On peut donc égaler son expression dans le cas des deux électrolytes : $(156\ \Omega)\,(0{,}277\ \Omega^{-1}\ \text{m}^{-1}) = (755\ \Omega)\,\sigma$ et déterminer $\sigma = 57{,}23 \times 10^{-3}\ \Omega^{-1}\ \text{m}^{-1}$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

SOLUTION DES PROBLÈMES

52 (a) Le courant est défini par le rapport $i = \Delta Q / \Delta t$. La charge parcourant le système vaut $\Delta Q = i\ \Delta t = (4\text{ A})\ (30\text{ min})\ (60\text{ s min}^{-1}) = 7{,}2 \times 10^3\text{ C}$. (b) Cette charge divisée par celle d'un électron permet de calculer le nombre d'électrons transportés :

$$n = (7{,}2 \times 10^3\text{ C}) / (1{,}6 \times 10^{-19}\text{ C électron}^{-1}) = 45 \times 10^{21}\text{ électrons.}$$

(c) Le nombre d'ions neutralisés est égal au nombre d'électrons transportés. La masse totale de l'argent déposé, 7,84 g, correspond au nombre n d'atomes. Sachant qu'une mole, 107,9 g, contient N_A atomes, on déduit que :

$$N_A = (107{,}9\text{ g})\ (45 \times 10^{21}\text{ atomes}) / (7{,}84\text{ g}) = 6{,}19 \times 10^{23}\text{ atomes.}$$

---

54 (a) La loi de Pouillet permet de calculer cette résistance :

$$R = \rho\,\ell / A = (2{,}63 \times 10^8\ \Omega\ \text{m})\ (1\text{ m}) / [\pi\ (0{,}002\text{ m})^2] = 2{,}1 \times 10^{-3}\ \Omega.$$

(b) La même loi permet de déterminer $A = \rho\,\ell / R$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} r &= \{\rho\,\ell / [\pi R]\}^{1/2} \\ &= \{(1{,}72 \times 10^{-8}\ \Omega\text{ m})\ (1\text{ m}) / [\pi\ (2{,}1 \times 10^{-3}\ \Omega)]\}^{1/2} \\ &= 1{,}62 \times 10^{-3}\text{ m.} \end{aligned}$$

(c) La masse du fil d'aluminium vaut :

$$m_{Al} = \rho\,V = (2700\text{ kg m}^{-3})\ \pi\ (0{,}002\text{ m})^2\ (1\text{ m}) = 33{,}9\text{ g}$$

tandis que celle du fil de cuivre vaut :

$$m_{Cu} = \rho\,V = (8900\text{ kg m}^{-3})\ \pi\ (1{,}62 \times 10^{-3}\text{ m})^2\ (1\text{ m}) = 73{,}1\text{ g.}$$

Le rapport m_{Al} / m_{Cu} est égal à 0,46.

---

55 Lorsque la pile ne débite pas de courant, la différence de potentiel à ses bornes est égale à la FEM : $E = 1{,}52$ V. Quand, par contre, elle débite du courant, la différence de potentiel est égale à la FEM réduite de la chute de potentiel dans la résistance interne : $V = E - r\,i$. On calcule alors :

$$r = (E - V) / i = [(1{,}52\text{ V}) - (1{,}4\text{ V})] / (2{,}2\text{ A}) = 54{,}5 \times 10^{-3}\ \Omega.$$

---

56 (a) La puissance consommée par l'appareil se calcule par :

$$P = V\,i = (230\text{ V})\ (20\text{ A}) = 4600\text{ W.}$$

(b) Evaporer 4 kg d'eau nécessite une énergie égale à :

$$(2600\text{ J g}^{-1})\ (4000\text{ g}) = 10{,}4 \times 10^6\text{ J.}$$

Au taux de 4600 J par seconde, il faut un temps égal à :

$$t = (10{,}4 \times 10^6\text{ J}) / (4600\text{ J s}^{-1}) = 2{,}26 \times 10^3\text{ s soit } 37{,}7\text{ min.}$$

---

59 L'énergie fournie à la substance est égale à :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$Q = V\,i\,t = V\,(V/R)\,t$$
$$= V^2\,t/R = (120\text{ V})^2\,(2\text{ min})\,(60\text{ s min}^{-1})/(50\ \Omega) = 34{,}56 \times 10^3\text{ J}.$$

Cette énergie thermique correspond à la chaleur latente de fusion :

$$L_f = Q/m = (34{,}56 \times 10^3\text{ J})/(0{,}3\text{ kg}) = 115{,}2 \times 10^3\text{ J kg}^{-1}.$$

---

61 On examine le circuit en commençant par la partie droite. On y trouve trois résistances de $2\,r$ en série. Leur résistance équivalente est égale à $3\,(2\,r) = 6\,r$. Cette résistance est montée en parallèle sur celle de $3\,r$. La résistance équivalente est égale à $[1/(6\,r) + 1/(3\,r)]^{-1} = 2\,r$. On trouve alors trois résistances de $2\,r$ en série, disposées en parallèle sur une autre de $3\,r$. La résistance équivalente est égale à $2\,r$. Cette dernière résistance est en série avec deux autres résistances r. La résistance finale est donc égale à $4\,r$.

---

62 (a) Pour connaître le courant total, il faut d'abord déterminer la résistance globale du circuit. On y trouve deux branches de résistances en parallèle l'une avec l'autre. La partie supérieure est constituée de trois résistances en parallèle ; leur groupement est mis en série avec une résistance de $3\,r/2$. La résistance équivalente de cette branche est égale à $[1/(2\,r) + 1/(2\,r) + 1/r]^{-1} + 3\,r/2 = 2\,r$. La résistance équivalente de la branche inférieure est égale à :

$$[1/r + 1/r]^{-1} + 3\,r/2 = 2\,r.$$

La résistance totale du circuit vaut donc $[1/(2\,r) + 1/(2\,r)]^{-1} = r$. Le courant dans la FEM se calcule alors par $i = E/r$. (b) Le courant qui circule dans la résistance de $3\,r/2$ est le courant dans la branche inférieure. Comme les deux branches ont la même résistance, le courant se divise en deux parties égales $i = E/(2\,r)$.

---

64 (a) La charge sur les lames du condensateur est égale à :

$$Q = V\,C = (1000\text{ V})\,(100 \times 10^{-6}\text{ F}) = 0{,}1\text{ C}.$$

(b) La loi de décharge du condensateur s'écrit $Q = Q_0\,e^{-t/(R\,C)}$. Si la charge finale Q vaut $0{,}37\,Q_0$, on trouve, après simplification par Q_0 et après avoir appliqué aux deux membres le logarithme népérien, l'expression $-R\,C\ln 0{,}37 = t$ d'où l'on tire $R = 10\ \Omega$. (c) L'évolution de la grandeur du courant est donnée par la relation $i = i_0\,e^{-t/(R\,C)}$ où $i_0 = V/R$. Après $t = 0{,}001$ s, on trouve $i = 36{,}8$ A.

---

65 La loi de décharge du condensateur s'écrit $Q = Q_0\,(1 - e^{-t/(R\,C)})$ où $Q_0 = E\,C$. Le remplacement de la charge finale par $0{,}99\,Q_0$, la simplification de Q_0 des deux côtés de l'égalité, le calcul du logarithme népérien des deux membres conduisent au résultat : $t = -R\,C\ln 0{,}01 = 4{,}6\,R\,C$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

66 Si le courant dans le galvanomètre est nul, les chutes de potentiel dans les résistances R_1 et R_2 sont identiques, de même que les différences de potentiel aux bornes de R_3 et R_x. On peut donc écrire $R_1\, i_1 = R_2\, i_2$ et $R_3\, i_3 = R_x\, i_x$. D'autre part, les courants i_2 et i_x sont identiques, de même que i_1 et i_3. Si l'on effectue la division membre à membre des égalités des différences de potentiel, on obtient $R_1 / R_3 = R_2 / R_x$ et la résistance inconnue est donnée par :

$$R_x = R_2\, R_3 / R_1 = (10\ \Omega)\ (98{,}2\ \Omega) / (10\ \Omega) = 98{,}2\ \Omega.$$

---

67 Si le courant dans le galvanomètre est nul, on peut écrire $R\, i_1 = E$; d'autre part, une seconde expression est $E_1 = (R_1 + R)\, i_1$ puisque R_1 et R sont en série. Dans cette dernière relation, on introduit l'expression de E pour trouver $E_1 = R_1\, i_1 + E$. La seconde équation permet également d'exprimer :

$$i_1 = E_1 / (R_1 + R).$$

L'expression de E se résume alors à $E = E_1 - R_1\, E_1 / (R_1 + R)$ et après manipulation, on déduit $E = E_1\, R / (R_1 + R)$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 18

Conduction nerveuse

RAPPELS

On peut comprendre la progression d'une impulsion électrique dans le corps humain en assimilant les fibres nerveuses à des fils caractérisés, pour chaque unité de longueur, par une résistance et une capacité. L'axone présente deux types de résistance à l'évolution de l'impulsion : la résistance de l'axoplasme que l'on calcule par $R = \rho_a \ \ell \ / \ A$ et la résistance de fuite inversement proportionnelle à la surface de la membrane $R' = R_m \ / \ A$. La capacité tient compte du phénomène de charge de la membrane de part et d'autre de laquelle une différence de potentiel se maintient. Cette capacité est proportionnelle à la surface de la membrane, de sorte qu'elle s'exprime par $C = C_m \ A$. Les valeurs de ρ_a, R_m et C_m sont données dans le tableau 18.1, pour un axone myélinisé (entouré d'une gaine isolante) ou non. La constante de longueur λ est une grandeur qui caractérise la distance que le courant peut parcourir avant que l'essentiel n'ait fui à travers la membrane. Elle est donnée par $\lambda = [R_m \ r \ / \ (2 \ \rho_a)]^{1/2}$.

Différents ions sont en concentrations différentes à l'intérieur et à l'extérieur de l'axone. Il en résulte un flux d'ions à travers la membrane. Un transfert d'ions dû à la différence de potentiel entre l'intérieur et l'extérieur de l'axone se produit également et un ion est en équilibre lorsque les concentrations satisfont l'équation de Nernst : $q \ (V_i - V_0) = k_B \ T \ \ln \ (c_0 \ / \ c_i)$ où les variables indicées par i se rapportent à l'intérieur de l'axone.

On peut suivre la progression d'une impulsion électrique en examinant la variation de son amplitude avec la distance. La vitesse des impulsions nerveuses est proportionnelle au rayon de l'axone et inversement proportionnelle à la distance X entre les noeuds de Ranvier où l'amplification du signal se produit, $v = r \ / \ (\rho_a \ C_m \ X)$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

SOLUTION DES EXERCICES

18.1 LA STRUCTURE DES CELLULES NERVEUSES

1 L'aire de la section droite de la colonne divisée par l'aire d'un axone nous donne le nombre d'axones dans la colonne vertébrale :

$$\pi\,[(0{,}01\text{ m})/2]^2 / \{\pi\,[(10\times10^{-6}\text{ m})/2]^2\text{ axone}^{-1}\} = 1\times10^6\text{ axones.}$$

---

2 Si l'on suppose qu'il n'y a pas de noeuds de Ranvier aux extrémités de l'axone, on peut écrire $n\,(1\times10^{-3}\text{ m}) = 1\text{ m}$ où n est le nombre d'intervalles. L'impulsion est donc répétée 1000 fois par mètre.

18.2 RÉSISTANCE ET CAPACITÉ D'UN AXONE

3 La résistance de l'axoplasme se calcule par la loi de Pouillet :

$$R = \rho_a\,\ell / A = (2\,\Omega\text{ m})\,(0{,}01\text{ m}) / [\pi\,(2\times10^{-6}\text{ m})^2] = 1{,}59\times10^9\,\Omega.$$

---

4 Comme la résistivité de l'axoplasme est identique pour un axone myélinisé ou non, la résistance de l'axoplasme a la même valeur que celle calculée à l'exercice 18-3, soit $1{,}59\times10^9\,\Omega$.

---

6 (a) La capacité de cet axone vaut :

$$C = C_m A = C_m\,(2\,\pi\,r\,\ell)$$

$$= (5\times10^{-5}\text{ F m}^{-2})\,[2\,\pi\,(2\times10^{-6}\text{ m})\,(0{,}01\text{ m})] = 6{,}28\times10^{-12}\text{ F.}$$

(b) Sa résistance de fuite a pour grandeur :

$$R' = R_m / A = (40\,\Omega\text{ m}^2) / [2\,\pi\,(2\times10^{-6}\text{ m})\,(0{,}01\text{ m})] = 318\times10^6\,\Omega.$$

---

7 (a) Le potentiel du fluide environnant est supposé nul. Comme celui de l'intérieur est négatif, la paroi interne est chargée négativement. Le champ électrique est par conséquent dirigé vers l'intérieur de l'axone. Sa grandeur est donnée par $E = V / d = (90\times10^{-3}\text{ V}) / (7{,}5\times10^{-9}\text{ m}) = 12\times10^6\text{ N C}^{-1}$. (b) La grandeur de la capacité donnée représente la capacité par unité de surface C / A. La définition de la capacité du condensateur permet de calculer :

$$K = (C / A)\,d / \varepsilon_0 = [4\,\pi\,(9\times10^9\text{ m F}^{-1})]\,(0{,}01\text{ F m}^{-2})\,(7{,}5\times10^{-9}\text{ m}) = 8{,}48.$$

---

9 La charge par unité de surface se calcule en multipliant la différence de potentiel et la capacité par unité de surface du condensateur :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(a) $Q / A = V C / A = (90 \times 10^{-3}\ \text{V})\ (5 \times 10^{-5}\ \text{F m}^{-2}) = 4{,}5 \times 10^{-6}\ \text{C m}^{-2}$.

(b) $Q / A = (90 \times 10^{-3}\ \text{V})\ (1 \times 10^{-2}\ \text{F m}^{-2}) = 90 \times 10^{-5}\ \text{C m}^{-2}$.

---

10 La constante de longueur λ caractérise la distance que le courant parcourt avant que l'essentiel n'ait fui à travers la membrane. Elle se calcule par :

$$\lambda = [R_m\ r / (2\ \rho_a)]^{1/2}.$$

(a) Elle vaut :

$$\lambda = \{(0{,}2\ \Omega\ \text{m}^2)\ (3 \times 10^{-6}\ \text{m}) / [2\ (2\ \Omega\ \text{m})]\}^{1/2} = 387 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

et (b) $\lambda = \{(40\ \Omega\ \text{m}^2)\ (3 \times 10^{-6}\ \text{m}) / [2\ (2\ \Omega\ \text{m})]\}^{1/2} = 5{,}48 \times 10^{-3}\ \text{m}$.

---

12 Les constantes de longueur étant égales pour un axone myélinisé ou non, on peut écrire $(40\ \Omega\ \text{m}^2)\ r_m / (2\ \rho_a) = (0{,}2\ \Omega\ \text{m}^2)\ r_{nm} / (2\ \rho_a)$. Le rapport r_m / r_{nm} vaut $(0{,}2\ \Omega\ \text{m}^2) / (40\ \Omega\ \text{m}^2) = 5 \times 10^{-3}$.

---

13 A partir de l'expression de la constante de longueur, on déduit :

$$r = \lambda^2\ 2\ \rho_a / R_m = (2 \times 10^{-4}\ \text{m})^2\ 2\ (2\ \Omega\ \text{m}) / (0{,}2\ \Omega\ \text{m}^2) = 0{,}8\ \mu\text{m}.$$

18.3 CONCENTRATIONS IONIQUES ET POTENTIEL DE REPOS

14 La figure 18.3 nous indique une concentration n de 155 moles de K^+ par mètre cube. Une mole contient N_A ions de potassium et le volume de l'échantillon est donné par $V = \pi\ r^2\ \ell = \pi\ (2 \times 10^{-6}\ \text{m})^2\ (0{,}01\ \text{m}) = 126 \times 10^{-15}\ \text{m}^3$. Le nombre total d'ions vaut alors :

$$n\ N_A\ V = (155\ \text{moles m}^{-3})\ (6{,}02 \times 10^{23}\ \text{ions mole}^{-1})\ (126 \times 10^{-15}\ \text{m}^3)$$
$$= 11{,}73 \times 10^{12}\ \text{ions}.$$

---

17 L'équilibre ionique est atteint si les concentrations satisfont l'équation de Nernst $q\ (V_i - V_0) = q\ \Delta V = k_B\ T \ln (c_0 / c_i)$ où les variables indicées par 0 se rapportent à l'extérieur. On calcule :

$$\Delta V = (1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J K}^{-1})\ (310\ \text{K}) \ln (160/10) / (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C}) = 74{,}1\ \text{mV}.$$

---

18 Un ion est en équilibre si l'équation de Nernst est satisfaite :

$$q\ (V_i - V_0) = q\ \Delta V = k_B\ T \ln (c_0 / c_i).$$

On peut déterminer :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$c_i = c_0 \exp [- q (V_i - V_0) / (k_B T)]$$
$$= (110 \text{ moles m}^{-3}) \exp \{- (- 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C}) (- 80 \times 10^{-3} \text{ V}) / [(1{,}38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}) (310 \text{ K})]\}$$
$$= 5{,}5 \text{ moles m}^{-3}.$$

---

19 (a) Le courant est le transfert d'un certain nombre de charges par unité de temps. Pour un mètre carré, le flux est de 3×10^{-7} moles s^{-1}, soit :

$$(3 \times 10^{-7} \text{ moles s}^{-1}) (6{,}02 \times 10^{23} \text{ ions mole}^{-1}) (1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C ion}^{-1}) = 28{,}9 \times 10^{-3} \text{ C s}^{-1} = 28{,}9 \text{ mA}.$$

(b) La puissance se calcule par le produit :

$$P = V i = (90 \times 10^{-3} \text{ V}) (28{,}9 \times 10^{-3} \text{ A}) = 2{,}6 \text{ mW}.$$

18.4 LA RÉPONSE À DES STIMULI FAIBLES

21 Considérons la courbe $x = 1$ mm. Si la différence entre le potentiel final et le potentiel de repos est V_d, en $x = 0$, le potentiel final en $x = 1$ mm est égal à $V_d / 2$. On peut alors écrire $V_d / 2 = V_d \exp [- (1 \text{ mm}) / \lambda]$ et calculer :

$$\lambda = (- 1 \text{ mm}) / \ln (0{,}5) = 1{,}44 \text{ mm}.$$

---

23 Par rapport au potentiel de repos, la variation de potentiel se calcule par :

$$V(x) = V_d \, e^{-x/\lambda}$$

où V_d est la différence entre le potentiel de repos et le potentiel final, soit 10 mV. (a) En $x = 0{,}5$ cm, le potentiel vaut $V = (- 90 \text{ mV}) + (10 \text{ mV}) \, e^{-1} = - 86{,}3$ mV et (b) en $x = 1$ cm, il vaut $V = (- 90 \text{ mV}) + (10 \text{ mV}) \, e^{-2} = - 88{,}6$ mV.

18.5 LE POTENTIEL D'ACTION

25 La vitesse de propagation d'un potentiel d'action se calcule par $v = r / (\rho_a \, C_m \, X)$ où X est égal à 1 mm. On calcule en (a) :

$$v = (1 \times 10^{-6} \text{ m}) / [(2 \, \Omega \text{ m}) (5 \times 10^{-5} \text{ F m}^{-2}) (1 \times 10^{-3} \text{ m})] = 10 \text{ m s}^{-1}$$

et en (b) $v = 200$ m s^{-1}. Le temps pour parcourir les 2 m de longueur est donné par $t = (2 \text{ m}) / v$ et l'on trouve (a) $t = 0{,}2$ s et (b) $t = 0{,}01$ s.

---

26 La donnée du temps t nécessaire pour parcourir une distance x permet de calculer la vitesse de propagation $v = x / t = (0{,}5 \text{ m}) / (0{,}05 \text{ s}) = 10 \text{ m s}^{-1}$. La vitesse s'exprime également par $v = r / (\rho_a \, C_m \, X) = 10 \times 10^6 \, r \text{ m s}^{-1}$ si X est pris égal à 1 mm. Le rayon de l'axone vaut alors $r = v / (10 \times 10^6) = 1$ µm.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

SOLUTION DES PROBLÈMES

27 (a) La loi de Pouillet appliquée dans le cas de l'axone permet de calculer :

$$\rho = R\,A / \ell = (0{,}2\ \Omega)\ (1\ \text{m}^2) / (7{,}5 \times 10^{-9}\ \text{m}) = 26{,}7 \times 10^{6}\ \Omega\ \text{m}.$$

(b) La résistance d'un pore est égale à :

$$R_i = \rho\,\ell / A = (0{,}15\ \Omega\ \text{m})\ (7{,}5 \times 10^{-9}\ \text{m}) / [\pi\ (3{,}5 \times 10^{-10}\ \text{m})^2]$$
$$= 2{,}92 \times 10^{9}\ \Omega.$$

En supposant que ces pores constituent des résistances en parallèle, il en faudra un nombre égal à $n = (2{,}92 \times 10^{9}\ \Omega) / (0{,}2\ \Omega) = 14{,}6 \times 10^{9}$ pores par m^2. (c) Sur une longueur de 1 m, on trouvera $n^{1/2}$ pores. La longueur totale correspondant à la somme de leur diamètre est égale à $L_p = n^{1/2}\ 2\ r$. La longueur de membrane restante est égale à $L_m = (1\ \text{m}) - n^{1/2}\ 2\ r$. Cette distance se partage entre les pores comme $\ell = L_m / n^{1/2} = (1\ \text{m}) / n^{1/2} - 2\ r = 8{,}28\ \mu\text{m}$.

---

31 (a) La définition de la capacité d'un condensateur permet de calculer :

$$Q = V\ C = (130 \times 10^{-3}\ \text{V})\ (3 \times 10^{-9}\ \text{F}) = 390 \times 10^{-12}\ \text{C}.$$

(b) La charge d'un ion sodium étant égale à $q = 1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C ion}^{-1}$, on trouve que le nombre d'ions équivalents à la charge calculée en (a) vaut :

$$n = (390 \times 10^{-12}\ \text{C}) / (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C ion}^{-1}) = 2{,}44 \times 10^{9}\ \text{ions}.$$

---

32 (a) La définition de la capacité d'un condensateur permet de calculer :

$$Q = V\ C = (136 \times 10^{-3}\ \text{V})\ (3 \times 10^{-9}\ \text{F}) = 4{,}08 \times 10^{-10}\ \text{C}.$$

(b) La charge d'un ion potassium étant égale à $q = 1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C ion}^{-1}$, on trouve que le nombre d'ions équivalents à la charge calculée en (a) vaut :

$$n = (4{,}08 \times 10^{-10}\ \text{C}) / (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C ion}^{-1}) = 2{,}55 \times 10^{9}\ \text{ions}.$$

(c) Ce nombre d'ions correspond à :

$$(2{,}55 \times 10^{9}\ \text{ions}) / (6{,}02 \times 10^{23}\ \text{ions mole}^{-1}) = 4{,}24 \times 10^{-15}\ \text{moles}$$

dans un volume de $V = \pi\ r^2\ \ell = \pi\ (5 \times 10^{-6}\ \text{m})^2\ (0{,}01\ \text{m}) = 78{,}5 \times 10^{-14}\ \text{m}^3$. Dans un volume de $1\ \text{m}^3$, ces ions sont en nombre égal à :

$$(4{,}24 \times 10^{-15}\ \text{moles}) / (78{,}5 \times 10^{-14}\ \text{m}^3) = 5{,}40 \times 10^{-3}\ \text{moles m}^{-3}$$

ou encore $100\ (5{,}40 \times 10^{-3}\ \text{moles m}^{-3}) / (155\ \text{moles m}^{-3}) = 3{,}48 \times 10^{-3}\ \%$.

---

34 L'utilisation de l'équation de Goldman permet de déterminer un rapport des concentrations égal à 107.

---

36 L'introduction des données dans l'équation de Goldman donne un potentiel de repos égal à – 89,6 mV.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 19

Le magnétisme

RAPPELS

Un aimant ou une charge en mouvement produit un champ magnétique **B**. Ce champ exerce à son tour une force sur un autre aimant ou sur une charge qui se déplace dans son voisinage. Par convention, à l'extérieur d'un aimant, les lignes de force du champ magnétique sont toujours orientées du pôle nord vers le pôle sud. Autour d'un fil parcouru par un courant, les lignes de champ sont circulaires et le sens du champ à un endroit se détermine en plaçant le pouce de la main droite dans le sens du courant; la boucle formée par les autres doigts de la main indique le sens de rotation du champ magnétique.

Une charge q se déplaçant à la vitesse **v** dans un champ magnétique **B** subit une force perpendiculaire à **v** et à **B** donnée par $\mathbf{F} = q\ (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Le module de cette force est égal à $|q|\ v\ B \sin\theta$ où θ est l'angle entre les directions de **v** et de **B**.

L'expression de la force magnétique qui agit sur un fil de longueur ℓ parcouru par un courant continu i revient à $\mathbf{F} = i\ (\ell \times \mathbf{B})$ où ℓ est un vecteur orienté suivant le sens de circulation du courant.

Une boucle de fil parcourue par un courant est un dipôle magnétique. La force résultante sur un dipôle magnétique est nulle tandis que le moment total est différent de zéro. Il est égal, pour une orientation quelconque de la surface caractérisée par un vecteur **n** unitaire perpendiculaire au plan de la boucle, à $\tau = \mu \times \mathbf{B}$ où $\mu = i\ A\ \mathbf{n}$ est le moment magnétique dipolaire. Un dipôle magnétique dont le moment μ fait un angle θ avec un champ magnétique uniforme a une énergie potentielle égale à $U = -\ \mu\ B \cos\theta$. Lorsqu'une charge se déplace sur une orbite fermée, le moment magnétique a une expression spécifique : $\mu = q\ \mathbf{L} / (2\ m)$ où **L** est le moment cinétique de la particule donné par $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ($\mathbf{p} = m\ \mathbf{v}$ est la quantité de mouvement de la particule).

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

La loi de Biot-Savart permet de calculer le champ magnétique $\Delta\mathbf{B}$ à distance $\mathbf{r}$ d'un conducteur de longueur $\Delta\ell$ parcouru par un courant i. Il vaut $\Delta\mathbf{B} = k'\, i\, \Delta\ell \times \mathbf{r} / r^2$ où $k' = 1 \times 10^{-7}$ T m A^{-1}. Ce champ $\Delta\mathbf{B}$ n'est pas observable; seul compte le champ résultant $\mathbf{B}$, dû à tout le circuit. Citons, à titre d'exemple, (a) la grandeur du champ magnétique au centre d'une boucle de courant circulaire : $B = 2\,\pi\, k'\, i / a$ où a est le rayon de la boucle, (b) la grandeur du champ magnétique sur l'axe d'un solénoïde, $B = 4\,\pi\, k'\, i\, n$ où n est le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde et (c) le champ magnétique à la distance r d'un fil rectiligne: $B = 2\, k'\, i / r$.

Deux fils longs et parallèles s'attirent quand les courants qui les parcourent sont dans le même sens et se repoussent dans le cas contraire. Par unité de longueur, la force d'attraction vaut $F / \Delta\ell = 2\, k'\, i\, i' / d$ où d est la distance séparant les deux conducteurs.

SOLUTION DES EXERCICES

19.1 LE CHAMP MAGNÉTIQUE

1 (a) Le champ est le plus fort là où les lignes de force du champ magnétique sont le plus resserrées. C'est le cas en P_4. (b) Elles sont le plus distantes en P_1, là où le champ est le plus faible.

---

2 Au voisinage de P_4 puisque dans cette zone, les lignes de force sont parallèles et un déplacement constant à différents endroits donne lieu à une même variation de champ.

19.2 LA FORCE MAGNÉTIQUE SUR UNE CHARGE EN MOUVEMENT

3 Si la particule se déplace parallèlement au champ magnétique, elle n'est pas déviée. L'absence de champ n'est donc pas la seule cause du manque de déviation de l'électron.

---

4 (a) La grandeur de la force agissant sur une particule en mouvement dans un champ magnétique est donnée par :

$$F = q\, v\, B \sin\theta$$
$$= (1 \times 10^{-6}\ \text{C})\,(1 \times 10^{4}\ \text{m s}^{-1})\,(2\ \text{T}) \sin 90° = 2 \times 10^{-2}\ \text{N}.$$

Sa direction est perpendiculaire à $\mathbf{v}$ et à $\mathbf{B}$ et s'enfonce dans le plan de la feuille par application du produit vectoriel $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. (b) La grandeur de la force est identique, sa direction aussi mais elle sort du plan du dessin.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

5 (a) Dans ce cas, **v** et **B** sont parallèles et la force magnétique est nulle; l'accélération est donc nulle. (b) La situation est identique à celle décrite en (a) : l'accélération est nulle. (c) La force magnétique sort du plan de la feuille ; l'accélération qui en résulte aussi. En grandeur, elle vaut, à partir de l'égalité $m\,a = q\,v\,B$, $a = q\,v\,B\,/\,m$. (d) Elle rentre dans le plan de la feuille et sa grandeur est égale, comme en (c), à $a = q\,v\,B\,/\,m$. (e) La force et donc l'accélération sont dans la direction +**y** et sa grandeur vaut encore $a = q\,v\,B\,/\,m$. (f) Elle est dans le sens – **y** et sa grandeur est toujours la même, $a = q\,v\,B\,/\,m$.

---

6 Puisque la particule est négative, les conclusions tirées à l'exercice précédent restent valables quant à la grandeur de la force et de l'accélération; le sens de la force, lui, est inversé. (a) 0 N. (b) La force sort du plan du dessin. (c) Elle s'enfonce dans la feuille. (d) Elle est dans la direction – **y**. (e) Son sens est celui de +**y**.

---

7 (a) La grandeur de la force magnétique se calcule par :

$$F = |q|\,v\,B \sin\theta$$
$$= |-1 \times 10^{-3}\ \text{C}|\,(100\ \text{m s}^{-1})\,(1 \times 10^{-2}\ \text{T}) \sin 30° = 0{,}5 \times 10^{-3}\ \text{N}.$$

L'application du produit vectoriel – **v** × **B** permet de déduire l'orientation de la force : elle s'enfonce dans le plan du dessin. (b) La direction et le sens de l'accélération sont ceux de la force et sa grandeur est donnée par l'égalité $m\,a = q\,v\,B \sin 30°$; on détermine :

$$a = (1 \times 10^{-3}\ \text{C})\,(100\ \text{m s}^{-1})\,(1 \times 10^{-2}\ \text{T})\,(0{,}5)\,/\,(0{,}01\ \text{kg}) = 0{,}05\ \text{m s}^{-2}.$$

---

8 (a) La valeur maximale de la force s'obtient lorsque la particule se déplace perpendiculairement au champ magnétique ($\sin\theta = 1$). Dans ce cas, elle vaut $F = q\,v\,B = (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})\,(3000\ \text{m s}^{-1})\,(1 \times 10^{-4}\ \text{T}) = 4{,}8 \times 10^{-20}\ \text{N}$. (b) La force électrique entre deux protons se calcule par :

$$F = k\,q\,q'\,/\,r^2$$
$$= (9 \times 10^{9}\ \text{N m}^{-2}\ \text{C}^{-2})\,(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2\,/\,(1 \times 10^{-10}\ \text{m})^2$$
$$= 23 \times 10^{-9}\ \text{N}.$$

Le rapport entre les forces magnétique et électrique est égal à $2{,}1 \times 10^{-12}$. (c) La force magnétique est donc négligeable par rapport à la force électrique et il est peu probable qu'elle influence un processus biochimique, essentiellement électrique.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

19.3 LA FORCE MAGNÉTIQUE SUR UN FIL PARCOURU PAR UN COURANT

9 La force magnétique qui s'exerce sur un fil de longueur ℓ parcouru par un courant i dans un champ magnétique B se calcule par $F = B\, i\, \ell$. On déduit la valeur du champ magnétique $B = (5\text{ N}) / [(20\text{ A})\,(0{,}5\text{ m})] = 0{,}5\text{ T}$.

---

10 La force est dirigée vers la bas et comme elle est directement proportionnelle au courant, elle voit sa grandeur doublée. Elle vaut donc 20 N.

---

13 (a) Sur le segment perpendiculaire au champ, la force est égale à :

$$F = B\, i\, \ell \sin 90° = (0{,}2\text{ T})\,(10\text{ A})\,(1\text{ m}) = 2\text{ N}$$

et par application du produit vectoriel $\ell \times \mathbf{B}$, on détermine qu'elle sort du plan du dessin. Sur le segment parallèle au champ, la force est nulle ($\sin\theta = \sin 0° = 0$). Sur le segment oblique, elle vaut $F = (0{,}2\text{ T})\,(10\text{ A})\,(\sqrt{2}\text{ m}) \sin 45° = 2\text{ N}$. Elle s'enfonce dans le plan du dessin. (b) La force résultante est nulle.

19.4 DIPÔLES MAGNÉTIQUES

14 La force F_1 qui s'exerce sur le segment perpendiculaire au champ s'applique à une distance égale à (0,5 m) du sommet supérieur du cadre. Celle qui s'exerce sur le segment oblique, F_2, est à une distance de ce même sommet égale à ($\sqrt{2}$ / 2 m) de sorte que la distance entre les deux points d'application des forces est égal à, par le théorème de Pythagore, $d = 0{,}5$ m. Si l'on place l'axe de rotation au point d'application de F_2, le moment du couple de force est égal à $\tau = F_1\, d = 1$ N m (valeur de la force calculée à l'exercice 19-13).

---

15 (a) La grandeur du moment magnétique dipolaire est égale à :

$$\mu = i\, A = (10\text{ A})\,(0{,}1\text{ m})^2 = 0{,}1\text{ A m}^2.$$

(b) Le moment est maximum lorsque les forces sont perpendiculaires au champ. On suppose donc que les lignes de champ sont parallèles à deux des côtés du cadre. Le moment des forces est égal à :

$$\tau = F\,(0{,}1\text{ m}) = B\, i\, \ell\,(0{,}1\text{ m}) = 10 \times 10^{-3}\text{ N m}.$$

(c) Le champ est dans le plan de la boucle.

---

16 (a) L'énergie du dipôle magnétique est nulle lorsque $\cos\theta = 0$ soit $\theta = 90°$. Il s'agit de l'angle entre les directions du champ magnétique et de la normale à la surface. L'énergie est donc nulle lorsque les lignes de champ sont dans le plan de la boucle. (b) Le moment des forces est maximum lorsque l'angle entre le moment magnétique dipolaire et le champ magnétique est égal à 90 °.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

A ce moment, les lignes de champ sont dans le plan de la boucle.

---

18 (a) Pour retourner le moment magnétique dipolaire, il faut que son énergie passe de $-\mu_z B$ à $+\mu_z B$. Il faut lui fournir l'énergie :

$$2\,\mu_z B = \pm 2\,(6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J s})\,(10\ \text{T}) / [4\,\pi\,(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})]$$
$$= 1{,}158 \times 10^{-3}\ \text{eV}.$$

(b) Le rapport des deux énergies est égal à $8{,}5 \times 10^{-5}$. Il est donc nettement moins coûteux énergétiquement de retourner le moment magnétique dipolaire que d'enlever un électron à un atome d'hydrogène.

19.5 CHAMPS MAGNÉTIQUES PRODUITS PAR DES COURANTS

20 Par l'expression du champ magnétique au centre d'une boucle circulaire, on détermine :

$$i = B\,a / [2\,\pi\,k'] = (0{,}05\ \text{T})\,(1{,}2\ \text{m}) / [2\,\pi\,(1 \times 10^{-7}\ \text{T m A}^{-1})]$$
$$= 95{,}5 \times 10^{3}\ \text{A}.$$

---

21 Le champ magnétique total est dû à la somme des champs magnétiques individuels dans les spires. Il vaut donc :

$$B = (50)\,2\,\pi\,k'\,i / a = (50)\,2\,\pi\,(1 \times 10^{-7}\ \text{T m A}^{-1})\,(2\ \text{A}) / (0{,}05\ \text{m})$$
$$= 1{,}26 \times 10^{-3}\ \text{T}.$$

---

23 Le champ dans le solénoïde est égal à $B = 4\,\pi\,k'\,i\,n$. Le nombre n de spires par unité de longueur vaut $n = (1000\ \text{spires}) / (0{,}4\ \text{m}) = 2500\ \text{spires m}^{-1}$. La valeur du champ est alors :

$$B = 4\,\pi\,(1 \times 10^{-7}\ \text{T m A}^{-1})\,(2\ \text{A})\,(2500\ \text{spires m}^{-1}) = 6{,}3 \times 10^{-3}\ \text{T}.$$

---

24 Le champ magnétique au voisinage d'un fil parcouru par un courant vaut $B = 2\,k'\,i / r$. Le courant nécessaire pour produire le champ donné vaut :

$$i = B\,r / (2\,k') = (1 \times 10^{-4}\ \text{T})\,(0{,}1\ \text{m}) / [2\,(1 \times 10^{-7}\ \text{T m A}^{-1})] = 50\ \text{A}.$$

---

25 Si l'on suppose qu'un fil vertical est parcouru par un courant qui monte, le champ magnétique à droite du fil s'enfonce dans le plan tandis qu'à gauche, il en sort (pouce de la main droite placé dans le sens du courant, les autres doigts formant les lignes de champ circulaires). Le champ au voisinage d'un fil se calcule par $B = 2\,k'\,i / r$. (a) Il vaut $B = 2\,(1 \times 10^{-7}\ \text{T m A}^{-1})\,(4\ \text{A}) / (0{,}1\ \text{m}) = 8 \times 10^{-6}\ \text{T}$. (b) Il vaut $B = 2\,(1 \times 10^{-7}\ \text{T m A}^{-1})\,(4\ \text{A}) / (1\ \text{m}) = 8 \times 10^{-7}\ \text{T}$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

19.6 LA FORCE ENTRE DEUX FILS PARALLÈLES PARCOURUS PAR UN COURANT

28 (a) Supposons que les deux courants se déplacent vers la droite. Le courant dans le fil supérieur produit dans son voisinage un champ magnétique $B_1 = 2\,k'\,i\,/\,r$. Ce champ est à l'origine d'une force qui agit sur le fil inférieur, égale à $F_2 = B_1\,i\,\ell = 2\,k'\,i^2\,\ell\,/\,r$. Puisque le champ B_1 s'enfonce dans le plan à l'endroit du fil inférieur, la force F_2 est dans la direction du fil supérieur. Le courant dans le fil inférieur provoque, lui aussi, l'apparition d'un champ magnétique B_2 égal à B_1 à l'endroit du fil supérieur. Il en résulte une force attractive dont la grandeur est égale à :

$$F_1 = F_2 = 2\,k'\,i^2\,\ell\,/\,r = 2\,(1 \times 10^{-7}\ \text{T m A}^{-1})\,(10\ \text{A})^2\,(0{,}5\ \text{m})\,/\,(0{,}1\ \text{m})$$
$$= 1 \times 10^{-4}\ \text{N}.$$

(b) Par le même raisonnement, on arrive à la même grandeur des forces mais cette fois, les deux fils se repoussent.

---

29 (a) Comme les courants sont dans des sens opposés, le fil supérieur sera repoussé et la situation permet d'atteindre un équilibre entre le poids et la force magnétique subie. Le courant i_2 de 10 A produit au niveau du fil supérieur un champ magnétique B_2 égal à $2\,k'\,i_2\,\ell\,/\,r$. Le courant $i_1 = 5$ A se déplace dans ce champ et subit une force égale à $F_1 = B_2\,i_1\,\ell = 2\,k'\,i_1\,i_2\,\ell\,/\,r$. Cette force équilibre le poids et on peut écrire $P = 2\,k'\,i_1\,i_2\,\ell\,/\,r$ et calculer :

$$r = 2\,(1 \times 10^{-7}\ \text{T m A}^{-1})\,(5\ \text{A})\,(10\ \text{A})\,(10\ \text{m})\,/\,(0{,}5\ \text{N}) = 2 \times 10^{-4}\ \text{m}.$$

(b) Quand les fils sont en contact, leur interdistance est égale à 2×10^{-3} m. Ils sont donc aussi en contact pour une interdistance plus petite.

---

30 (a) Le fil central est dans le champ magnétique B_1 créé par le courant circulant dans le fil supérieur. Si les courants se déplacent vers la droite, ce champ B_1 s'enfonce dans le plan du dessin. Ce fil central subit aussi le champ B_3 créé par le passage du courant dans le fil inférieur. Ce champ B_3 sort du plan et a la même grandeur que B_1. Le champ au niveau du fil central est donc nul et la force résultante sur ce fil est nulle. (b) Au niveau du fil inférieur, par exemple, les deux champs B_1 et B_2 dus aux courants dans les fils supérieur et central s'enfoncent tous deux dans le plan et s'additionnent donc. Leur somme vaut :

$$B = B_1 + B_2 = [2\,k'\,i\,/\,(2\,r)] + [2\,k'\,i\,/\,r] = 3\,k'\,i\,/\,r.$$

La force qui s'exerce sur le fil inférieur est alors dans la direction des deux autres fils et vaut :

$$F_3\,/\,\ell = B\,i = 3\,k'\,i^2\,/\,r$$
$$= 3\,(1 \times 10^{-7}\ \text{T m A}^{-1})\,(10\ \text{A})^2\,/\,(0{,}1\ \text{m}) = 3 \times 10^{-4}\ \text{N m}^{-1}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

19.7 SPECTROMÈTRES DE MASSE

33 (a) L'accélération centripète est fournie par la force magnétique. Le rayon de la trajectoire doit satisfaire à $q\ v\ B = m\ v^2 / R$. Le champ magnétique se calcule par :

$$B = m\ v / (q\ R) = (9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})\ (1 \times 10^{7}\ \text{m s}^{-1}) / [(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})\ (2\ \text{m})]$$
$$= 28{,}5 \times 10^{-6}\ \text{T}.$$

(b) L'accélération est constante et se détermine par :

$$a = F / m = q\ v\ B / m$$
$$= (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})\ (1 \times 10^{7}\ \text{m s}^{-1})\ (28{,}5 \times 10^{-6}\ \text{T}) / (9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})$$
$$= 5 \times 10^{13}\ \text{m s}^{-2}.$$

(c) Si l'électron tourne dans le sens anti-horlogique, il faut que le champ magnétique s'enfonce dans le plan du dessin.

---

34 L'accélération centripète est due à la présence du champ magnétique. Pour une trajectoire de rayon R, il faut que $R = m\ v / (q\ B)$. Puisque ce rayon reste constant, on peut écrire $m_p\ v_p / (q_p\ B) = m_\alpha\ v_\alpha / (q_\alpha\ B)$ et par les relations de proportionnalité entre les masses et les charges, cette égalité se résume à $v_p = 2\ v_\alpha$. Comme la vitesse est réduite d'un facteur 2, la vitesse au carré le sera d'un facteur 4 tandis que la masse est quatre fois plus importante dans le cas de la particule alpha. L'énergie de la particule alpha est donc égale à celle du proton, soit 5 MeV.

---

35 (a) Pour que les ions ne soient pas déviés, il faut que les forces électrique et magnétique se compensent : $q\ v\ B = q\ E$. Le champ magnétique se calcule donc par $B = E / v = (1{,}4 \times 10^{5}\ \text{N C}^{-1}) / (2 \times 10^{5}\ \text{m s}^{-1}) = 0{,}7\ \text{T}$. (b) Dans la région de déflexion, la force magnétique est responsable de l'accélération centripète : $q\ v\ B = m\ v^2 / R$. Le rayon de la trajectoire vaut :

$$R = m\ v / (q\ B)$$
$$= (6{,}68 \times 10^{-27}\ \text{kg})\ (2 \times 10^{5}\ \text{m s}^{-1}) / [(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})\ (1\ \text{T})]$$
$$= 8{,}3 \times 10^{-3}\ \text{m}.$$

19.8 CYCLOTRONS

37 (a) Dans la zone de déflexion, le champ magnétique est responsable d'une accélération centripète. Le rayon de la trajectoire est donné par $R = m\ v / (q\ B)$. D'autre part, la période obéit à $v\ T = 2\ \pi\ R$. Le champ magnétique est déterminé par :

$$B = m\ v / (R\ q) = 2\ \pi\ m / (q\ T)$$
$$= 2\ \pi\ (6{,}68 \times 10^{-27}\ \text{kg}) / [2\ (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})\ (1 \times 10^{-7}\ \text{s})] = 1{,}31\ \text{T}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(b) La vitesse se calcule ensuite au moyen de la formule :

$v = R\,q\,B\,/\,m$

$= (2\text{ m})\,(2)\,(1{,}6 \times 10^{-19}\text{ C})\,(1{,}31\text{ T})\,/\,(6{,}68 \times 10^{-27}\text{ kg}) = 126 \times 10^{6}\text{ m s}^{-1}$.

SOLUTION DES PROBLÈMES

38 (a) Le courant circulant dans le fil vers la droite provoque l'apparition d'un champ magnétique dans son voisinage. A 0,5 m du fil, ce champ vaut :

$$B = 2\,k'\,i\,/\,r = 2\,(1 \times 10^{-7}\text{ T m A}^{-1})\,(50\text{ A})\,/\,(0{,}5\text{ m}) = 2 \times 10^{-5}\text{ T}.$$

Dans la région en-dessous du fil, il s'enfonce dans le plan alors qu'au-dessus du fil, il sort du plan du dessin. La force qui agit sur l'électron est égale à $\mathbf{F} = -\,|q|\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Elle est dirigée vers la droite, que l'électron se présente au-dessus ou en-dessous du fil et elle vaut :

$$F = (1{,}6 \times 10^{-19}\text{ C})\,(1 \times 10^{5}\text{ m s}^{-1})\,(2 \times 10^{-5}\text{ T}) = 3{,}2 \times 10^{-19}\text{ N}.$$

(b) L'accélération due à cette force se calcule par :

$$a = F\,/\,m = (3{,}2 \times 10^{-19}\text{ N})\,/\,(9{,}11 \times 10^{-31}\text{ kg}) = 0{,}35 \times 10^{-12}\text{ m s}^{-2}.$$

---

40 (a) La force sur un mètre de fil est égale à :

$$F = B\,i\,\ell = (5\text{ T})\,(150000\text{ A})\,(1\text{ m}) = 750000\text{ N}.$$

(b) Si l'on suppose que le courant circule dans la spire dans le sens horlogique, le champ à l'intérieur de la spire s'enfonce. La force est alors trouvée localement par le produit vectoriel $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$: elle s'éloigne de l'axe de la bobine. (c) La force sur un mètre de fil multipliée par le nombre de spires donne directement la pression, c'est-à-dire la force par mètre carré de surface. Elle vaut $7{,}5 \times 10^{6}$ Pa.

---

41 (a) Le moment dipolaire se calcule par le produit du courant et de la surface de la spire. Le courant se détermine par la loi d'Ohm et l'on obtient :

$$\mu = i\,A = (E\,/\,R)\,A = [(6\text{ V})\,/\,(10\ \Omega)]\,[(0{,}5\text{ m})\,(0{,}8\text{ m})] = 0{,}24\text{ A m}^2.$$

(b) Le moment des forces est égal à $\tau = \mu\,B \sin\theta$ où θ est l'angle entre la direction de la normale à la surface et celle du champ $\mathbf{B}$. Ce moment est donc maximum lorsque $\sin\theta = 1$, ou encore $\theta = 90\,°$. Le moment vaut alors :

$$\tau = (0{,}24\text{ A m}^2)\,(0{,}5\text{ T}) = 0{,}12\text{ N m}.$$

(c) Le moment des forces est minimum lorsque $\sin\theta = 0$, soit $\theta = 0$ ou $180\,°$. La boucle est alors perpendiculaire aux lignes de champ, autrement dit, la normale $\mathbf{n}$ et le moment dipolaire $\boldsymbol{\mu}$ sont parallèles ou antiparallèles au champ.

---

43 Le champ à droite du fil parcouru par le courant entre dans le plan de la feuille

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

et sa grandeur est égale à $B = 2\,k'\,i\,/\,r = (20 \times 10^{-7})\,/\,r$. Sur le montant gauche du cadre, la grandeur de la force est déterminée par :

$$F_1 = B\,i\,\ell = [(20 \times 10^{-7})\,/\,(0{,}1\text{ m})]\,(2\text{ A})\,(0{,}1\text{ m}) = 40 \times 10^{-7}\text{ N}$$

et le produit vectoriel $\ell \times \mathbf{B}$ nous donne son sens, vers la gauche. Sur le montant droit du cadre, la force est égale à :

$$F_2 = B\,i\,\ell = [(20 \times 10^{-7})\,/\,(0{,}2\text{ m})]\,(2\text{ A})\,(0{,}1\text{ m}) = 20 \times 10^{-7}\text{ N.}$$

Le même produit vectoriel nous indique son sens, vers la droite. Sur le montant supérieur, la force est dirigée vers le haut et elle est égale en grandeur à la force qui s'exerce vers le bas, sur le montant inférieur. Le cadre ne subit donc pas de force résultante suivant la verticale. La force résultante horizontale est égale, elle, à 20×10^{-7} N et elle est dirigée vers la gauche.

---

47 Si chaque spire constitue une longueur de fil égale à 0,2 m, avec les 500 m de fil, on peut construire un solénoïde de (500 m) / (0,2 m spire^{-1}) = 2500 spires. L'expression du champ dans un solénoïde permet de calculer le courant nécessaire $i = B\,/\,(4\,\pi\,k'\,n)$ où n est le nombre de spires par unité de longueur, soit n = (2500 spires) / (5 m) = 500 spires m^{-1}. Le courant vaut donc :

$$i = (0{,}1\text{ T})\,/\,[4\,\pi\,(1 \times 10^{-7}\text{ T m A}^{-1})\,(500\text{ spires m}^{-1})] = 15{,}9\text{ A}$$

---

49 (a) Le courant se définit comme la charge qui traverse une section droite du conducteur par unité de temps. Ici, il faut un temps t égal à $[1\,/\,(6{,}8 \times 10^{15}\text{ s}^{-1})]$ pour voir l'électron repasser à un endroit déterminé. Le courant se calcule par $i = (1{,}6 \times 10^{-19}\text{ C})\,/\,t = 1{,}09 \times 10^{-3}$ A. (b) Le champ au centre d'une boucle vaut :

$$B = 2\,\pi\,k'\,i\,/\,a$$
$$= 2\,\pi\,(1 \times 10^{-7}\text{ T m A}^{-1})\,(1{,}09 \times 10^{-3}\text{ A})\,/\,(5{,}1 \times 10^{-11}\text{ m}) = 13{,}4\text{ T.}$$

---

50 Le champ est nul puisqu'une demi-boucle a tendance à provoquer en c un champ magnétique sortant du plan et la seconde demi-boucle un champ magnétique égal mais rentrant dans le plan.

---

51 Le champ au centre de la demi-boucle est égal à la moitié du champ qui existerait si la boucle était complète. Il vaut donc $B = \pi\,k'\,i\,/\,a$.

---

53 (a) La vitesse à la sortie du sélecteur est telle que la force électrique compense exactement la force magnétique : $q\,v\,B = q\,E$. Elle vaut :

$$v = E\,/\,B = (1 \times 10^5\text{ N C}^{-1})\,/\,(0{,}6\text{ T}) = 167 \times 10^3\text{ m s}^{-1}.$$

(b) Dans la zone de déflexion, l'accélération centripète est due au champ magnétique. Le rayon de la trajectoire vaut $R = m\,v\,/\,(B\,q)$. La différence des deux rayons a comme valeur :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$R_{22} - R_{20} = (2 \text{ uma})\,(1{,}66 \times 10^{-27} \text{ kg uma}^{-1})\,(167 \times 10^{3} \text{ m s}^{-1}) \\ /[(0{,}8 \text{ T})\,(1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C})] \\ = 4{,}3 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

Cette différence correspond à la moitié de la déflexion observée puisque les particules partent de la même position. La séparation spatiale est donc égale à $8{,}6 \times 10^{-3}$ m.

---

54 Dans la zone de déflexion, le rayon de la trajectoire est donné par :

$R = m\,v\,/\,(q\,B)$

$= (1{,}67 \times 10^{-27} \text{ kg})\,(3 \times 10^{7} \text{ m s}^{-1})\,/\,[(1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C})\,(1{,}5 \text{ T})] = 0{,}209 \text{ m}.$

La période obéit à la loi $v\,T = 2\,\pi\,R$ et la fréquence se calcule par :

$f = 1\,/\,T = v\,/\,(2\,\pi\,R) = (3 \times 10^{7} \text{ m s}^{-1})\,/\,[2\,\pi\,(0{,}209 \text{ m})] = 22{,}9 \times 10^{6} \text{ Hz}.$

---

55 (a) Puisque la somme des énergies cinétique et potentielle reste constante, la vitesse finale obéit à $q\,V = m\,v^2\,/\,2$. Cette vitesse vaut donc :

$v = [2\,(1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C})\,(2 \times 10^{4} \text{ V})\,/\,(9{,}11 \times 10^{-31} \text{ kg})]^{1/2} = 83{,}8 \times 10^{6} \text{ m s}^{-1}$.

(b) La force magnétique vaut :

$F = q\,v\,B = (1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C})\,(83{,}8 \times 10^{6} \text{ m s}^{-1})\,(6 \times 10^{-5} \text{ T}) = 8{,}0 \times 10^{-16} \text{ N}.$

(c) Influencé par cette force, le mouvement devient un MRUA. L'accélération de l'électron vaut $a = F\,/\,m = 8{,}83 \times 10^{14} \text{ m s}^{-2}$. La loi des espaces du MRU horizontal permet de calculer le temps nécessaire au parcours dans le tube : $t = (0{,}15 \text{ m})\,/\,(83{,}8 \times 10^{6} \text{ m s}^{-1}) = 1{,}79 \times 10^{-9}$ s. La loi des espaces du MRUA dans la direction de l'accélération détermine la déviation :

$\Delta y = a\,t^2\,/\,2 = (8{,}83 \times 10^{14} \text{ m s}^{-2})\,(1{,}79 \times 10^{-9} \text{ s})^2\,/\,2 = 1{,}41 \times 10^{-3} \text{ m}.$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre **20**

Courants et champs induits

RAPPELS

Les forces et les courants dus à la présence de champs électrique et magnétique sont étroitement dépendants les uns des autres. Les courants induits dans une boucle sont très directement liés aux variations de flux magnétique, c'est-à-dire au produit de la surface et de la composante B_n du champ magnétique normal à la boucle :

$$\phi = B\,A\cos\theta = B_n\,A.$$

L'unité de flux est le Weber (Wb).

La loi de Faraday énonce que la FEM moyenne induite dans un circuit est égale à la vitesse moyenne de variation du flux $E = -\Delta\phi / \Delta t$. Le courant induit qui en résulte produit aussi un champ magnétique qui s'oppose toujours aux modifications de flux qui l'ont fait naître. Ce dernier énoncé constitue la loi de Lenz.

Chaque fois que le flux magnétique dans un objet conducteur varie, des courants induits, appelés courants de Foucault, apparaissent. Ces courants engendrent de la chaleur et réduisent le rendement des machines électriques.

L'apparition d'une force électromotrice dans une boucle en rotation à la fréquence f dans un champ magnétique est à la base de la création des générateurs de courant continu ou alternatif ($E = \omega\,B\,A\sin\omega\,t$ où $\omega = 2\,\pi f$).

On utilise un transformateur pour réduire ou augmenter une tension alternative. Si N_1 et N_2 sont le nombre de spires des enroulements primaire et secondaire respectivement, les FEM totales induites dans les bobinages obéissent à la relation :

$$E_1 / E_2 = N_2 / N_1.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

L'introduction de certains matériaux dans un champ magnétique extérieur **B** change la valeur de ce champ en K_m **B** où K_m est la constante magnétique. Il y a trois classes de substances magnétiques : les substances diamagnétiques (K_m légèrement inférieur à 1), les substances paramagnétiques (K_m légèrement supérieur à 1) et les substances ferromagnétiques (K_m dépend du champ appliqué et du traitement subi par le corps).

La FEM qui donne naissance au courant induit est appelée la FEM self-induite ou auto-induite. Elle ralentit les variations brusques de courant dans un circuit. Elle est proportionnelle à la vitesse de variation du flux qui, lui, varie avec le champ magnétique. Comme le champ est proportionnel au courant, on trouve finalement que $E = - L\ \Delta i\ /\ \Delta t$ où L est une constante appelée inductance ou coefficient de self-induction dont l'unité est le henry H. Dans un solénoïde formé de N spires, l'inductance vaut $L = N\ \phi\ /\ i$. Si le centre des spires est occupé par un noyau de constante magnétique K_m, l'inductance se calcule par $L = 4\ \pi\ K_m\ k'\ n^2\ A\ \ell$ où n est le nombre de spires par unité de longueur et ℓ la longueur de la bobine. Ce genre de bobine porte le nom de self.

L'énergie accumulée dans une bobine de self-induction vaut $U = L\ i^2\ /\ 2$. L'effet de la self-induction se manifeste dans un circuit RL série par un retard à l'établissement de la valeur finale du courant $i_f = E\ /\ R$ suivant la relation $i = i_f\ (1 - e^{-t\ /\ T_L})$ où T_L est la constante de temps égale à $T_L = L\ /\ R$.

Les courants alternatifs ont une grande importance dans de nombreuses applications. Sur un cycle, le courant, $i = i_0 \sin \omega\ t$, a une moyenne nulle mais les effets du courant sont observables. On définit le courant efficace par la relation $i_e = i_0\ /\ \sqrt{2}$ où i_0 est l'amplitude du courant. De même, on définit la tension efficace $v_e = V_0\ /\ \sqrt{2}$. On retrouve la loi d'Ohm en valeurs efficaces, $v_e = i_e\ Z$, où l'impédance Z se calcule par $[R^2 + (X_L - X_C)^2]^{1/2}$. Dans cette dernière expression, $X_L = \omega\ L$ est la réactance inductive et $X_C = 1\ /\ (\omega\ C)$ la réactance capacitive si $f = \omega\ /\ (2\ \pi)$ est la fréquence du générateur. La différence $X_L - X_C$ est la réactance résultante. La fréquence pour laquelle $X_L = X_C$ est la fréquence de résonance. Elle vaut $\omega = 1\ /\ (L\ C)^{1/2}$. Les différences de potentiel efficace sont, pour un circuit purement inductif, $v_e^L = i_e\ X_L$ et, pour un circuit purement capacitif, $v_e^C = i_e\ X_C$. Les différences de potentiel instantanées aux bornes des différents éléments sont :

$$v_R = i_0\ R \sin \omega\ t,\ v_C = - i_0\ X_C \cos \omega\ t \text{ et } v_L = i_0\ X_L \cos \omega\ t.$$

Comme en courant continu, la somme des différences de potentiel sur un circuit fermé est nulle et on retrouve $v_e = [(v_e^R)^2 + (v_e^L - v_e^C)^2]^{1/2}$.

La puissance moyenne dissipée dans la résistance par un courant alternatif vaut $P = i_e\ v_e\ (R\ /\ Z)$ où $R\ /\ Z$ est le facteur de puissance. La puissance transférée en courant continu est maximale lorsque les résistances de la source (générateur) et de la charge (circuit extérieur) sont égales tandis qu'en courant alternatif, il faut que les résistances de la source et de la charge soient égales et que les réactances se compensent, de sorte que la réactance totale du circuit soit nulle.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

SOLUTION DES EXERCICES

20.1 LA LOI DE FARADAY

1 (a) Le flux magnétique à travers la boucle de fil passe d'une valeur nulle à une valeur non nulle. Une FEM apparaît et un courant induit se met à circuler. (b) Puisque le champ est constant dans la région considérée, le flux magnétique ne varie pas et il n'y a pas de courant induit. (c) Le flux magnétique diminue et un courant induit circule dans la boucle de façon à s'opposer à cette diminution.

---

2 Le courant induit va créer son propre champ magnétique de façon à s'opposer à l'augmentation de flux magnétique dans la boucle. Le champ magnétique induit doit sortir du plan du dessin et le courant induit qui le provoque circule donc dans le sens anti-horlogique.

---

4 (a) Dans la boucle rectangulaire, le champ magnétique s'enfonce dans le plan du dessin. (b) Si on augmente le courant I, le champ dans la boucle augmente aussi et le flux magnétique, directement proportionnel à B, se met à croître. Le courant induit qui circule dans la boucle s'oppose à cette augmentation de flux en créant son propre champ magnétique sortant du plan de la feuille. Le courant induit circule donc dans le sens anti-horlogique. (c) Déplacer la boucle vers la droite revient à y provoquer une diminution de flux. Le champ magnétique dû au courant induit doit s'enfoncer dans le plan du dessin pour s'opposer à la diminution du champ initial. Le courant induit circule donc dans le sens horlogique.

---

5 La variation de flux magnétique est égale à :

$$\Delta\phi = \Delta B\, A = (2\ T)\ \pi\ (0{,}1\ \text{m})^2 = 62{,}8 \times 10^{-3}\ \text{Wb}.$$

La FEM induite est donnée par la loi de Faraday :

$$E = |-\Delta\phi / \Delta t| = (62{,}8 \times 10^{-3}\ \text{Wb}) / (0{,}01\ \text{s}) = 6{,}28\ \text{V}.$$

On détermine le courant induit à partir de la loi d'Ohm :

$$i = E / R = (6{,}28\ \text{V}) / (2\ \Omega) = 3{,}14\ \text{A}.$$

---

6 Par définition, le flux magnétique final est nul.

(a) La FEM induite se calcule par :

$$E = -(\phi_f - \phi_i) / \Delta t = B\, A / \Delta t = (3\ \text{T})\ \pi\ (0{,}1\ \text{m})^2 / (0{,}3\ \text{s}) = 0{,}314\ \text{V}.$$

(b) Le courant induit se déduit de la loi d'Ohm :

$$i = E / R = (0{,}314\ \text{V}) / (10\ \Omega) = 0{,}0314\ \text{A}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

7 Toutes les demi-périodes ($\Delta t = T / 2$), le flux magnétique passe d'une valeur égale à $B A \cos 0°$ à $B A \cos 180°$. (a) La variation de flux est donc égale à $2 B A$ et la FEM moyenne vaut $E = 2 B A / (T / 2) = 4$ (2 T) (0,1 m^2) / [(1/60) s] = 48 V. (b) Le flux final est égal au flux initial et la FEM moyenne est nulle.

8 La variation de flux est due à une variation de la surface $\Delta A = \ell \, \Delta x = \ell \, v \, \Delta t$. La FEM induite est donc égale à $E = - B \ell v$ et le courant induit vaut, par la loi d'Ohm,
$i = E / R = B \ell v / R$ = (0,5 T) (0,05 m) (0,7 m s^{-1}) / (100 Ω) = 1,75 × 10^{-4} A.

20.2 COURANTS DE FOUCAULT

9 Les courants induits circulent de façon à ce que le champ induit s'oppose à la variation de flux. Le champ induit doit donc traverser le conducteur vers le bas, et le courant induit qui en est responsable circule dans le sens horlogique (en regardant le conducteur du dessus).

10 Le déplacement vers la gauche correspond à une diminution du flux dans le conducteur; les courants induits circulent dans le sens anti-horlogique pour que le champ qu'ils génèrent soit tel qu'il compense la diminution du flux.

20.3 GÉNÉRATEURS ÉLECTRIQUES

11 Un cycle correspond à une période $T = 2 \pi / \omega$. Le temps pendant lequel le flux varie est égal à un quart de cycle, soit $\Delta t = T / 4 = \pi / (2 \omega)$. Pendant ce laps de temps, le flux passe de $\phi = B A$ à $\phi = 0$. La FEM est donc égale à $E = 2 \omega B A / \pi$.

12 L'amplitude de la FEM est égale à $E = \omega B A = 2 \pi f B A$. Le courant induit se calcule grâce à la loi d'Ohm par :

$$i = E / R = 2 \pi \text{ (100 Hz) (0,5 T) (0,2 m)}^2 / (10 \Omega) = 1{,}26 \text{ A}.$$

13 L'amplitude de la FEM est égale à $E = \omega B A = 2 \pi f B A$. Si on fait le rapport de ces équations dans les deux situations, on écrit (50 V) / E = (60 Hz) / (180 Hz) et on calcule E = 150 V.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

20.4 TRANSFORMATEURS

14 Dans un transformateur, la relation entre le nombre de spires et la tension du primaire et du secondaire s'écrit $E_2 / E_1 = N_2 / N_1$. On calcule :

$$N_2 / N_1 = (50\,000 \text{ V}) / (120 \text{ V}) = 416{,}7.$$

---

16 La tension aux bornes du secondaire se calcule par $E_2 = E_1 N_2 / N_1$. Elle vaut (a) $E_2 = (120 \text{ V})\,(500) / (100) = 600 \text{ V}$ et (b) $E_2 = (120 \text{ V})\,(100) / (500) = 24 \text{ V}$.

20.5 LES SUBSTANCES MAGNÉTIQUES

17 (a) L'introduction du corps dans le champ magnétique du solénoïde dans le vide réduit ce champ d'un facteur K_m. La constante magnétique vaut donc $K_m = (0{,}498 \text{ T}) / (0{,}5 \text{ T}) = 0{,}996$. (b) Cette constante est légèrement inférieure à l'unité : il s'agit d'une substance diamagnétique.

20.6 SELF-INDUCTION (OU AUTO-INDUCTION)

20 En augmentant la résistance variable, le courant qui circule dans le sens horlogique dans la boucle de gauche diminue. (a) Le champ magnétique au centre de cette boucle diminue et le champ magnétique induit s'oppose à cette diminution. Le courant induit circule donc dans le sens horlogique. (b) Dans la boucle de droite, le champ magnétique sort du plan du dessin et, pour s'opposer à la diminution de ce champ, le courant induit doit circuler dans le sens anti-horlogique.

---

21 La FEM self-induite se calcule par :

$$E = -L\,\Delta i / \Delta t = -(0{,}2 \text{ H})\,(10 \text{ A}) / (0{,}1 \text{ s}) = -20 \text{ V}.$$

Le signe moins indique que la FEM s'oppose à la variation de courant.

---

23 Lorsque le centre de la bobine est occupé par une substance magnétique, l'inductance se calcule par :

$$L = 4\,\pi\,K_m\,k'\,n^2\,A\,\ell$$
$$= 4\,\pi(1000)(1\times10^{-7} \text{ T m A}^{-1})[(1000 \text{ spires})/(0{,}2 \text{ m})]^2\pi\,(0{,}01 \text{ m})^2(0{,}2 \text{ m})$$
$$= 1{,}97 \text{ H}.$$

20.7 ÉNERGIE ACCUMULÉE DANS UNE SELF

25 (a) Par définition de la FEM self-induite, l'inductance se calcule par :

$$L = E\,\Delta t / \Delta i = (8 \text{ V})\,(2 \text{ s}) / (10 \text{ A}) = 1{,}6 \text{ H}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(b) L'énergie accumulée dans la self vaut :

$$U = L\,i^2 / 2 = (1{,}6\ \text{H})\ (10\ \text{A})^2 / 2 = 80\ \text{J}.$$

---

27 Pour une inductance constante, on peut écrire $U_1 / i_1^2 = U_2 / i_2^2$ et calculer :

$$i_2 = (U_2 / U_1)^{1/2}\ i_1 = [(450\ \text{J}) / (50\ \text{J})]^{1/2}\ (10\ \text{A}) = 30\ \text{A}.$$

20.8 CIRCUITS RL

30 (a) Le courant final s'établit lorsque la self ne se manifeste plus, soit lorsque $i_f = E / R = (12\ \text{V}) / (10\ \Omega) = 1{,}2\ \text{A}$. (b) La constante de temps d'un circuit RL série vaut $T_L = L / R = (0{,}2\ \text{H}) / (10\ \Omega) = 0{,}02\ \text{s}$. (c) Le courant en $t = T_L$ est égal à $i = i_f\ (1 - \text{e}^{-1}) = 0{,}76\ \text{A}$. (d) Après 4 s, le courant a atteint sa valeur finale : $i = i_f\ (1 - \text{e}^{-4\ /\ T_L}) = 1{,}2\ \text{A}$.

---

31 (a) Grâce à la valeur finale du courant, on peut trouver la résistance :

$$R = E / i_f = (6\ \text{V}) / (0{,}1\ \text{A}) = 60\ \Omega.$$

(b) En utilisant l'expression du courant instantané, on détermine :

$$T_L = -\,t / \ln\,(1 - i / i_f) = -\,(0{,}01\ \text{s}) / \ln\,[1 - (0{,}063\ \text{A}) / (0{,}1\ \text{A})] = 0{,}01\ \text{s}.$$

(c) L'inductance se calcule à partir de la constante de temps :

$$L = T_L\ R = (0{,}01\ \text{s})\ (60\ \Omega) = 0{,}6\ \text{H}.$$

---

32 Après 8 s, le courant a atteint une grandeur égale à :

$$i = (8\ \text{A})\ [1 - \text{e}^{-(8\ s)\ /\ (4\ s)}] = 6{,}9\ \text{A}.$$

L'énergie accumulée vaut $U = L\,i^2 / 2 = (0{,}1\ \text{H})\ (6{,}9\ \text{A})^2 / 2 = 2{,}4\ \text{J}$.

20.9 VALEURS EFFICACES DES TENSIONS ET DES COURANTS ALTERNATIFS

35 (a) La puissance peut s'exprimer sous la forme $P = i_e\ v_e$. On détermine donc :

$$i_e = P / v_e = (60\ \text{W}) / (120\ \text{V}) = 0{,}5\ \text{A}.$$

(b) Sa valeur de pointe est égale à $i_0 = \sqrt{2}\ i_e = 0{,}707\ \text{A}$. (c) Comme le courant est sinusoïdal, il atteint cette valeur positive une fois par cycle, soit 60 fois par seconde.

---

37 Si la résistance n'a pas changé, le courant efficace qui traverse le radiateur est resté constant. On peut écrire $P_1 / v_{e1} = P_2 / v_{e2}$ et calculer :

$$P_2 = P_1\ (v_{e2} / v_{e1}) = (1500\ \text{W})\ [(240\ \text{V}) / (120\ \text{V})] = 3000\ \text{W}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

38 Le courant efficace est défini par $i_0 / \sqrt{2}$ et vaut $i_e = (15\ \text{A}) / \sqrt{2} = 10{,}6\ \text{A}$. (a) La puissance est égale à $v_e\, i_e = (120\ \text{V})\ (10{,}6\ \text{A}) = 1{,}27 \times 10^3\ \text{W}$. (b) Elle vaut $v_e\, i_e = (240\ \text{V})\ (10{,}6\ \text{A}) = 2{,}54 \times 10^3\ \text{W}$.

---

39 (a) Sachant que la vitesse angulaire ω vaut $1000\ \text{s}^{-1}$, on détermine f par :

$$\omega / (2\,\pi) = (1000\ \text{s}^{-1}) / (2\,\pi) = 159{,}2\ \text{s}^{-1}.$$

(b) La valeur de pointe de la tension est égale à 100 V de sorte que sa valeur efficace se calcule par $v_e = v_0 / \sqrt{2} = 70{,}7\ \text{V}$.

20.10 RÉACTANCE

42 (a) La réactance inductive vaut $X_L = \omega\, L = 2\,\pi\ (60\ \text{s}^{-1})\ (0{,}05\ \text{H}) = 18{,}8\ \Omega$.

(b) La réactance capacitive est égale à :

$$X_C = 1 / (\omega\, C) = 1 / [2\,\pi\ (60\ \text{s}^{-1})\ (1 \times 10^{-6}\ \text{F})] = 2{,}65 \times 10^3\ \Omega.$$

(c) Il faut que $\omega\, L = 1 / (\omega\, C)$, soit :

$$\omega = 1 / (L\, C)^{1/2} = 1 / [(0{,}05\ \text{H})\ (1 \times 10^{-6}\ \text{F})]^{1/2} = 4{,}47 \times 10^3\ \text{s}^{-1}.$$

---

43 A la fréquence de 1000 Hz, l'égalité des réactances conduit à l'expression de L en fonction de C : $L = 1 / [(1 \times 10^6)\ C]$. Le rapport X_C / X_L est égal à $1 / (\omega^2\, L\, C)$. En remplaçant L par son expression, on trouve $X_C / X_L = 100$.

---

44 (a) En courant alternatif, la tension efficace aux bornes du condensateur vaut $v_e = X_C\, i_e = i_e / (C\, \omega)$. On calcule donc :

$$i_e = v_e\, C\, \omega = (120\ \text{V})\ (1 \times 10^{-4}\ \text{F})\ 2\,\pi\ (60\ \text{s}^{-1}) = 4{,}5\ \text{A}.$$

(b) La valeur de pointe du courant vaut $i_0 = i_e\, \sqrt{2} = 6{,}4\ \text{A}$.

---

45 (a) En courant alternatif, la tension efficace aux bornes de la self vaut :

$$v_e = X_L\, i_e = i_e\, L\, \omega.$$

On calcule donc $i_e = v_e / (L\, \omega) = (120\ \text{V}) / [(0{,}4\ \text{H})\ 2\,\pi\ (60\ \text{s}^{-1})] = 0{,}796\ \text{A}$.

(b) La valeur de pointe du courant vaut $i_0 = i_e\, \sqrt{2} = 1{,}125\ \text{A}$.

20.11 IMPÉDANCE

49 (a) L'impédance Z d'un circuit RLC se calcule par :

$$Z = \{R^2 + [L\, \omega - 1 / (C\, \omega)]^2\}^{1/2}$$

$$= \{(100\ \Omega)^2 + [(0{,}1\ \text{H})\ 2\,\pi\ (60\ \text{s}^{-1}) - 1 / [(1 \times 10^{-4}\ \text{F})\ 2\,\pi\ (60\ \text{s}^{-1})]]^2\}^{1/2}$$

$$= 101\ \Omega.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(b) On détermine la valeur efficace du courant par :

$$i_e = v_e / Z = (120 \text{ V}) / (101\ \Omega) = 1{,}19 \text{ A}.$$

---

50 L'impédance de ce circuit RC est égale à :

$$Z = [R^2 + X_C^2]^{1/2} = [(30\ \Omega)^2 + (40\ \Omega)^2]^{1/2} = 50\ \Omega.$$

(a) Le courant efficace vaut $i_e = v_e / Z = (50 \text{ V}) / (50\ \Omega) = 1$ A tandis que (b) le courant de pointe est égal à $i_0 = i_e \sqrt{2} = 1{,}41$ A.

---

52 La fréquence de résonance $\omega^2 = 1 / (L\ C)$ permet de calculer la valeur de la capacité :

$$C = 1 / (L\ \omega^2) = 1 / \{(2 \times 10^{-5} \text{ H})\ [2\ \pi\ (1 \times 10^6 \text{ s}^{-1})]^2\} = 1{,}3 \times 10^{-9} \text{ F}.$$

---

53 La FEM efficace se répartit entre les éléments du circuit RLC de telle façon que $v_e = [(v_e^R)^2 + (v_e^L - v_e^C)^2]^{1/2} = 250$ V.

20.12 PUISSANCE EN COURANT ALTERNATIF

54 (a) Le calcul de l'impédance donne une valeur égale à :

$$Z = [R^2 + X_L^2]^{1/2} = [(10\ \Omega)^2 + (10\ \Omega)^2]^{1/2} = 14{,}14\ \Omega.$$

(b) On détermine la puissance en courant alternatif par la relation $P = i_e\ v_e\ R / Z$ où le courant efficace vaut $i_e = v_e / Z = (120 \text{ V}) / (14{,}14\ \Omega) = 8{,}5$ A. La puissance est égale à $P = (8{,}5 \text{ A})\ (120 \text{ V})\ (10\ \Omega) / (14{,}14\ \Omega) = 720$ W.

---

55 (a) L'impédance se calcule par :

$$Z = [R^2 + (X_L - X_C)^2]^{1/2} = \{(5\ \Omega)^2 + [(10\ \Omega) - (22\ \Omega)]^2\}^{1/2} = 13\ \Omega.$$

(b) Le courant efficace vaut $i_e = v_e / Z = (120 \text{ V}) / (13\ \Omega) = 9{,}23$ A. La puissance dissipée dans la résistance est alors :

$$P = i_e\ v_e\ R / Z = (9{,}23 \text{ A})\ (120 \text{ V})\ (5\ \Omega) / (13\ \Omega) = 426 \text{ W}.$$

---

56 (a) Le courant est maximum lorsque l'impédance est minimale, soit quand $X_C = X_L$. On obtient cette égalité quand :

$$\omega = 1 / (L\ C)^{1/2} = 1 / [(0{,}01 \text{ H})\ (1 \times 10^{-4} \text{ F})]^{1/2} = 1 \times 10^3 \text{ s}^{-1}.$$

(b) La fréquence qui lui correspond vaut $f = \omega / (2\ \pi) = 159$ Hz. (c) Le courant efficace maximum vaut $i_e = v_e / Z = (10 \text{ V}) / (5\ \Omega) = 2$ A et la puissance dissipée dans la résistance vaut $P = i_e\ v_e = (2 \text{ A})\ (10 \text{ V}) = 20$ W.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

20.13 ADAPTATION D'IMPÉDANCE

58 (a) Le rapport des deux puissances est égal au rapport du carré des résistances puisque le courant reste inchangé dans tout le circuit. Ce rapport est égal à 1. (b) Le rapport des puissances est égal à $(0{,}005\ \Omega)^2 / (0{,}05\ \Omega)^2 = 0{,}01$.

---

59 La puissance dissipée dans le générateur se calcule par $R_s\, i^2$. La puissance totale vaut $(R_s + R)\, i^2$. Pour que $R_s\, i^2 \leqslant 0{,}01\ (R_s + R)\, i^2$, il faut que $R \geqslant 9{,}9\ R_s$ soit $9{,}9 \times 10^{-4}\ \Omega$.

SOLUTION DES PROBLÈMES

60 (a) La constante de temps d'un circuit RL est définie par :

$$T_L = L / R = (0{,}1\ \text{H}) / (10\ \Omega) = 0{,}01\ \text{s}.$$

(b) L'établissement du courant final se fait suivant la relation $i = i_f\ (1 - \text{e}^{-t\,/\,T_L})$. Pour que le courant i soit égal à $0{,}99\ i_f$, il faut que $t = -\,T_L \ln (0{,}01) = 0{,}046$ s.

---

61 L'énergie emmagasinée dans une bobine vaut $L\, i^2 / 2$. La valeur finale du courant est égale à E / R et en introduisant l'expression de $T_L = L / R$, on trouve $U = T_L\, E^2 / (2\, R)$.

---

62 (a) La vitesse de variation du courant se calcule par $\text{d}i / \text{d}t = \text{d}[i_f\ (1 - \text{e}^{-t\,/\,T_L})] / \text{d}t = i_f / T_L = i_f\, R / L$ en $t = 0$ s. (b) Si l'on écrit $i = (\text{d}i / \text{d}t)\, t$, on trouve que la valeur de $i = i_f$ est obtenue après $t = L / R$, soit après T_L.

---

63 En introduisant la valeur de $i = i_f / 2$ dans la relation qui permet de suivre la valeur du courant en fonction du temps, on trouve, après application du logarithme népérien aux deux termes de l'égalité, que :

$$T_L = -\,(4\ \text{s}) / \ln (0{,}5) = 5{,}77\ \text{s}.$$

---

67 (a) La puissance dissipée dans la batterie est égale à celle dissipée dans la charge. Elles valent $P = R_s\, i^2 = R_\ell\, i^2$. (b) Si P_ℓ est très grand, le rapport P_s / P_ℓ tend vers 0.

---

69 Lorsque la normale est parallèle à **B**, le flux qui traverse la boucle est égal à $B\, A$. Lorsqu'elle est antiparallèle, le flux vaut $-\,B\, A$. (a) La FEM induite découle de

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

la relation $E = -\Delta\phi / \Delta t$ et vaut $E = 2\,B\,A / \Delta t$. (a) On détermine le courant moyen induit par $i = E / R = 2\,B\,A / (R\,\Delta t)$. (c) Le courant tend à s'opposer à la diminution de flux et circule de façon à ce que le champ magnétique induit apparaisse dans le même sens que le champ initial. (d) Par définition du courant, on trouve $\Delta q = i\,\Delta t = 2\,B\,A / R$.

---

71 (a) Partant de la gauche, le pendule sera brusquement ralenti en entrant dans le champ magnétique. (a) Le flux magnétique dans le conducteur augmente et des courants induits se mettent à circuler dans le sens anti-horlogique de façon que le champ magnétique induit contrarie l'accroissement de flux. (b) Si l'on considère le bord droit du pendule parcouru par un courant montant, la force magnétique agissant sur ce côté est dirigée vers la gauche et ralentit le pendule.

---

73 (a) L'inductance d'un solénoïde dont le centre est occupé par un noyau magnétique se calcule par :

$$L = 4\,\pi\,K_m\,k'\,n^2\,A\,\ell$$
$$= 4\,\pi\,(1)\,(1\times10^{-7}\ \text{T m A}^{-1})\,[(1000\ \text{spires})/(100\ \text{m})]^2\,\pi\,(100\ \text{m})^2\,(100\ \text{m})$$
$$= 395\ \text{H}.$$

(b) L'énergie emmagasinée correspond à :

$$U = L\,i^2 / 2 = (395\ \text{H})\,(1{,}5\times10^5\ \text{A})^2 / 2 = 4{,}44\times10^{12}\ \text{J}.$$

(c) La puissance est définie par l'énergie fournie par unité de temps. Le temps s'évalue donc par :

$$U / P = (4{,}44\times10^{12}\ \text{J}) / (1\times10^9\ \text{W}) = 3{,}44\times10^3\ \text{s} = 74\ \text{min}.$$

---

74 (a) Le champ magnétique peut s'exprimer en fonction du flux par $B = \phi / A$. Dans une self, le flux se calcule par $\phi = L\,i / N$ et l'expression de l'inductance d'une bobine avec noyau magnétique permet d'obtenir le champ :

$$B = 4\,\pi\,K_m\,k'\,N\,i / \ell.$$

(b) L'énergie par unité de volume $U' = U / (A\,\ell) = L\,i^2 / (2\,A\,\ell)$ s'écrit donc :

$$U' = 2\,\pi\,K_m\,k'\,N^2\,i^2 / \ell^2.$$

(c) Le coefficient de proportionnalité s'en déduit aisément; il vaut $1 / (8\,\pi\,k')$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 21

Les ondes

RAPPELS

Les ondes périodiques sont caractérisées par leur fréquence f, leur longueur d'onde λ et leur vitesse de propagation c. Ces quantités sont liées entre elles par la relation $\lambda = c / f$. L'amplitude d'une onde est la valeur maximale du déplacement qui lui est associé. La vitesse de propagation dépend des propriétés du milieu traversé : une corde tendue avec une force J et dont la masse par unité de longueur est égale à μ constitue un milieu qui propage les déformations à la vitesse $c = (J / \mu)^{1/2}$.

Deux ondes peuvent interférer. Lorsque deux ondes passent par un même point, la vibration de ce point est donnée par la somme algébrique des déplacements correspondant à chacune d'elles. Deux ondes en phase interfèrent de manière constructive et deux ondes déphasées d'une demi-longueur d'onde interfèrent de manière destructive.

Les ondes qui rencontrent la séparation entre deux milieux peuvent être transmises, absorbées ou réfléchies. Une onde qui parvient à une extrémité fixe du milieu de propagation est réfléchie et voit sa forme inversée spatialement après réflexion. Réfléchie sur une extrémité libre, l'onde n'est pas inversée.

Des ondes stationnaires se forment lorsque deux ondes de même amplitude et voyageant dans des directions opposées interfèrent. Elles sont caractérisées par la formation de ventres de vibration séparés par des noeuds. La distance entre deux noeuds est égale à une demi-longueur d'onde. Les ondes stationnaires sur une corde tendue ne peuvent persister qu'à certaines fréquences, appelées harmoniques, déterminées par la longueur ℓ de la corde et la vitesse c de propagation sur celle-ci. Pour une corde tendue entre des extrémités fixes, on trouve $f_n = n\, c / (2\, \ell)$ avec $n = 1, 2, 3, \ldots$ (extrémités fixes). La fréquence $f_1 = c / (2\, \ell)$ est la fréquence fondamentale. La fréquence f_n est la fréquence de la $n^{\text{ième}}$ harmonique.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

L'énergie et la quantité de mouvement transportées par une onde sinusoïdale sont toutes deux proportionnelles au carré de l'amplitude de l'onde. L'intensité d'une onde, définie comme la puissance transmise par l'onde à travers une surface unitaire, varie également en raison directe du carré de l'amplitude.

Si les déplacements associés à une onde transversale s'effectuent toujours dans la même direction perpendiculaire à la direction de propagation, l'onde est dite polarisée dans cette direction. Lorsqu'une onde polarisée d'amplitude A_g et d'intensité I_g traverse un polariseur forçant la vibration dans une direction formant un angle θ avec la direction de polarisation de l'onde incidente, l'amplitude transmise est $A_d = A_g \cos \theta$ et l'intensité transmise est $I_d = I_g \cos^2 \theta$.

L'effet Doppler est la modification de la fréquence d'une onde lorsqu'elle est émise par une source en mouvement ou lorsqu'elle est perçue par un observateur en mouvement. Pour un observateur qui s'éloigne à la vitesse v_o d'une source fixe émettant à la fréquence f, la fréquence perçue est donnée par $f' = f\ [(c - v_o) / c]$. Lorsque l'observateur s'éloigne de la source, v_o représente une quantité négative. Si la source s'éloigne à vitesse v_s d'un observateur au repos, celui-ci perçoit une fréquence $f' = f\ [c / (c + v_s)]$. Ces relations ne sont pas correctes pour les ondes lumineuses, qui ne mettent en jeu aucun milieu matériel pour se propager. Dans ce cas, la relation suivante

$$f' = f \frac{c - u}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

est correcte dans les deux cas où la vitesse u représente la vitesse d'éloignement de la source par rapport à l'observateur ou la vitesse d'éloignement de l'observateur par rapport à la source.

Si une onde est envoyée à partir d'une source fixe sur un objet qui s'éloigne à la vitesse v_c et revient après réflexion vers un détecteur, lui aussi au repos, la fréquence reçue par le détecteur vaut

$$f_r = f \left(\frac{c - v_c}{c + v_c} \right)$$

Cette relation trouve une application dans le débitmètre Doppler, utilisé pour mesurer la vitesse d'écoulement du sang dans les vaisseaux. L'onde utilisée est une vibration sonore ($c = 1570$ m s^{-1} dans le sang) et la réflexion est provoquée par les globules rouges en mouvement.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

SOLUTION DES EXERCICES

21.1 REPRÉSENTATION D'UN MOUVEMENT ONDULATOIRE

1 Pour une onde progressive sinusoïdale, la longueur d'onde λ est liée à la fréquence f par la relation $\lambda = c / f$, où c est la vitesse de propagation de l'onde. Ici, on trouve $\lambda = (344 \text{ m s}^{-1}) / (1000 \text{ s}^{-1}) = 0{,}344 \text{ m}$.

---

3 (a) La fréquence de la radiation électromagnétique vaut :

$$f = c / \lambda = (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}) / (0{,}03 \text{ m}) = 1 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}.$$

La période d'une onde complète est donc $T = 1 / f = 1 \times 10^{-10}$ s. (b) En 0,5 s, il sera ainsi émis (0,5 s) / (1×10^{-10} s) = 5×10^9 périodes. (c) La distance parcourue par le premier front d'onde en 0,5 s est :

$$\ell = (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}) (0{,}5 \text{ s}) = 1{,}5 \times 10^8 \text{ m}.$$

---

6 (a) La période T d'une onde de fréquence f vaut $T = 1 / f$. Ici,

$$T = 1 / (6 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}) = 1{,}67 \times 10^{-15} \text{ s}.$$

(b) Sa longueur d'onde dans le vide est :

$$\lambda = c / f = (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}) / (6 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}) = 5 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

(c) La fréquence ne change pas, mais la longueur d'onde est réduite aux trois quarts : $\lambda_{eau} = 3{,}75 \times 10^{-7}$ m.

21.2 LA VITESSE DE PROPAGATION DES ONDES

7 La vitesse de propagation d'une onde sur une corde tendue vaut $c = (J / \mu)^{1/2}$, où J est la force de tension de la corde et μ est la masse par unité de longueur. Ici, $c = [(90 \text{ N}) / (3 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1})]^{1/2} = 173 \text{ m s}^{-1}$.

---

9 Pour multiplier la vitesse par un facteur $a = (200 \text{ m s}^{-1}) / (160 \text{ m s}^{-1}) = 1{,}25$, il faut multiplier la tension par a^2, c'est-à-dire par 1,56. La tension est alors de (1,56) (100 N) = 156 N.

---

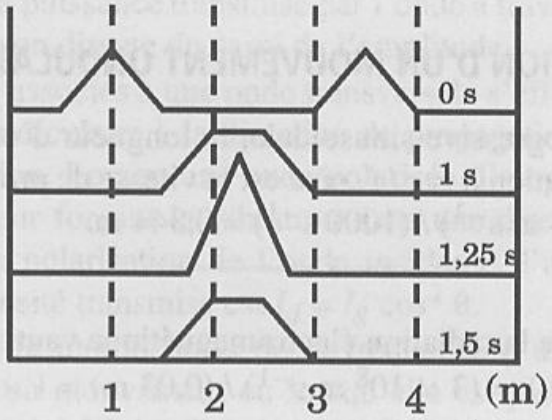
10 La vitesse de propagation dans le verre vaut :

$$c = (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}) / (1{,}647) = 1{,}82 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

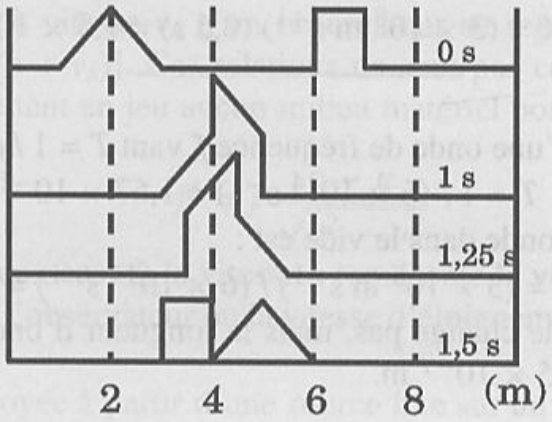
© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

21.3 INTERFÉRENCES

11

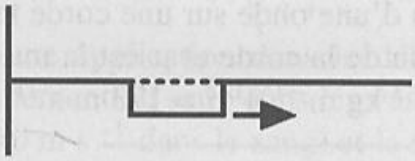


12

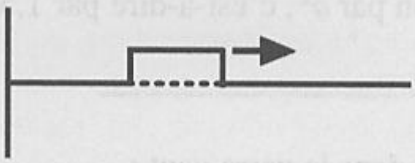


21.4 LES CONDITIONS AUX LIMITES

14



15



21.5 ONDES STATIONNAIRES RÉSONNANTES

16 La fréquence fondamentale vaut $f_1 = c / (2\ \ell)$, où c est la vitesse de propagation des ondes le long de la corde et ℓ est la longueur de celle-ci. On peut calculer la

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

vitesse de propagation en écrivant :

$$c = 2\,\ell\,f_1 = (2)\,(0{,}33\text{ m})\,(196\text{ s}^{-1}) = 129\text{ m s}^{-1}.$$

Celle-ci est fonction de la tension J et de la masse linéique μ suivant l'expression $c = (J / \mu)^{1/2}$. On peut donc évaluer la masse par unité de longueur :

$$\mu = J / c^2 = (55\text{ N}) / (129\text{ m s}^{-1})^2 = 3{,}29 \times 10^{-3}\text{ kg m}^{-1}.$$

---

17 (a) La vitesse de propagation sur une corde de longueur ℓ est liée à la fréquence fondamentale f_1 par la relation $c = 2\,\ell\,f_1 = 2\,(0{,}33\text{ m})\,(659\text{ s}^{-1}) = 435\text{ m s}^{-1}$. (b) J étant la tension de la corde, la masse par unité de longueur de celle-ci vaut $\mu = J / c^2 = (55\text{ N}) / (435\text{ m s}^{-1})^2 = 0{,}291 \times 10^{-3}\text{ kg m}^{-1}$.

---

18 La masse d'une corde cylindrique de longueur ℓ et de rayon r vaut $m = \rho\,\pi\,r^2\,\ell$, si ρ est sa masse volumique. La masse par unité de longueur vaut donc dans ce cas $\mu = \pi\,\rho\,r^2$ et le rapport des masses linéiques se déduit du rapport des rayons par la relation $\mu_1 / \mu_2 = (r_1 / r_2)^2$. Ainsi, on trouve :

$$r_1 / r_2 = (\mu_1 / \mu_2)^{1/2} = [(3 \times 10^{-3}\text{ kg m}^{-1}) / (0{,}29 \times 10^{-3}\text{ kg m}^{-1})]^{1/2} = 3{,}21.$$

---

19 La longueur d'onde est liée à la fréquence de la fondamentale par la relation $\lambda = c / f_1 = (350\text{ m s}^{-1}) / (100\text{ s}^{-1}) = 3{,}5\text{ m}$. La longueur de la corde correspond à la distance entre les deux noeuds de la vibration fondamentale, soit :

$$\ell = \lambda / 2 = (3{,}5\text{ m}) / 2 = 1{,}75\text{ m}.$$

---

20 $f = c / \lambda = c / (2\,\ell) = (170\text{ m s}^{-1}) / [2\,(0{,}5\text{ m})] = 170\text{ s}^{-1}$.

---

22 La fréquence fondamentale d'une corde de longueur ℓ, tendue entre ses deux extrémités fixes est $f = c / (2\,\ell)$. Cette relation nous permet d'évaluer la vitesse de propagation de l'onde de vibration sur la corde :

$$c = 2\,\ell\,f = 2\,(0{,}33\text{ m})\,(440\text{ s}^{-1}) = 290{,}4\text{ m s}^{-1}.$$

La longueur de la corde qui produit une fréquence fondamentale $f' = 659$ Hz vaut $\ell' = c / (2\,f') = (290{,}4\text{ m s}^{-1}) / [2\,(659\text{ s}^{-1})] = 0{,}22\text{ m}$.

---

23 (a) La longueur d'onde de la quatrième harmonique est quatre fois plus courte que la longueur d'onde de la fondamentale, elle-même égale à deux fois la longueur de la corde : $\lambda_4 = (2\,\ell) / 4 = (0{,}5\text{ m}) / 2 = 0{,}25\text{ m}$. (b) La fréquence de la quatrième harmonique vaut quatre fois celle de la fondamentale, soit :

$$f = (4)\,(650\text{ s}^{-1}) = 2600\text{ s}^{-1}.$$

La longueur d'onde de cette vibration dans l'air vaut :

$$\ell = c / f = (344\text{ m s}^{-1}) / (2600\text{ s}^{-1}) = 0{,}132\text{ m}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

21.6 ONDES COMPLEXES ET BATTEMENTS

26 La fréquence de la troisième harmonique de la corde vaut :

$$f = (3)\,(65{,}4\ \text{s}^{-1}) = 196{,}2\ \text{s}^{-1}.$$

La fréquence des battements est la différence :

$$(196{,}2\ \text{s}^{-1}) - (196\ \text{s}^{-1}) = 0{,}2\ \text{s}^{-1}.$$

---

27 La fréquence des battements est la différence :

$$f = f_1 - f_2 = (205\ \text{s}^{-1}) - (200\ \text{s}^{-1}) = 5\ \text{s}^{-1}.$$

---

28 La différence $|f - (300\ \text{s}^{-1})|$ vaut 4 Hz. La fréquence cherchée est donc 296 Hz ou 304 Hz.

21.7 ÉNERGIE ET QUANTITÉ DE MOUVEMENT TRANSPORTÉES PAR LES ONDES. LA POLARISATION DES ONDES TRANSVERSALES

29 L'amplitude transmise A_d est donnée par la projection :

$$A_d = A_g \cos\theta = (0{,}1\ \text{m}) \cos 30\,° = (0{,}1\ \text{m})\,(\sqrt{3}\,/\,2) = 0{,}086\ \text{m}.$$

---

30 Au passage de la première fente, l'amplitude de l'onde est réduite, multipliée par un facteur cos 45 °. Elle devient $A_2 = (0{,}2\ \text{m}) \cos 45\,° = 0{,}141\ \text{m}$. Après le passage par la deuxième fente, elle se réduit encore :

$$A_3 = A_2 \cos 45\,° = (0{,}141\ \text{m}) \cos 45\,° = 0{,}1\ \text{m}.$$

---

33 L'énergie se présente alors sous forme d'énergie cinétique : la corde présente une déformation nulle, mais n'est pas au repos.

21.8 L'EFFET DOPPLER

34 La source est en mouvement à la vitesse v_s. La fréquence f' perçue par un observateur fixe vaut $f' = f\ c\ /\ (c + v_s)$. (a) Si la locomotive se rapproche de l'observateur, la fréquence perçue est supérieure à la fréquence émise :

$$v_s = -40\ \text{m s}^{-1}$$

et $f' = (2000\ \text{s}^{-1})\,(344\ \text{m s}^{-1})\ /\ [(344\ \text{m s}^{-1}) - (40\ \text{m s}^{-1})] = 2263\ \text{Hz}.$

(b) Si la locomotive s'éloigne de l'observateur,

$$v_s = +40\ \text{m s}^{-1}$$

et $f' = (2000\ \text{s}^{-1})\,(344\ \text{m s}^{-1})\ /\ [(344\ \text{m s}^{-1}) + (40\ \text{m s}^{-1})] = 1792\ \text{Hz}.$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

35 Ici, l'observateur se rapproche de la source et la fréquence perçue vaut :

$$f' = f\,(c - v_o)\,/\,c,$$

où $v_o = -20\ \text{m s}^{-1}$. On trouve :

$$f' = (1000\ \text{s}^{-1})\,[(344\ \text{m s}^{-1}) + (20\ \text{m s}^{-1})]\,/\,(344\ \text{m s}^{-1}) = 1058\ \text{s}^{-1}.$$

---

36 Si une source s'éloigne à vitesse v_s d'un observateur immobile, la fréquence f' perçue est plus basse que la fréquence f émise et $f' = f\ c\,/\,(c + v_s)$. La variation relative de fréquence est, dans ces conditions, donnée par :

$$-0{,}08 = (f' - f)\,/\,f = -v_s\,/\,(c + v_s).$$

Sur base d'une vitesse du son $c = 344\ \text{m s}^{-1}$, ceci donne une vitesse de déplacement de la source égale à $v_s = 29{,}9\ \text{m s}^{-1}$.

---

37 Pour produire une fréquence de battements de 5 Hz à partir d'un diapason émettant une vibration de 500 Hz, il faut lui superposer une vibration de fréquence égale à 495 Hz ou égale à 505 Hz. Si un deuxième diapason identique au premier s'éloigne de l'observateur à la vitesse v_s, il produit chez ce dernier une vibration de fréquence $f' = f\ c\,/\,(c + v_s)$. La vitesse de déplacement qui produira la fréquence f' est donc $v_s = (f\,/\,f' - 1)\,c$. Pour atteindre la fréquence de 495 Hz, il faut une vitesse $v_s = [(500\ \text{Hz})\,/\,(495\ \text{Hz}) - 1]\,(344\ \text{m s}^{-1}) = 3{,}47\ \text{m s}^{-1}$ (le diapason s'éloigne de l'observateur). Pour une fréquence de 505 Hz, on trouve $v_s = -3{,}41\ \text{m s}^{-1}$ (le diapason se rapproche de l'observateur).

---

38 Pour la lumière, l'effet Doppler requiert une description relativiste. Si une galaxie s'éloigne de nous à la vitesse $u = 3 \times 10^7\ \text{m s}^{-1}$, la fréquence observée vaut :

$$f' = f\,(c - u)\,/\,(c^2 - u^2)^{1/2}.$$

Dans le cas présent,

$$f' = (6 \times 10^{14}\ \text{s}^{-1})\,[(3 \times 10^8\ \text{m s}^{-1}) - (3 \times 10^7\ \text{m s}^{-1})]$$
$$/\,[(3 \times 10^8\ \text{m s}^{-1})^2 - (3 \times 10^7\ \text{m s}^{-1})^2]^{1/2}$$
$$= 5{,}43 \times 10^{14}\ \text{s}^{-1}.$$

La fréquence est déplacée vers le rouge.

SOLUTION DES PROBLÈMES

40 Nous recherchons une expression de la vitesse de propagation c sous la forme du produit $c = \phi\ J^p\ \mu^q$, où ϕ est un coefficient sans dimension. En identifiant les dimensions des deux membres de cette égalité, nous trouvons :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$L\,T^{-1} = [M\,L\,T^{-2}]^p\,[M\,L^{-1}]^q = [M]^{p+q}\,[L]^{p-q}\,[T]^{-2p},$$

ce qui impose $2\,p = 1$ (d'où $p = 1/2$) et $p + q = 0$ (d'où $q = -1/2$). L'égalité $p - q = 1$ est ici automatiquement vérifiée et $c = \phi\,(J / \mu)^{1/2}$.

---

41 La force de rappel correspond au poids de l'eau soulevée, lequel dépend de la longueur d'onde λ et du poids volumique $\rho\,g$ de l'eau. L'inertie dépend essentiellement des mêmes facteurs. On recherche donc une expression de la vitesse de propagation sous la forme $c = \phi\,\rho^p\,g^q\,\lambda^r$. En identifiant les dimensions dans cette relation, on trouve les contraintes $p = 0$, $-3\,p + q + r = 1$ et $2\,q = 1$, qui se traduisent par les valeurs $q = 1/2$ et $r = 1/2$.

---

42 La force de rappel dépend ici de l'accroissement de la surface de l'eau et fait intervenir la tension superficielle γ et la longueur d'onde λ. L'inertie de l'eau fait intervenir sa masse volumique ρ. On recherche donc une expression de la vitesse de propagation de l'onde de la forme $c = \phi\,\rho^p\,\gamma^q\,\lambda^r$. En identifiant les exposants des dimensions, on trouve les contraintes $p + q = 0$, $-3\,p + r = 0$ et $2\,q = 1$. Il vient $q = 1/2$, $p = -1/2$ et $r = -1/2$ et donc, $c = \phi\,(\gamma / \rho\,\lambda)^{1/2}$.

---

43 La vitesse de propagation c vaut $[(9{,}8\ \text{m s}^{-2})\ (30\ \text{m}) / (8\,\pi)]^{1/2} = 3{,}42\ \text{m s}^{-1}$.

---

45 Pour une longueur d'onde λ, la vitesse de propagation des ondes à la surface de l'eau vaut $c = A\,(g\,\lambda)^{1/2}$, où A est un coefficient sans dimension égal à $1 / (8\,\pi)^{1/2}$. La distance ℓ est alors parcourue par un front d'onde en un temps $t = \ell / [A\,(g\,\lambda)^{1/2}]$. Une distance de 25 m est parcourue en :

$$t = (25\ \text{m})\ (8\,\pi)^{1/2} / [(9{,}8\ \text{m s}^{-2})\,\lambda]^{1/2}, \text{ soit } (40{,}0\ \text{s m}^{-1})\,\lambda^{-1/2}.$$

Pour une longueur d'onde de 1 m, par exemple, on trouve $t = 40{,}0$ s.

---

47 La distance parcourue par l'impulsion est le double de la longueur de la corde, soit 0,66 m. (a) Le temps nécessaire pour faire un tour complet vaut donc $T = (0{,}66\ \text{m}) / (435\ \text{m s}^{-1}) = 1{,}52 \times 10^{-3}$ s. (b) La fréquence de la vibration fondamentale d'une corde vibrante vaut $f = c / (2\,\ell) = 659\ \text{s}^{-1}$, d'où une période de $1{,}52 \times 10^{-3}$ s : pincer une corde produit donc une fréquence égale à celle de la fondamentale et la seule différence réside dans l'émission d'harmoniques qui modifient le timbre.

---

48 (a) Les fréquences possibles sont 261,6 Hz ± 10 Hz, soit :

$$f_- = 251{,}6\ \text{Hz et } f_+ = 271{,}6\ \text{Hz}.$$

(b) La fréquence fondamentale d'une corde tendue est :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$f = c / (2\,\ell), \text{ ou } (J / \mu)^{1/2} / (2\,\ell).$$

La tension J s'exprime donc en fonction de la fréquence par la relation : $J = \mu (2\,\ell\, f)^2$, ou $J = A\, f^2$. Pour la corde de référence, on trouve :

$$A = J / f^2 = 17 \times 10^{-3}\ \text{N s}^2.$$

Les tensions corrompues sont donc d'une part :

$$J_- = A\, f_-^2 = (17 \times 10^{-3}\ \text{N s}^2)\ (251{,}6\ \text{s}^{-1})^2 = 1076\ \text{N}$$

et d'autre part :

$$J_+ = A\, f_+^2 = 1254\ \text{N}.$$

---

49 L'énergie associée à l'amplitude horizontale est quatre fois supérieure à l'énergie associée à l'amplitude verticale. (a) L'énergie transmise est donc le cinquième, soit 20 % de l'énergie incidente : on obtient donc une réduction de 80 %. (b) Si la personne est couchée sur le côté, les lunettes transmettent la composante horizontale, soit les 4/5 de l'énergie incidente (4/5 = 80 %). La réduction n'est plus ici que de 20 %.

---

51 Dans le sang, la longueur d'onde des ultrasons de 1×10^7 Hz est :

$$\lambda = c / f = (1570\ \text{m s}^{-1}) / (1 \times 10^7\ \text{s}^{-1}) = 1{,}57 \times 10^{-4}\ \text{m},$$

soit $(1{,}57 \times 10^{-4}\ \text{m}) / (5 \times 10^{-6}\ \text{m}) = 31{,}4$ fois la taille d'un globule rouge.

---

52 La source émet une vibration de fréquence $f = 500\ \text{s}^{-1}$ et s'éloigne de l'observateur à la fréquence :

$$f' = f\, c / (c + v_s) = (500\ \text{s}^{-1})\ (344\ \text{m s}^{-1}) / [(344\ \text{m s}^{-1}) + (2\ \text{m s}^{-1})] = 497{,}1\ \text{s}^{-1}.$$

(b) Le mur reçoit une vibration de fréquence :

$$f' = (500\ \text{s}^{-1})\ (344\ \text{m s}^{-1}) / [(344\ \text{m s}^{-1}) + (2\ \text{m s}^{-1})] = 502{,}9\ \text{s}^{-1}$$

et la renvoie vers l'observateur qui la reçoit sans nouvelle modification de fréquence (le mur et l'observateur sont fixes). (c) La fréquence des battements est donc de (502,9 Hz) – (497,1 Hz) = 5,8 Hz.

---

53 (a) Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur de l'expression :

$$f_r = f\ (1 - v_c / c) / (1 + v_c / c)$$

par $(1 - v_c / c)$, on trouve $f_r = f\ (1 - v_c / c)^2 / [1 - (v_c / c)^2]$. Cette expression se réduit à $f_r = f\ (1 - 2\, v_c / c)$ si l'on développe le numérateur et si l'on néglige partout les termes en $(v_c / c)^2$. (b) Pour un objet qui se déplace vers le détecteur, la vitesse v_c de l'objet doit être remplacée par $- v_c$.

---

54 Si la chauve-souris se rapproche de l'obstacle fixe à la vitesse v_s, la fréquence qu'elle perçoit vaut $f' = f\ (c + |v_s|) / (c - |v_s|)$. En résolvant cette équation par rapport à $|v_s|$, on trouve :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$|v_S| = c\,(f' - f) / (f' + f)$$
$$= (344\ \text{m s}^{-1})\,[(51000\ \text{Hz}) - (50000\ \text{Hz})] / [(51000\ \text{Hz}) + (50000\ \text{Hz})]$$
$$= 3{,}4\ \text{m s}^{-1}.$$

---

57 Lorsque l'observateur se rapproche à la vitesse u d'une source de lumière, la fréquence perçue f' est différente de la fréquence f émise par la source :

$$f' = f\,(c + u) / (c^2 - u^2)^{1/2}.$$

En termes de longueur d'onde, on écrit $\lambda' = \lambda\,(c^2 - u^2)^{1/2} / (c + u)$ et on calcule :

$$\lambda' = (6{,}5 \times 10^{-7}\ \text{m})[(3 \times 10^8\ \text{m s}^{-1})^2 - (1 \times 10^8\ \text{m s}^{-1})^2]^{1/2}$$
$$/\,[(3 \times 10^8\ \text{m s}^{-1}) + (1 \times 10^8\ \text{m s}^{-1})]$$
$$= 4{,}60 \times 10^{-7}\ \text{m}.$$

---

59 Le premier diapason vibre à 1000 Hz. Le second vibre à 995 Hz. Le premier doit être mis en mouvement à la vitesse v_S et éloigné de l'observateur pour que sa fréquence soit perçue différemment (plus basse), en fonction de la relation $f' = f\,c / (c + v_S)$. Pour que les battements disparaissent, la fréquence f' doit coïncider avec la fréquence du second diapason, soit $f' = 995$ Hz. La vitesse de déplacement du diapason est alors :

$$v_S = [(1000\ \text{Hz}) / (995\ \text{Hz}) - 1]\,(344\ \text{m s}^{-1}) = 1{,}73\ \text{m s}^{-1}.$$

---

60 Si une voiture se déplace vers un observateur à la vitesse v_S en émettant un son de fréquence f, la fréquence perçue par celui-ci est plus élevée que f et vaut :

$$f' = f\,c / (c - v_S).$$

Pour la première voiture, qui se rapproche de l'observateur à la vitesse de 80 km h^{-1} (c'est-à-dire (80) (1000 m) / (3600 s) = 22,22 m s^{-1}), la fréquence perçue vaut :

$$f' = (1500\ \text{s}^{-1})\,(344\ \text{m s}^{-1}) / [(344\ \text{m s}^{-1}) - (22{,}22\ \text{m s}^{-1})] = 1603{,}6\ \text{s}^{-1}.$$

Pour la seconde, qui se déplace à la vitesse de 70 km h^{-1} (c'est-à-dire (70) (1000 m) / (3600 s) = 19,44 m s^{-1}), la fréquence perçue vaut :

$$f' = (1500\ \text{s}^{-1})\,(344\ \text{m s}^{-1}) / [(344\ \text{m s}^{-1}) - (19{,}44\ \text{m s}^{-1})] = 1589{,}9\ \text{s}^{-1}.$$

La fréquence des battements est obtenue par la différence des deux fréquences : (1603,6 Hz) – (1589,9 Hz) = 13,7 Hz.

---

63 La chauve-souris est en mouvement à la vitesse v_S par rapport à son environnement et l'onde sonore transportée dans la direction du mouvement par l'air au repos vibre avec une fréquence $f' = f\,c / (c - v_S)$. Si la proie se déplace vers la chauve-souris à la vitesse v_O, elle réémettra cette vibration avec une fréquence $f'' = f'\,(c + v_O) / (c - v_O)$. Celle-ci sera perçue par la chauve-souris sous la forme d'une fréquence $f''' = f''\,(c + v_S) / c$. Finalement, la vibration émise à la fréquence

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

f par la chauve-souris sera perçue avec la fréquence :

$$f''' = f\,[(c + v_s)\,(c + v_o)] / [(c - v_s)\,(c - v_o)].$$

Ici,

$$f''' / f = \{[(344\ \text{m s}^{-1}) + (10\ \text{m s}^{-1})]\,[(344\ \text{m s}^{-1}) + (2\ \text{m s}^{-1})]\}$$
$$/\ \{[(344\ \text{m s}^{-1}) - (10\ \text{m s}^{-1})]\,[(344\ \text{m s}^{-1}) - (2\ \text{m s}^{-1})]\}$$
$$= 1{,}0722.$$

Si f''' doit coïncider avec la fréquence de réception de 83 Hz, la fréquence émise doit valoir f = (83 Hz) / (1,0722) = 77,4 Hz.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 22

Les ondes sonores

RAPPELS

Les ondes sonores résultent de la propagation de perturbations mécaniques dans la matière. La vitesse du son c est fonction de la masse volumique ρ et du module de compressibilité adiabatique K du milieu traversé (K est défini comme un coefficient de proportionnalité entre la variation absolue de la pression et la variation relative de la masse volumique : $\Delta p = K\ (\Delta\rho\ /\ \rho)$. La relation est la suivante : $c = (K\ /\ \rho)^{1/2}$.

Les ondes sonores propagées dans l'air à l'intérieur des tubes creux peuvent former des ondes stationnaires. Les fréquences de résonance dépendent de la longueur des tubes et de la géométrie des extrémités. Pour un tube de longueur ℓ, fermé aux deux extrémités, les fréquences de résonance sont données par la relation $f_n = n\ [c\ /\ (2\ \ell)]$, où n est un nombre entier. Si le tube est fermé à une extrémité et ouvert à l'autre, les fréquences de résonance sont données par $f_n = (2\ n - 1)\ [c\ /\ (4\ \ell)]$. Dans les deux cas, la fréquence la plus basse (la "fondamentale") correspond à $n = 1$.

L'intensité I d'une onde sonore est la puissance qui traverse une surface unitaire normale à la direction de propagation. Elle est fonction de l'amplitude des variations de pression Δp associées aux oscillations de matière qui constituent la perturbation propagée. La relation fait intervenir la masse volumique du milieu traversé et la vitesse de propagation dans ce milieu : $I = (\Delta p)^2\ /\ (2\ \rho\ c)$. Pour une source ponctuelle, l'intensité décroît comme l'inverse du carré de la distance. On définit le niveau sonore β correspondant à une intensité I par la relation logarithmique $\beta = 10\ \log\ (I\ /\ I_0)$, où $I_0 = 1 \times 10^{-12}$ W m^{-2}. Ici, le symbole "log" désigne le logarithme en base dix.

Les ultrasons sont des ondes sonores de fréquence supérieure à 20000 Hz. Lorsqu'une impulsion ultrasonore atteint l'interface entre deux milieux caractérisés par une masse volumique et une vitesse de propagation différentes, une partie I_t de l'intensité incidente I_i est transmise et le reste, I_r, est réfléchi, c'est-à-dire renvoyé dans

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

le milieu d'incidence. La conservation de l'énergie impose que $I_t + I_r = I_i$ et la transmission à travers une surface séparant deux milieux est indépendante du sens dans lequel cette surface est traversée. L'intensité à la jonction de deux matériaux est donnée par la relation $I_r / I_i = [(\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2) / (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)]^2$ si le matériau 1 est caractérisé par une masse volumique ρ_1 et une vitesse de propagation c_1 et si le matériau 2 est décrit par une masse volumique ρ_2 et une vitesse de propagation c_2.

SOLUTION DES EXERCICES

22.1 LA NATURE PHYSIQUE ET LA VITESSE DE PROPAGATION DU SON

1 La circonférence du haut-parleur est $\ell = 2\,\pi\,(0{,}3\text{ m}) = 1{,}88\text{ m}$.

---

2 La vitesse du son dans l'air étant de 344 m s^{-1}, la distance parcourue par l'impulsion en 5 s est $\ell = (344\text{ m s}^{-1})\,(5\text{ s}) = 1720\text{ m}$.

---

3 Le temps écoulé depuis le lâcher de la pierre jusqu'au moment où on entend l'impact dans l'eau se compose (1) du temps t que dure la chute et (2) du temps t' mis par le son pour remonter à la surface à la vitesse c. Le temps t est donné en fonction de la profondeur p du puits par la loi du mouvement uniformément accéléré : $p = g\,t^2 / 2$ et le temps de propagation t' est donné par $t' = p / c$. La somme des temps est $t'' = 3$ s. Si l'on pose $q = p^{1/2}$, il faut vérifier :

$$(2 / g)^{1/2}\,q + q^2 / c = t''.$$

q est donc la seule solution positive de l'équation du second degré :

$$q^2 + 2\,[c^2 / (2\,g)]^{1/2}\,q - c\,t'' = 0.$$

La résolution de cette équation fournit ainsi :

$$q = \{[c^2 / (2\,g)] + c\,t''\}^{1/2} - [c^2 / (2\,g)]^{1/2} = 6{,}38\text{ m}^{1/2}.$$

On en déduit la profondeur du puits $p = q^2 = 40{,}7$ m.

---

4 A travers le cuivre, le son parcourt la longueur ℓ du tuyau en un temps $t_1 = \ell / c_{Cu}$. Au travers de la colonne d'air, le temps de propagation est plus long : $t_2 = \ell / c_{air}$. Le délai observé entre l'arrivée des deux impulsions sonores est donc $\Delta t = \ell\,(1 / c_{air} - 1 / c_{Cu})$. Compte tenu des valeurs $c_{air} = 344\text{ m s}^{-1}$ et $c_{Cu} = 3750\text{ m s}^{-1}$, on trouve $\ell = 315$ m.

---

5 L'épaisseur d'eau étant parcourue deux fois, le temps t nécessaire au retour de l'écho est donné par $2\,\ell = c\,t$ et la profondeur est donc :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$\ell = c\,t / 2 = (1498 \text{ m s}^{-1})\,(2 \text{ s}) / 2 = 1498 \text{ m}.$$

6 Le décalage $\Delta t = 0{,}4$ s représente une distance de propagation du son égale à :

$$\ell = c\,\Delta t = (344 \text{ m s}^{-1})\,(0{,}4 \text{ s}) = 137 \text{ m}.$$

7 Le front d'onde correspondant au début du cri revient à la chauve-souris après un laps de temps t calculé à partir de l'expression $2\,\ell = c\,t$, où ℓ est la distance qui sépare l'animal de l'obstacle réfléchissant. Un cri qui dure 3×10^{-4} s reviendra sur la chauve-souris au moment où celle-ci arrête l'émission si l'obstacle se trouve à une distance $\ell = c\,t / 2 = (344 \text{ m s}^{-1})\,(3 \times 10^{-4} \text{ s}) / 2 = 0{,}0516$ m.

8 A 50 Hz, la longueur d'onde du son vaut :

$$\lambda = c / f = (344 \text{ m s}^{-1}) / (50 \text{ s}^{-1}) = 6{,}88 \text{ m}.$$

A 3000 Hz, on trouve 0,114 m.

22.2 ONDES SONORES STATIONNAIRES

10 Pour un tuyau ouvert à ses deux extrémités, les fréquences des ondes stationnaires sont $f_n = n\,c / (2\,\ell)$. La fréquence fondamentale est $f_1 = c / (2\,\ell) = 16{,}35$ Hz : elle correspond à une longueur :

$$\ell = c / (2 f_1) = (344 \text{ m s}^{-1}) / [2\,(16{,}35 \text{ s}^{-1})] = 10{,}52 \text{ m}.$$

11 Les fréquences des ondes stationnaires, lorsque les deux extrémités sont ouvertes, sont $f_n = n\,c / (2\,\ell)$. La fondamentale ($n = 1$) est :

$$f_1 = (344 \text{ m s}^{-1}) / [2\,(1{,}3 \text{ m})] = 132{,}3 \text{ Hz}$$

et les harmoniques suivantes sont :

$$f_2 = 2 f_1 = 265 \text{ Hz}, f_3 = 3 f_1 = 397 \text{ Hz et } f_4 = 4 f_1 = 529 \text{ Hz}.$$

12 Pour un tube fermé à une extrémité et ouvert à l'autre, les fréquences des ondes sonores stationnaires sont $f_n = (2\,n - 1)\,[c / (4\,\ell)]$. En particulier, la fréquence fondamentale vaut $f_1 = c / (4\,\ell) = 147 \text{ s}^{-1}$. Les fréquences des harmoniques suivantes sont $f_n = (2\,n - 1)\,(147 \text{ s}^{-1})$. (a) La condition $f_n < 1350 \text{ s}^{-1}$ implique que $(2\,n - 1) < (1350 \text{ s}^{-1}) / (147 \text{ s}^{-1}) = 9{,}18$, ou $n < 5{,}09$: 5 fréquences apparaissent donc en-dessous de 1350 Hz. (b) Si le tube est ouvert aux deux extrémités, les fréquences sont $f_n = n\,(c / 2\,\ell) = 2\,n\,[c / (4\,\ell)] = 2\,n\,(147 \text{ s}^{-1})$. La condition $f_n < 1350$ Hz devient $2\,n < 9{,}18$ ou $n < 4{,}59$. On ne trouve plus que 4 harmoniques en-dessous de 1350 Hz.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

13 Le tuyau le plus long donne la fréquence la plus basse, soit $f_1 = c / (2\,\ell) = 65$ Hz. Sa longueur est donc $\ell = (344\ \text{m s}^{-1}) / [2\ (65\ \text{s}^{-1})] = 2{,}65$ m. Le tuyau le plus court donne la fréquence la plus élevée, soit $f_1 = c / (2\,\ell) = 2090$ Hz. La longueur de ce tuyau est donc $\ell = (344\ \text{m s}^{-1}) / [2\ (2090\ \text{s}^{-1})] = 0{,}0823$ m.

22.3 L'INTENSITÉ DES ONDES SONORES

15 L'amplitude de pression Δp d'une onde sonore est liée à son intensité par la relation $I = (\Delta p)^2 / (2\,\rho\,c)$, où ρ est la masse volumique de l'air et c est la vitesse de propagation du son dans l'air. Pour atteindre une intensité $I = 0{,}1\ \text{W m}^{-2}$, il faut une amplitude $\Delta p = (2\,\rho\,c\,I)^{1/2} = 9{,}09$ Pa.

---

16 L'intensité sonore est définie comme la puissance traversant une surface normale à la direction de propagation, rapportée à l'unité de surface. Sur un hémisphère de rayon R, la puissance transmise vaut :

$$P = I\ (2\,\pi\,R^2) = (1 \times 10^{-4}\ \text{W m}^{-2})\ (2\,\pi)\ (10\ \text{m})^2 = 0{,}0628\ \text{W}.$$

---

17 Compte tenu de l'expression de l'intensité des ondes sonores, $I = (\Delta p)^2 / (2\,\rho\,c)$, le rapport, à intensités égales, des amplitudes de pression est :

$$\Delta p_{air} / \Delta p_{eau} = [(\rho_{air}\ c_{air}) / (\rho_{eau}\ c_{eau})]^{1/2}.$$

La masse volumique de l'air étant très inférieure à la masse volumique de l'eau et la propagation dans l'air étant moins rapide que dans l'eau, le rapport est trouvé nettement inférieur à 1 :

$$\{(1{,}2\ \text{kg m}^{-3})\ (344\ \text{m s}^{-1}) / [(998\ \text{kg m}^{-3})\ (1498\ \text{m s}^{-1})]\}^{1/2} = 0{,}0166.$$

---

18 $I_{air} / I_{eau} = (\rho_{eau}\ c_{eau}) / (\rho_{air}\ c_{air}) = 3{,}62 \times 10^3$.

---

19 Si l'amplitude des changements de pression est multipliée par 2, l'intensité, dans le même milieu de propagation, est multipliée par $(2)^2 = 4$.

---

20 La masse volumique et la vitesse de propagation sont identiques dans les deux cas et le rapport des intensités vaut $I_{piano} / I_{flûte} = (\Delta p_{piano} / \Delta p_{flûte})^2 = 8$. On en tire le rapport $\Delta p_{piano} / \Delta p_{flûte} = \sqrt{8} = 2{,}83$.

---

21 Si la masse volumique et la vitesse de propagation se conservent, le rapport des amplitudes est égal à la racine carrée du rapport des intensités. Ici, le rapport vaut $(216)^{1/2} = 14{,}7$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

24 Pour une intensité $I = (\Delta p)^2 / (2\ \rho\ c) = 1\ \text{W m}^{-2}$, l'amplitude des fluctuations de pression vaut $\Delta p = [2\ \rho\ c\ (1\ \text{W m}^{-2})]^{1/2}$. Dans l'air, on trouve :

$$\Delta p = [2\ (1{,}2\ \text{kg m}^{-3})\ (344\ \text{m s}^{-1})\ (1\ \text{W m}^{-2})]^{1/2} = 28{,}7\ \text{Pa}.$$

22.4 LES SOURCES SONORES. LES DÉTECTEURS SONORES

25 Si une demi-longueur d'onde correspond à la distance $\ell = 0{,}01$ m qui sépare les deux oreilles de l'animal, l'onde a une fréquence :

$$f = c / \lambda = c / (2\ \ell) = (344\ \text{m s}^{-1}) / [2\ (0{,}01\ \text{m})] = 17{,}2 \times 10^3\ \text{Hz}.$$

26 La sensibilité de l'oreille est différente pour les différentes fréquences audibles et le seuil d'audibilité varie fortement en fonction de la hauteur du son capté.

22.5 LA RÉPONSE AUDITIVE

30 La différence $\beta_2 - \beta_1$ entre deux niveaux sonores est liée au rapport des intensités de la façon suivante : suivant la définition du niveau sonore en décibels, on écrit $\beta_2 - \beta_1 = 10 \log (I_2 / I_0) - 10 \log (I_1 / I_0) = 10 \log (I_2 / I_1)$. Ici, cette différence de niveaux sonores est égale à :

$$10 \log [(1 \times 10^{-9}\ \text{W m}^{-2}) / (5 \times 10^{-8}\ \text{W m}^{-2})] = 10 \log 0{,}02 = -17\ \text{dB}.$$

31 La différence de niveau sonore (en dB) est liée au rapport des intensités par la relation $\beta_2 - \beta_1 = 10 \log (I_2 / I_1)$. Inversement, $I_2 / I_1 = 10^{(\beta_2 - \beta_1) / 10}$ et ici, $I_2 / I_1 = 10$.

32 $\beta = 10 \log [(25 \times 10^4\ \text{W m}^{-2}) / (1 \times 10^{-12}\ \text{W m}^{-2})] = 174\ \text{dB}.$

33 L'intensité I_{10} produite par dix personnes est dix fois supérieure à l'intensité I_1 produite par une seule personne. La différence entre les niveaux d'intensité est alors $\beta_{10} - \beta_1 = 10 \log (I_{10} / I_1) = 10 \log 10 = 10\ \text{dB}$. On obtient ainsi :

$$\beta_{10} = 50\ \text{dB} + 10\ \text{dB} = 60\ \text{dB}.$$

34 Une différence $\beta_2 - \beta_1$ de 5 dB représente un rapport d'intensités :

$$I_2 / I_1 = 10^{(\beta_2 - \beta_1) / 10} = 10^{1/2} = 3{,}16.$$

L'intensité d'un son de 5 dB plus élevé que I_1 est donc :

$$I_2 = (3{,}16)\ (1 \times 10^{-9}\ \text{W m}^{-2}) = 3{,}16 \times 10^{-9}\ \text{W m}^{-2}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

22.6 LES ULTRASONS

36 (a) Pour une onde qui se propage de l'air vers l'eau, le rapport entre l'intensité réfléchie et l'intensité incidente vaut :

$$I_r / I_i = \{[(1{,}2 \text{ kg m}^{-3})\,(344 \text{ m s}^{-1}) - (998 \text{ kg m}^{-3})\,(1498 \text{ m s}^{-1})] / [(1{,}2 \text{ kg m}^{-3})\,(344 \text{ m s}^{-1}) + (998 \text{ kg m}^{-3})\,(1498 \text{ m s}^{-1})]\}^2 = 99{,}89\ \%.$$

(b) Pour une onde qui se propage en sens inverse, on trouve une intensité relative transmise $I_t / I_i = 1 - I_r / I_i = 0{,}11\ \%$.

---

37 La longueur d'onde est liée à la fréquence de l'onde par la relation :

$$\lambda = c / f = (1498 \text{ m s}^{-1}) / (3 \times 10^9 \text{ s}^{-1}) = 0{,}499 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

---

38 Le rapport des énergies dissipées est égal au carré du rapport des fréquences. Ici, $W_{3000} / W_1 = [(3000 \text{ MHz}) / (1 \text{ MHz})]^2 = 9 \times 10^6$.

SOLUTION DES PROBLÈMES

42 (a) Si l'on divise les deux membres de l'équation d'état des gaz parfaits, $p\ V = n\ R\ T$ par la masse m des n moles de gaz, on trouve la relation $p / \rho = (n / m)\ R\ T$. $M = m / n$ représente la masse d'une mole de gaz. (b) Dans un milieu de masse volumique ρ et de compressibilité K, la vitesse de propagation du son vaut $c = (K / \rho)^{1/2}$. Pour un gaz parfait,

$$c = (\gamma\ p / \rho)^{1/2} = (\gamma\ R\ T / M)^{1/2}.$$

---

43 Si l'on accepte d'identifier l'air et l'hydrogène à des gaz parfaits, on trouve que le rapport des vitesses de propagation est lié au rapport des masses molaires par l'expression $c_H / c_{air} = (M_{air} / M_H)^{1/2} \approx 3$. Expérimentalement, on trouve effectivement que le rapport prend une valeur proche de ce résultat.

---

46 (a) Si le tube est rempli d'eau jusqu'à la hauteur de 1 m, il peut être assimilé à un tuyau de 1 m de long, fermé à une extrémité et ouvert à l'autre. Les fréquences de résonance sont alors données par $f_n = (2\ n - 1)\ [c / (4\ \ell)]$ et la fréquence la plus basse vaut $f_1 = c / (4\ \ell) = (344 \text{ m s}^{-1}) / [4\ (1 \text{ m})] = 8{,}60 \text{ s}^{-1}$. (b) Si la fréquence fondamentale est $f_1 = 500 \text{ s}^{-1}$, la hauteur de la colonne d'air vaut $\ell = c / (4\ f_1) = (344 \text{ m s}^{-1}) / [4\ (500 \text{ s}^{-1})] = 0{,}172$ m et l'épaisseur d'eau vaut $(2 \text{ m}) - (0{,}172 \text{ m}) = 1{,}828$ m.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

47 La variation relative de masse volumique est liée à l'amplitude de pression par la relation $\Delta\rho / \rho = \Delta p / K$, où K est la compressibilité du matériau traversé. Celle-ci peut être évaluée à partir de la vitesse de propagation c et de la masse volumique moyenne ρ au moyen de l'expression $K = \rho c^2$. (a) Pour l'eau,

$$K_{eau} = 2{,}24 \times 10^9 \text{ Pa et } \Delta\rho / \rho = 12{,}5 \times 10^{-9}.$$

Pour l'air, $K_{air} = 412$ Pa et $\Delta\rho / \rho = 67{,}8 \times 10^{-3}$.

---

48 (a) La puissance totale est l'intensité mesurée à 1000 m de l'explosion multipliée par l'aire de la surface sphérique de 1000 m de rayon :

$$P = (1 \times 10^{-3} \text{ W m}^{-2})\ (4\pi)\ (1000 \text{ m})^2 = 1{,}26 \times 10^4 \text{ W}.$$

(b) L'énergie libérée en 0,1 s est alors $W = (12{,}6 \times 10^3 \text{ W})\ (0{,}1 \text{ s}) = 1{,}26 \times 10^3$ J.

---

50 L'intensité à 1000 m de l'avion est $3^2 = 9$ fois plus élevée qu'à une distance de 3000 m. L'accroissement de niveau sonore en décibels est lié à ce rapport par la relation $\beta_2 - \beta_1 = 10 \log (I_2 / I_1) = 10 \log 9 = 9{,}54$ dB. Le niveau sonore produit au sol par l'avion volant à 1000 m d'altitude est donc 49,5 dB.

---

51 L'intensité d'un son émis par une source ponctuelle décroît avec la distance r suivant la loi $I(r) = I_0 / r^2$, où I_0 est l'intensité à une distance de 1 m. Le rapport des intensités à deux distances distinctes r_1 et r_2 est donc $I(r_2) / I(r_1) = (r_1 / r_2)^2$. La différence entre les niveaux sonores correspondant est donc :

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log [I(r_2) / I(r_1)] \text{ ou } \beta_2 - \beta_1 = 20 \log (r_1 / r_2).$$

Ici, $\beta_{50\text{m}} = \beta_{10\text{m}} + 20 \log [(10 \text{ m})/(50 \text{ m})] = (70 \text{ dB}) - (14{,}0 \text{ dB}) = 56$ dB.

---

52 (a) L'intensité correspondant à un niveau sonore de 40 dB dans l'air est :

$$I_{10\text{m}} = I_0\ 10^{\beta/10} \text{ où } I_0 = 1 \times 10^{-12} \text{ W m}^{-2}.$$

On trouve donc $I_{10\text{m}} = (1 \times 10^{-12} \text{ W m}^{-2})\ (1 \times 10^4) = 1 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}$. (b) A 3 m, le niveau sonore diffère de :

$$\beta_{3\text{m}} - \beta_{10\text{m}} = 10 \log [I_{3\text{m}} / I_{10\text{m}}] = 20 \log [(10 \text{ m})/(3 \text{ m})] = 10{,}5 \text{ dB}.$$

De ce fait, $\beta_{3\text{m}} = (40 \text{ dB}) + (10{,}5 \text{ dB}) = 50{,}5$ dB. (c) On trouve l'énergie traversant un hémisphère de 10 m de rayon en multipliant l'intensité à cette distance par l'aire de cet hémisphère : $W = I_{10\text{m}}\ (2\pi)\ (10 \text{ m})^2 = 6{,}28 \times 10^{-6}$ W.

---

53 Une différence $\beta_2 - \beta_1$ de niveau sonore correspond à un rapport d'intensités I_2 / I_1 donné par $\beta_2 - \beta_1 = 10 \log (I_2 / I_1)$. Si la différence est de 0,6 dB, la valeur du rapport des intensités est $I_2 / I_1 = 10^{0{,}6/10} = 1{,}148$. Ceci représente un accroissement relatif de l'intensité égal à $\Delta I_1 / I_1 = 14{,}8$ %.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

56 La distance sur laquelle l'impulsion se propage est donnée par :

$$\ell = c\,t = (1540 \text{ m s}^{-1})\,(1 \times 10^{-4} \text{ s}) = 0{,}154 \text{ m}$$

et la distance entre l'émetteur et le plan de séparation des hémisphères cérébraux est la moitié de celle-ci, soit 0,077 m.

---

57 Cette incertitude est de l'ordre de la longueur d'onde des ultrasons utilisés, soit $\lambda = c / f = (1570 \text{ m s}^{-1}) / (1 \times 10^{6} \text{ s}^{-1})$, c'est-à-dire environ 2 mm.

---

58 (a) Les impulsions ultrasonores reçues respectivement après les temps de propagation suivants, $t_1 = 0{,}10 \times 10^{-4}$ s, $t_2 = 1{,}26 \times 10^{-4}$ s et $t_3 = 2{,}40 \times 10^{-4}$ s, correspondent à des réflexions sur des interfaces éloignées de l'émetteur d'une distance $\ell = c\,t / 2$, soit :

$$\ell_1 = 7{,}70 \times 10^{-3} \text{ m}, \ell_2 = 9{,}70 \times 10^{-2} \text{ m et } \ell_3 = 18{,}48 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

La largeur de l'hémisphère gauche est :

$$(18{,}48 \times 10^{-2} \text{ m}) - (9{,}70 \times 10^{-2} \text{ m}) = 8{,}78 \times 10^{-2} \text{ m},$$

alors que la largeur obtenue pour l'hémisphère droit est :

$$(9{,}70 \times 10^{-2} \text{ m}) - (7{,}70 \times 10^{-3} \text{ m}) = 8{,}93 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

L'hémisphère droit est donc ici légèrement plus développé que l'hémisphère gauche.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 23

Propriétés ondulatoires de la lumière

RAPPELS

La lumière est une onde électromagnétique. Dans le vide, elle se propage à la vitesse $c = 3{,}00 \times 10^8$ m s^{-1}. Dans un milieu matériel, sa vitesse v est réduite et caractérisée par l'indice de réfraction n, défini par $v = c / n$. Lorsqu'un faisceau de lumière franchit la jonction entre deux matériaux d'indices de réfraction différents, la direction de propagation est modifiée. Dans ce cas, les angles d'incidence ϕ_1 et de réfraction ϕ_2 (mesurés à partir de la normale à la surface de séparation) sont liés par la loi de Snell, $n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2$. Dans cette relation, n_1 est l'indice de réfraction du milieu d'incidence et n_2 est l'indice de réfraction du milieu d'émergence. Un rayon se rapproche de la normale lorsqu'il passe dans un milieu plus réfringent et s'en écarte lorsqu'il traverse un milieu moins réfringent. Une réflexion totale se produit si la loi de Snell prédit pour le sinus de l'angle de réfraction une valeur supérieure à 1.

Si un écran percé de deux fentes minces est éclairé par un faisceau monochromatique, une figure constituée de franges alternativement sombres et claires apparaît derrière celui-ci. Le centre des franges claires apparaît pour des angles θ donnés par $d \sin \theta = m \lambda$, où d est la distance entre les deux fentes parallèles, λ est la longueur d'onde de la lumière utilisée, et m est un nombre entier : $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Dans le cas d'un réseau constitué d'un grand nombre de fentes minces rapprochées, une interférence destructive se produit pour toutes les directions, excepté pour des régions angulaires très étroites. Les maxima apparaissent aux mêmes angles que pour deux fentes, mais ils sont plus étroits et séparés par une large zone sombre.

L'interférence des ondes issues d'une source étendue provoque la diffraction. Si la lumière passe par une fente de largeur a, on observe des minima de diffraction sous des angles θ (mesurés à partir de la direction d'incidence) tels que $a \sin \theta = m \lambda$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Les maxima apparaissent approximativement à mi-chemin entre les minima.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

La lumière étant une onde transversale, elle subit des effets de polarisation : la direction de polarisation est la direction de la composante électrique de l'onde. Un polariseur réduit de moitié l'intensité d'un faisceau non polarisé et s'il est suivi d'un analyseur dont l'axe est incliné d'un angle θ par rapport à celui du polariseur, l'intensité est encore multipliée par un facteur $\cos^2 \theta$.

Du fait de sa structure périodique tridimensionnelle, un cristal se comporte, pour les rayons X, comme un réseau de diffraction. Si α est l'angle entre le faisceau incident et un plan d'atomes du cristal, on observe une interférence constructive lorsque la condition de Bragg est satisfaite, $2\,d \sin \alpha = m\,\lambda$, pour les valeurs $m = 1, 2, 3, \ldots$ compatibles avec le fait que le sinus est inférieur à l'unité.

La réflexion cohérente sur un film mince est à l'origine de nombreux phénomènes de coloration. Sur un film d'indice n suspendu dans l'air (et pour une incidence normale), l'intensité réfléchie est minimale lorsque la condition $2\,n\,d = m\,\lambda$ est réalisée ($m = 0, 1, 2, \ldots$). L'intensité est maximale lorsque $2\,n\,d = (m + 1/2)\,\lambda$, (pour $m = 0, 1, 2, \ldots$). Ces conditions tiennent compte de l'inversion qui se manifeste lorsqu'une réflexion se produit sur la surface d'un milieu plus réfringent que le milieu d'incidence. Lorsque le film présente un indice de réfraction intermédiaire entre ceux des milieux environnants, les conditions d'obtention d'un maximum et d'un minimum sont inversées.

SOLUTION DES EXERCICES

23.1 L'INDICE DE RÉFRACTION

1 L'indice de réfraction de l'eau est égal au rapport des vitesses de propagation de la lumière dans le vide (c) et dans l'eau (v) : $n = c / v$. La vitesse de propagation de la lumière dans l'eau vaut :

$$v = c / n = (3{,}00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}) / (1{,}333) = 2{,}25 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

---

2 La vitesse de la lumière dans le diamant est obtenue en divisant sa vitesse dans le vide par l'indice de réfraction :

$$v = c / n = (3{,}00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}) / (2{,}417) = 1{,}24 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

---

3 (a) La longueur d'onde λ' d'une onde lumineuse est liée à sa fréquence f par la relation $\lambda' = v / f = c / (n f)$, où n est l'indice de réfraction du milieu traversé. En fonction de la longueur d'onde dans le vide λ, on a donc :

$\lambda' = \lambda / n$. Ici, $\lambda' = (600 \times 10^{-9} \text{ m}) / (1{,}333) = 450 \times 10^{-9} \text{ m}$.

(b) La couleur dépendant essentiellement de la fréquence de l'onde et non de sa longueur d'onde, la lumière restera jaune.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

4 La fréquence vaut $f = v / \lambda$, si v est la vitesse de propagation dans le verre. Compte tenu de la valeur de l'indice de réfraction, on trouve :

$$f = c / (n\,\lambda) = (3{,}00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}) / [(1{,}5)\,(640 \times 10^{-9} \text{ m})] = 3{,}12 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

5 On obtient la longueur d'onde dans l'eau en divisant la valeur dans le vide par l'indice de réfraction de l'eau :

$$\lambda' = \lambda / n = (500 \times 10^{-9} \text{ m}) / (1{,}333) = 375 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

6 (a) La longueur d'onde est liée à la fréquence de l'onde lumineuse par la relation $\lambda = c / f = (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}) / (5 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}) = 600 \times 10^{-9}$ m. (b) La fréquence reste inchangée et la longueur d'onde est divisée par l'indice de réfraction :

$$\lambda' = \lambda / n = (600 \times 10^{-9} \text{ m}) / (1{,}5) = 400 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

23.2 LA RÉFLEXION

7 L'intensité réfléchie est fonction des indices de réfraction des milieux en contact. Le rapport entre les intensités réfléchie et incidente est donné par :

$$I_r / I_i = [(n_2 - n_1) / (n_2 + n_1)]^2 = [(1{,}333 - 1) / (1{,}333 + 1)]^2 = 0{,}0204.$$

8 Pour subir une inversion, la lumière doit être réfléchie sur un milieu d'indice de réfraction plus élevé que celui du milieu d'incidence. L'inversion se produira donc (a) si l'onde se propage dans l'air ($n = 1$) et rencontre le verre ($n = 1{,}5$) ; (b) si l'onde se propage dans l'eau ($n = 1{,}333$) et rencontre le verre ($n = 1{,}5$).

9 La fraction de l'intensité incidente transmise d'un milieu d'indice n_1 dans un milieu d'indice n_2 est donnée par $I_t / I_i = 1 - I_r / I_i = 1 - [(n_1 - n_2) / (n_1 + n_2)]^2$. Ici, $n_1 = 1{,}333$ et $n_2 = 1{,}5$: on trouve $I_t / I_i = 0{,}997$.

23.3 LA RÉFRACTION

12 La relation donnant l'angle de réfraction ϕ_2 (dans le milieu d'indice n_2) en fonction de l'angle d'incidence ϕ_1 (dans le milieu d'indice n_1) est :

$$n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2.$$

Ici, on obtient $(1{,}5) \sin 45\,° = (1{,}333) \sin \phi_2$ et on trouve $\phi_2 = 52{,}7\,°$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

13 (a) Un rayon réfléchi fait avec la normale un angle égal à l'angle d'incidence, c'est-à-dire ici 15 °. (b) Pour le passage du milieu 1 au milieu 2, la loi de Snell $n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2$, et (1) $\sin 15° = (1{,}333) \sin \phi_2$ donnent $\phi_2 = 11{,}2°$.

---

16 En pénétrant dans un milieu d'indice de réfraction plus élevé que celui du milieu d'incidence, le rayon se rapproche de la normale et l'angle de réfraction doit être inférieur à l'angle d'incidence : un angle de 50 ° dans la lame plastique ne peut donc être obtenu sous une incidence de 40 ° dans l'air.

---

17 Une réflexion se produit, sous une incidence rasante, sur la couche moins dense et moins réfringente formée par l'air réchauffé au contact de la route.

23.4 LA RÉFLEXION TOTALE

18 L'angle d'incidence critique ϕ_c pour une réflexion totale sur la surface de séparation entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 est donné par $\sin \phi_c = n_2 / n_1$. Ici, $\sin \phi_c = (1{,}000) / (2{,}417)$ et $\phi_c = 24{,}4°$.

---

19 La donnée d'un angle critique $\phi_c = 39°$ permet de déterminer le rapport des indices de réfraction $n_2 / n_1 = \sin 39° = 0{,}629$ et donc l'indice de réfraction du verre doit être $n_1 = n_2 / 0{,}629 = 1{,}589$. L'angle critique pour la fibre utilisée dans l'eau est donc donné par $\sin \phi_c = (1{,}333) / (1{,}589)$ et $\phi_c = 57°$.

---

20 Si l'angle critique est égal à 36 °, le rapport des indices de réfraction est :

$$n_2 / n_1 = 0{,}588.$$

L'indice de réfraction de l'air étant $n_2 = 1{,}000$, on trouve l'indice de réfraction du milieu d'incidence égal à $n_1 = n_2 / (0{,}588) = 1{,}70$.

23.5 EXPÉRIENCE DES FENTES DE YOUNG

21 La distance angulaire θ entre deux franges claires dans l'expérience d'interférence de Young est liée à la distance d entre ces fentes par la relation $d \sin \theta = \lambda$, où λ est la longueur d'onde de la radiation cohérente utilisée. Pour un angle $\theta = 1{,}5°$, on trouve :

$$d = (500 \times 10^{-9} \text{ m}) / \sin 1{,}5° = 1{,}91 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

22 Les maxima d'intensité sont observés sous des angles θ_m donnés par :

$$d \sin \theta_m = m \lambda,$$

pour $m = 1, 2, \ldots 5$ ($m = 0$ est le maximum central, correspondant à $\theta = 0$). On trouve $\sin \theta_m = m (\lambda / d) = m (700 \times 10^{-9} \text{ m}) / (2 \times 10^{-4} \text{ m}) = m (3{,}5 \times 10^{-3})$. Les angles cherchés sont donc $\theta_1 = 0{,}20\,°$, $\theta_2 = 0{,}40\,°$, $\theta_3 = 0{,}60\,°$, $\theta_4 = 0{,}80\,°$, $\theta_5 = 1{,}00\,°$.

---

23 Si, à une distance de 1 m, les maxima sont séparés de 1×10^{-2} m, l'angle θ entre ces maxima est donné par :

$$\text{tg } \theta = (1 \times 10^{-2} \text{ m}) / (1 \text{ m}) = 1 \times 10^{-2} \text{ et } \theta = 0{,}573\,°.$$

La distance d entre les fentes est alors donnée par la relation $d \sin \theta = \lambda$, c'est-à-dire $d = \lambda / \sin \theta = (589 \times 10^{-9} \text{ m}) / \sin 0{,}573\,° = 5{,}89 \times 10^{-5}$ m.

---

24 L'angle sous lequel on voit la distance de 6 cm séparant le cinquième maximum du centre de la figure d'interférence est donné par $\text{tg } \theta = (6 \times 10^{-2} \text{ m}) / (2 \text{ m})$ et $\theta = 1{,}718\,°$. Cet angle est lié à la longueur d'onde λ de la lumière par la relation $d \sin \theta = m \lambda$ où d est la distance entre les deux fentes et $m = 5$ pour le cinquième maximum. On trouve $\lambda = [(1 \times 10^{-4} \text{ m}) \sin 1{,}718\,°] / 5 = 600 \times 10^{-9}$ m.

23.6 LA COHÉRENCE

25 Non, parce que les deux faisceaux ne sont pas cohérents.

23.7 LE RÉSEAU DE DIFFRACTION

26 Lorsqu'une radiation lumineuse est diffractée par un réseau dont la distance entre les traits vaut d, des maxima d'intensité sont observés sous des angles θ tels que $d \sin \theta = m \lambda$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). (a) La raie d'ordre $m = 1$ est observée sous un angle θ donné par :

$\sin \theta = \lambda / d = (589 \times 10^{-9} \text{ m}) / [(1 \times 10^{-2} \text{ m}) / (5000)] = 0{,}2945$ et $\theta = 17{,}1\,°$.

(b) L'ordre le plus élevé est tel que $m \lambda / d < 1$ et donc m est la partie entière de $d / \lambda = 3{,}39$, soit $m = 3$.

---

27 Dans ce réseau, la distance entre deux traits est :

$$d = (1 \times 10^{-2} \text{ m}) / (4000) = 2{,}5 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

La raie du quatrième ordre est émise sous un angle θ tel que $d \sin \theta = 4 \lambda$. Pour que cette raie existe, il faut que $4 (\lambda / d) < 1$ et donc que :

$$\lambda < d / 4 = 625 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

28 (a) A 656 nm, les angles d'émission des raies sont donnés par la relation :

$$d \sin \theta = m \lambda \ (m = 0, \pm 1, \pm 2,...),$$

avec $d = (1 \times 10^{-2} \text{ m}) / (8000) = 1{,}25 \times 10^{-6}$ m. On trouve ainsi :

$$\theta = 0 \text{ et } \theta = 31{,}6\,°.$$

(b) Le doublet commence à se résoudre lorsque le nombre de raies utilisées est supérieur à $N = [\lambda / \Delta\lambda] / m$. Pour le premier ordre ($m = 1$), on trouve :

$$N = [(656 \times 10^{-9} \text{ m}) / (0{,}2 \times 10^{-9} \text{ m})] = 3280 \text{ fentes.}$$

---

29 La variation relative de longueur d'onde est :

$$\Delta\lambda / \lambda = (0{,}59 \times 10^{-9} \text{ m}) / (589 \times 10^{-9} \text{ m}) = 1{,}00 \times 10^{-3}.$$

Pour résoudre ce doublet, il faut compter un nombre de traits égal à :

$$N = 1 / [m \, \Delta\lambda / \lambda] = 1 / [(2)\,(1{,}00 \times 10^{-3})] = 499.$$

---

30 Dans le spectre de premier ordre, l'angle d'émission θ varie avec la longueur d'onde λ suivant la relation $d \sin \theta = \lambda$, où d est la distance entre deux traits. Ici, $d = (1 \times 10^{-2} \text{ m}) / (8000) = 1{,}25 \times 10^{-6}$ m. Pour la première raie,

$$\lambda / d = (656 \times 10^{-9} \text{ m}) / (1{,}25 \times 10^{-6} \text{ m}) = 0{,}525 \text{ et } \theta_1 = 31{,}6\,°.$$

Pour la deuxième,

$$\lambda / d = (410 \times 10^{-9} \text{ m}) / (1{,}25 \times 10^{-6} \text{ m}) = 0{,}328 \text{ et } \theta_2 = 19{,}1\,°.$$

La séparation angulaire est donc $\theta_1 - \theta_2 = 12{,}5\,°$.

---

33 L'angle θ sous lequel on voit le segment de 0,32 m entre la première raie et le centre de l'écran est donné par $\text{tg } \theta = (0{,}32 \text{ m}) / (0{,}7 \text{ m}) = 0{,}457$, ce qui représente un angle $\theta = 24{,}57\,°$. Pour les raies du premier ordre, la longueur d'onde est fonction de θ suivant la loi $\lambda = d \sin \theta$. Ici,

$$d = (1 \times 10^{-2} \text{ m}) / (6000) = 1{,}67 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\text{et} \quad \lambda = (1{,}67 \times 10^{-6} \text{ m}) \sin 24{,}57\,° = 693 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

23.8 LE PHÉNOMÈNE DE DIFFRACTION

35 Dans la figure de diffraction par une fente de largeur a, la première extinction se produit sous un angle θ tel que $a \sin \theta = \lambda$. Si $\theta = 40\,°$ et $\lambda = 589 \times 10^{-9}$ m,

$$a = (589 \times 10^{-9} \text{ m}) / \sin 40\,° = 916 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

---

36 Le premier minimum se présente sous un angle θ tel que :

$$\sin \theta = \lambda / a = (600 \times 10^{-9} \text{ m}) / (1000 \times 10^{-9} \text{ m}) = 0{,}6$$

et donc $\theta = 36{,}9\,°$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

37 Le premier minimum se présente sous un angle θ tel que $\sin\theta = \lambda / a$. Ici,

$$\sin\theta = (400 \times 10^{-9}\ \text{m}) / (1600 \times 10^{-9}\ \text{m}) = 0{,}25 \text{ et } \theta = 14{,}5\,°.$$

A une distance $d = 0{,}5$ m, ceci représente une longueur :

$$x = d\ \text{tg}\ \theta = (0{,}5\ \text{m})\ \text{tg}\ 14{,}5\,° = 0{,}129\ \text{m}$$

entre le premier minimum et le centre de la figure. La distance entre les deux minima de part et d'autre de la tache centrale vaut $2x = 0{,}258$ m.

---

38 Dans le cas d'une ouverture circulaire de diamètre d, le premier minimum est observé sous un angle θ tel que $\sin\theta = 1{,}22\,\lambda / d$. Ici,

$$\sin\theta = (1{,}22)\ (500 \times 10^{-9}\ \text{m}) / (1 \times 10^{-5}\ \text{m}) = 0{,}061,$$

ce qui donne $\theta = 3{,}5\,°$.

---

39 Pour une ouverture circulaire de diamètre d, la première extinction est observée sous un angle θ donné par $\sin\theta = 1{,}22\,\lambda / d$. Le rayon de l'ouverture étant de 800 nm, $\sin\theta = (1{,}22)\ (600 \times 10^{-9}\ \text{m}) / [(2)\ (800 \times 10^{-9}\ \text{m})]$ et $\theta = 27{,}2\,°$. Sur un écran situé à 0,3 m de l'ouverture, ceci représente un rayon :

$$r = (0{,}3\ \text{m})\ \text{tg}\ \theta = (0{,}3\ \text{m})\ \text{tg}\ 27{,}2\,° = 0{,}154\ \text{m}.$$

23.9 LA POLARISATION DE LA LUMIÈRE

40 La polarisation complète est obtenue à l'incidence de Brewster, donnée par la relation $\text{tg}\ \phi_p = n_2 / n_1$ (n_2 : indice du milieu d'émergence; n_1 : indice du milieu d'incidence). Ici, $\text{tg}\ \phi_p = (1{,}5) / (1{,}0) = 1{,}5$ et $\phi_p = 56{,}3\,°$.

---

41 La réflexion sur la lame de plastique d'indice n_2 nous indique une incidence de Brewster égale à $\phi_p = 60\,°$. Les données du problème nous permettent de déterminer l'indice n_2, car $n_2 / n_1 = \text{tg}\ \phi_p = \text{tg}\ 60\,° = \sqrt{3} = 1{,}73$ et $n_1 = 1$ pour l'air. Si la lumière se propage dans la matière plastique et subit une réflexion sur l'air, elle sera entièrement polarisée si l'angle d'incidence θ vérifie :

$$\text{tg}\ \theta = n_1 / n_2 = 1 / (1{,}73).$$

Ceci fournit la valeur $\theta = 30\,°$.

---

45 Le passage à travers le premier filtre multiplie l'intensité par un facteur 0,5 (passage de l'état non polarisé à l'état polarisé) et l'intensité obtenue est encore réduite d'un facteur $\cos^2\theta$ en traversant le deuxième filtre, dont l'axe est incliné par rapport à l'axe du premier. L'intensité transmise est donc une fraction (0,5) $\cos^2\theta$ de l'intensité incidente. Pour que cette fraction représente 10 % (une réduction de 90 %), il faut que $0{,}5\ \cos^2\theta = 0{,}1$ et $\theta = 63{,}4\,°$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

23.10 DIFFRACTION DES RAYONS X ET STRUCTURE DES MOLÉCULES BIOLOGIQUES

46 On obtient une réflexion renforcée sur un plan réticulaire lorsque l'angle α entre les rayons X incidents et ce plan vérifie la relation $2\,d \sin\alpha = m\,\lambda$, pour $m = 1, 2, 3, \ldots$ Les longueurs d'onde qui vérifient cette relation lorsque $d = 0{,}2$ nm et $\alpha = 20°$ sont $\lambda = [2\,(0{,}2 \times 10^{-9}\ \text{m}) \sin 20°] / m$, ou $\lambda = (0{,}137 \times 10^{-9}\ \text{m}) / m$, où $m = 1, 2, 3, \ldots$ La plus grande longueur d'onde correspond à $m = 1$ et vaut donc $\lambda = 0{,}137 \times 10^{-9}$ m.

---

47 L'interférence constructive se produit lorsque le faisceau incident fait avec le plan réticulaire un angle α tel que $2\,d \sin\alpha = m\,\lambda$, pour $m = 1, 2, 3, \ldots$ Ici, d est la distance qui sépare deux plans réticulaires parallèles successifs et λ est la longueur d'onde des rayons X utilisés. On trouve les valeurs :

$$\sin\alpha = m\,[\lambda / (2\,d)] = (0{,}167)\,m.$$

L'angle le plus petit correspond à $m = 1$ et donc $\sin\alpha = 0{,}167$, ce qui donne $\alpha = 10°$.

23.11 L'HOLOGRAPHIE

49 (a) L'objet est reproduit dans son entièreté, mais (b) la résolution est réduite : dans le cas du réseau, le fait de diminuer le nombre de traits a pour effet d'élargir chaque faisceau de diffraction.

23.12 LES EFFETS D'INTERFÉRENCE DANS LES FILMS MINCES

50 A l'incidence normale et pour un film d'indice de réfraction n_c inférieur à celui (n) de la lentille, l'effet anti-reflet est obtenu quand l'épaisseur d du film vaut un quart de longueur d'onde de la lumière dans la couche, soit lorsque $d = \lambda / (4\,n_c)$, où λ est la longueur d'onde dans le vide. Ici,

$$d = (550 \times 10^{-9}\ \text{m}) / [4\,(1{,}38)] = 0{,}1 \times 10^{-6}\ \text{m}.$$

(b) La réflexion entre l'eau et la couche étant faible (les indices de réfraction sont proches), l'extinction n'est pas complète.

---

51 La réflexion sur la première interface introduit un déphasage correspondant à un chemin optique $\lambda / 2$. L'aller-retour à l'intérieur du film de savon allonge le parcours d'une longueur $2\,n_c\,d$, où d est l'épaisseur du film et il n'y a pas d'inversion à la réflexion sur la deuxième surface. La différence de marche entre les rayons réfléchis perpendiculairement à la surface du film est donc $2\,n_c\,d - \lambda / 2$. L'extinction se produira si cette différence de marche coïncide avec un nombre impair de demi-longueurs d'onde, c'est-à-dire lorsque :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$2\,n_c\,d - \lambda/2 = (2\,m+1)\,(\lambda/2).$$

Si le film est juste assez épais pour produire l'interférence destructive, on est dans le cas où :

$$m = 0 \text{ et } d = \lambda/(2\,n_c) = (400 \times 10^{-9}\text{ m})/[2\,(1{,}33)] = 150 \times 10^{-9}\text{ m}.$$

SOLUTION DES PROBLÈMES

53 L'angle de réfraction pour la face d'entrée est donné par $n_1 \sin\phi_1 = n_2 \sin\phi_2$, ou (1) $\sin 30° = (1{,}5) \sin\phi_2$ et $\phi_2 = 19{,}47°$. Par ailleurs, si $A = 60°$ est l'angle au sommet du prisme, l'angle entre les normales vaut $180° - A = 120°$. La somme des angles d'un triangle valant 180°, l'angle d'incidence pour la face de sortie est $\phi'_1 = 180° - 120° - 19{,}47° = 40{,}53°$. La loi de la réfraction :

$$(1{,}5) \sin\phi'_1 = (1) \sin\theta$$

donne l'angle de sortie $\theta = 77{,}1°$.

---

55 La réflexion totale se produit lorsque l'angle d'incidence atteint la valeur ϕ_c telle que $\sin\phi_c = n_2/n_1 = (1{,}000)/(1{,}333) = 0{,}75$, soit $\phi_c = 48{,}6°$. Lorsque le bateau se sera déplacé d'une distance x, il recevra les rayons se présentant sous un angle d'incidence θ tel que $\text{tg}\,\theta = x/(10\text{ m})$. Au moment où l'incidence critique ϕ_c est atteinte, il se sera donc déplacé sur une distance :

$$x = (10\text{ m})\,\text{tg}\,\phi_c = (10\text{ m})\,\text{tg}\,48{,}6° = 11{,}34\text{ m}.$$

---

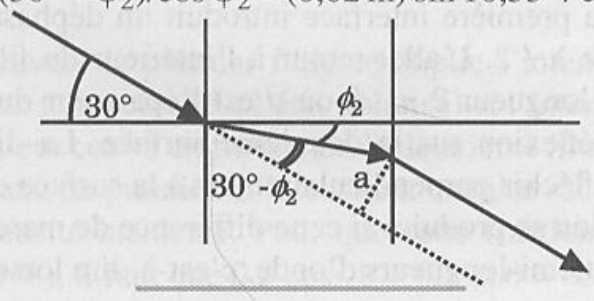
56 (a) La loi de Snell, $n_1 \sin\phi_1 = n_2 \sin\phi_2$, donne l'angle de réfraction à l'entrée dans la lame :

$$\sin\phi_2 = (n_1/n_2) \sin\phi_1 = [(1)/(1{,}5)] \sin 30° = 0{,}333 \text{ et } \phi_2 = 19{,}47°.$$

(b) A la sortie, l'angle d'incidence est égal à ϕ_2 (les faces d'entrée et de sortie étant parallèles) et $n_2 \sin\phi_2 = n_1 \sin\phi_3$. On en tire :

$$\sin\phi_3 = (n_2/n_1) \sin\phi_2 = (1{,}5)\,(0{,}333) = 0{,}5 \text{ et } \phi_3 = 30°$$

(égal à ϕ_1 : le rayon émergent sort parallèlement au rayon incident). (c) Le déplacement latéral est la distance a perpendiculaire au rayon. C'est la distance parcourue par la lumière dans la lame, $b = d/\cos\phi_2$, multipliée par $\sin(30° - \phi_2)$. Donc, $a = d \sin(30° - \phi_2)/\cos\phi_2 = (0{,}02\text{ m}) \sin 10{,}53°/\cos 19{,}47° = 0{,}00388\text{ m}$.



© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

57 La figure 23.40 du manuel fournit les données géométriques. L'angle de réfraction, dans l'air, est donné par la loi de Snell (4/3) sin 10° = (1) sin ϕ_2, d'où $\phi_2 = 13{,}39°$. C'est aussi l'angle de sommet Q' entre la normale et le rayon émergent. La distance a entre les points de percée de la normale et du rayon émergent s'obtient facilement à partir de la relation tg 10° = a / (1 m), qui fournit la valeur $a = 0{,}176$ m. On peut ainsi obtenir la profondeur apparente b (distance entre Q' et la surface) par la relation tg $\phi_2 = a / b$, ou encore :

$$b = a / \text{tg}\ \phi_2 = (0{,}176\ \text{m}) / \text{tg}\ 13{,}39° = 0{,}74\ \text{m}.$$

---

65 (a) La lumière renvoyée sous un angle θ par un réseau caractérisé par une distance d entre deux traits présente une longueur d'onde λ_m qui vérifie la relation :

$$d \sin\theta = m\,\lambda_m, \text{ pour } m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ici, les longueurs d'onde possibles sont données par $\lambda_m = d \sin\theta / m$, où :

$$d = (1 \times 10^{-2}\ \text{m}) / (4000) = 2{,}5 \times 10^{-6}\ \text{m}.$$

On trouve $\lambda_m = (2{,}5 \times 10^{-6}\ \text{m}) \sin 45° / m = (1{,}77 \times 10^{-6}\ \text{m}) / m$. (b) Il suffit de compter le nombre de raies apparaissant sous des angles plus petits : si l'on en compte un nombre q ($\theta = 0$ compris), la longueur d'onde est $(1{,}77 \times 10^{-6}\ \text{m}) / q$.

---

68 Les premières extinctions, de part et d'autre du maximum central se présentent par rapport à la direction d'incidence sous un angle θ donné par la relation $a \sin\theta = \lambda$, où a est la largeur de la fente. On trouve ainsi :

$$\sin\theta = \lambda / a = (500 \times 10^{-9}\ \text{m}) / (1 \times 10^{-5}\ \text{m}) = 0{,}05$$

et $\theta = 2{,}87°$. A une distance de 0,5 m, cet angle intercepte une longueur $x = (0{,}5\ \text{m})\ \text{tg}\ \theta = 0{,}025$ m et la largeur totale de la tache centrale est $2x = 0{,}05$ m.

---

69 La tache "ponctuelle" est la figure de diffraction de la lentille, considérée comme une ouverture circulaire. Le maximum central dans cette figure est limité par l'angle θ donné par $\sin\theta = 1{,}22\,(\lambda / d)$. Ici, l'angle θ est donné par :

$$\text{tg}\ \theta = (0{,}5 \times 10^{-4}\ \text{m}) / (0{,}2\ \text{m}) = 0{,}25 \times 10^{-3}\ (\theta = 0{,}0143°)$$

et le diamètre de la lentille est :

$$d = 1{,}22\,(\lambda / \sin\theta) = (1{,}22)\,(550 \times 10^{-9}\ \text{m}) / \sin 0{,}0143° = 2{,}68 \times 10^{-3}\ \text{m}.$$

---

73 Le théorème de Pythagore impose $d_m^2 = d^2 + r_m^2$, d'où la relation (a). On en déduit $r_m^2 = (d_m^2 - d^2) = d^2\,\{[1 + m\,(\lambda / d)]^2 - 1\}$. Quand $\lambda / d << 1$ est satisfaite, on trouve $r_m^2 \approx d^2\,[1 + 2\,m\,(\lambda / d) - 1] = d^2\,[2\,m\,\lambda / d] = 2\,m\,\lambda\,d$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

75 Une plaque zonée étudiée pour focaliser la lumière rouge (700 nm) à la distance $d = 0{,}1$ m est formée d'anneaux concentriques de rayons r_m donnés par :

$$r_m^2 = 2\,m\,d\,\lambda = 2\,m\,(0{,}1\text{ m})\,(700 \times 10^{-9}\text{ m}) = m\,(140 \times 10^{-9}\text{ m}^2)$$

($m = 0, 1, 2,...$). Avec cette plaque, la lumière jaune de 600 nm produira une tache claire à une distance :

$$d = r_m^2 / (2\,m\,\lambda) = (140 \times 10^{-9}\text{ m}^2)\,m / [2\,m\,(600 \times 10^{-9}\text{ m})] = 0{,}117\text{ m}.$$

---

77 La réflexion sur la première face introduit une inversion de phase ($\lambda / 2$ dans le chemin optique) et l'aller-retour dans le film d'épaisseur d correspond à un chemin optique $2\,n_c\,d$ (il n'y a pas d'inversion sur la deuxième surface du film). La condition pour l'obtention d'une interférence destructive s'écrit :

$$2\,n_c\,d - \lambda / 2 = \lambda / 2 + n\,\lambda.$$

Pour $d << \lambda$, cette relation sera vérifiée pour $n = -1$ quelle que soit la longueur d'onde : l'onde réfléchie (et inversée) sur la première surface est détruite par l'onde réfléchie (sans inversion) par la deuxième surface.

---

80 L'épaisseur d du film d'air entre les deux lames, à une distance x du point de contact est donnée par la relation $d = x\,\text{tg}\,\theta$. $\theta = 5 \times 10^{-4}$ rad est l'angle entre les deux lames. La différence de marche entre les rayons réfléchis sur la première et sur la deuxième surface vaut $2\,d + \lambda / 2$ et la condition d'extinction s'écrit $2\,d + \lambda / 2 = (n + 1/2)\,\lambda$, ou encore $2\,x\,\text{tg}\,\theta = n\,\lambda$ (n entier). L'écart entre deux franges sombres est donc :

$$\Delta x = \lambda / [2\,\text{tg}\,\theta] = (600 \times 10^{-9}\text{ m}) / [2\,\text{tg}\,0{,}0005] = 6 \times 10^{-4}\text{ m}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 24

Miroirs, lentilles et instruments d'optique

RAPPELS

L'image d'un objet formée par un miroir plan est virtuelle, droite et de même grandeur que l'objet. La distance entre le miroir et l'image est identique à la distance entre le miroir et l'objet.

L'axe optique d'une lentille est la droite passant par les deux centres de courbure. Une lentille convergente dévie la lumière dans la direction de son axe optique de sorte qu'un faisceau de rayons parallèles à celui-ci converge en un même point appelé foyer. Une lentille divergente dévie les rayons lumineux de manière à ce qu'ils s'écartent de l'axe, de sorte qu'ils paraissent émaner du foyer. La distance entre le centre de la lentille et le foyer est la distance focale f (positive pour les lentilles convergentes et négative pour les divergentes). Elle est liée à son indice de réfraction n et aux rayons de courbure R_1 et R_2 de ses surfaces par la formule des opticiens :

$$1/f = (n-1)\,(1/R_1 + 1/R_2).$$

Le rayon de courbure d'une surface convexe est positif, celui d'une surface concave est négatif et celui d'une surface plane est infini. Si la lentille n'est pas utilisée dans l'air ou le vide, l'indice n doit être interprété comme l'indice de réfraction relatif, n(lentille) / n(milieu).

La construction de l'image s'obtient graphiquement à l'aide de trois rayons particuliers émanant de la source : un rayon parallèle à l'axe optique qui est dévié pour qu'il passe par le foyer F', un rayon passant par le foyer F qui émerge parallèlement à l'axe optique et un rayon passant par le centre optique qui ne subit aucune déviation. Si h est la hauteur de l'objet et h' celle de l'image (positives si elles pointent au-dessus de l'axe, négatives sinon), on définit le facteur d'agrandissement linéaire

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

par le rapport h' / h. Si s et s' sont les distances objet-lentille et lentille-image respectivement (positives pour des objets et images réels), les deux formules des lentilles sont $h'/h = - s'/s$ et $1/s + 1/s' = 1/f$.

La puissance d'une lentille, exprimée en dioptries, est l'inverse de la distance focale exprimée en mètres. La puissance d'un système de lentilles accolées est la somme des puissances individuelles.

Une loupe est parfois utile pour observer les détails d'un objet. Au *punctum optimum*, point x_n (~ 0,25 m) le plus proche où l'oeil peut accomoder longuement sans fatigue, la séparation angulaire de deux points séparés d'une distance y est égale à $\theta \cong \text{tg}\ \theta = y / x_n$. On détermine le grossissement d'une loupe par :

$$G = x_n / f = (0{,}25\ \text{m}) / f.$$

Dans un microscope, l'image de l'objet par l'objectif sert d'objet pour l'oculaire qui agit comme une loupe. Le grossissement total du système est égal à :

$$g = - s'_1\ (0{,}25\ \text{m}) / (f_1 f_2).$$

Lorsqu'un appareil photographique est mis au point correctement sur un objet ponctuel, l'image formée sur le film est un cercle de rayon $r = 1{,}22\ \lambda\ f/d$ où d est le diamètre de l'ouverture circulaire, λ la longueur d'onde du faisceau de lumière et f la distance focale de l'objectif. On exprime souvent le diamètre de l'objectif par rapport à la distance focale; un objectif $f/8$, par exemple, a un diamètre d égal à $f/8$. La séparation minimale d qui peut être résolue par un microscope optique est donnée par $d = \lambda / (2\ n \sin \theta)$ où λ est mesurée dans l'air, n est l'indice de réfraction du milieu séparant l'objectif de l'échantillon et θ l'angle sous-tendu par l'objectif.

On corrige la myopie par un verre divergent dont la puissance est donnée par $P = 1/s + 1/D$ où D est la distance à laquelle se forme l'image dans l'oeil (~ 0,02 m) pour rejeter le *punctum remotum* s à l'infini. Le pouvoir d'accomodation de l'oeil se calcule par $A = P_n - P_f = (1/x_n + 1/D) - (1/x_f + 1/D)$ où x_n et x_f correspondent à la position du *punctum optimum* et du *punctum remotum* respectivement. La correction de l'hypermétropie se fait grâce à des verres convergents.

SOLUTION DES EXERCICES

24.1 LES MIROIRS

1 Comme la distance objet-miroir est égale à la distance miroir-image, la distance qui sépare l'objet de son image est égale au double de 2 m, soit 4 m.

2 (a) Son image se trouve à 1 m du miroir et donc à 2 m de lui. (b) L'image du chat se rapproche à la même vitesse du miroir; on déduit donc que le chat se rapproche de son image à la vitesse de 4 m s^{-1}.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit

3 Puisque la distance de l'objet à l'image est égale au double de la distance objet-miroir, pour que la personne voit son image nettement, il ne faut pas qu'elle s'éloigne de plus de 20 cm du miroir.

24.2 LES LENTILLES

4 La formule des opticiens permet de calculer la distance focale par :

$$1/f = (n - 1)\,(1/R_1 + 1/R_2).$$

Comme le rayon de courbure d'une surface concave est négatif, on détermine $f = \{(1{,}6 - 1)\,[1/(0{,}7\text{ m}) + 1/(-0{,}5\text{ m})]\}^{-1} = -2{,}92$ m. Le signe négatif indique que la lentille est divergente.

---

5 Par la formule des opticiens, on détermine $1/f = (n - 1)\,(1/R_1 + 1/R_2)$. Une face plane a un rayon de courbure infini tandis que le rayon de courbure de la face concave est négatif. On calcule donc $f = [(1{,}4 - 1) / (-0{,}2\text{ m})]^{-1} = -0{,}5$ m.

---

7 Dans l'eau, l'indice n de la formule des opticiens représente l'indice de réfraction relatif n(lentille) / n(eau) = (1,6) / (1,333) = 1,2. En rapportant l'une à l'autre cette formule dans l'air et dans l'eau, on peut écrire :

$$f_{eau} / f_{air} = (1{,}6 - 1) / (1{,}2 - 1) = 3.$$

On calcule alors $f_{eau} = (3)\,(0{,}5\text{ m}) = 1{,}5$ m.

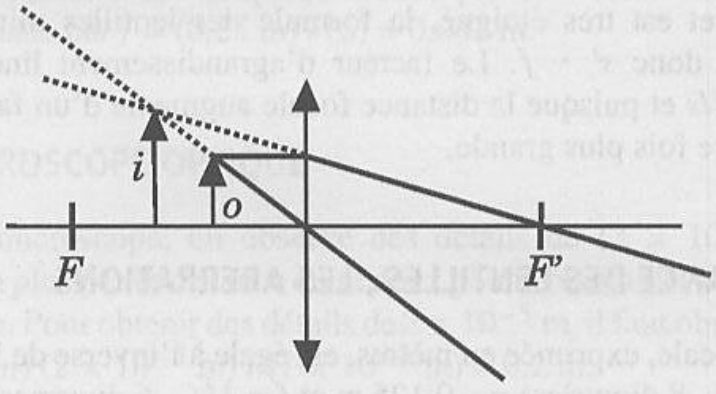
---

8 La formule des opticiens appliquée dans les deux situations permet d'écrire le rapport $f_b / f_r = (n_r - 1) / (n_b - 1)$ et de calculer, en lumière bleue,

$$f_b = (1{,}517 - 1)\,(1\text{ m}) / (1{,}523 - 1) = 0{,}988\text{ m}.$$

24.3 LA FORMATION DE L'IMAGE

10 (a)



© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

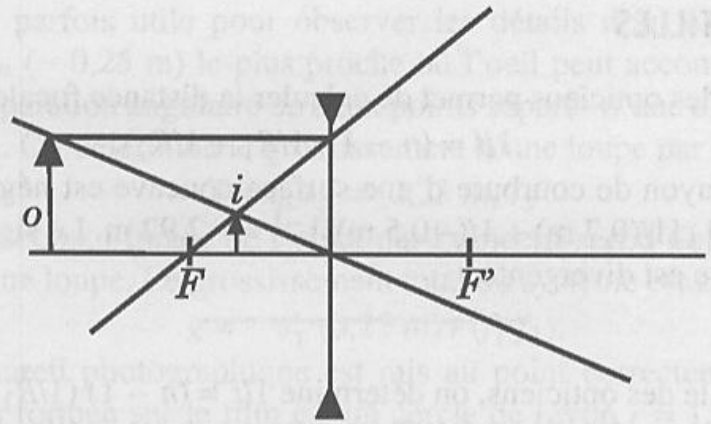
(b) Par la formule des lentilles minces,

$$1/s' = 1/f - 1/s = 1/(0{,}2\text{ m}) - 1/(0{,}08\text{ m}) = -7{,}5\ ;$$

on calcule $s' = -0{,}133$ m. L'image est virtuelle. (c) Le facteur d'agrandissement linéaire se détermine par $h'/h = -s'/s = (0{,}133\text{ m}) / (0{,}08\text{ m}) = 1{,}66$.

---

11 (a)



(b) La formule des lentilles minces permet de déterminer s' par :

$$[1/f - 1/s]^{-1} = [1/(-0{,}5\text{ m}) - 1/(1\text{ m})]^{-1} = -0{,}333\text{ m}.$$

L'image est virtuelle.

---

12 Sachant que le facteur d'agrandissement est égal à $h'/h = 10$, on déduit que $|s'/s| = 10$ et donc que la distance lentille-image est égale à 1 m. On détermine f par la formule des lentilles minces :

$$f = [1/s + 1/s']^{-1} = [1/(0{,}1\text{ m}) + 1/(1\text{ m})]^{-1} = 0{,}091\text{ m}.$$

---

14 Par la formule des lentilles minces,

$$s' = [1/f - 1/s]^{-1} = [1/(-2\text{ m}) - 1/(4\text{ m})]^{-1} = -1{,}33\text{ m}.$$

L'image est donc virtuelle et située entre le foyer et la lentille.

---

17 Lorsque l'objet est très éloigné, la formule des lentilles minces se réduit à $1/f \sim 1/s'$ et donc $s' \sim f$. Le facteur d'agrandissement linéaire m devient $m = h'/h = -f/s$ et puisque la distance focale augmente d'un facteur 4, l'image est aussi quatre fois plus grande.

24.4 LA PUISSANCE DES LENTILLES ; LES ABERRATIONS

18 La distance focale, exprimée en mètres, est égale à l'inverse de la puissance. On calcule $f = 1/(-8\text{ dioptries}) = -0{,}125$ m et $f = 1/(-6\text{ dioptries}) = -0{,}167$ m.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

20 La puissance est égale à l'inverse de la distance focale. Elle vaut ici :

$$P = 1/(2\text{ m}) = 0{,}5\text{ dioptrie.}$$

---

21 (a) La puissance d'un système de lentilles est égale à la somme des puissances individuelles, soit $P = (0{,}25\text{ dioptrie}) + (4{,}5\text{ dioptries}) = 4{,}75\text{ dioptries}$.

(b) La distance focale du système est l'inverse de la puissance, soit :

$$f = 1/(4{,}75\text{ dioptries}) = 0{,}211\text{ m.}$$

---

22 La puissance d'un système est égale à la somme des puissances. Comme la distance focale est l'inverse de la puissance, on peut écrire $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$ et calculer $f_2 = [1/f - 1/f_1]^{-1} = [1/(1{,}5\text{ m}) - 1/(2\text{ m})]^{-1} = 6\text{ m}$.

---

23 (a) La distance focale de la partie réservée à la vision distante est égale à :

$$f = 1/P = 1/(-5{,}5\text{ dioptries}) = -0{,}182\text{ m.}$$

(b) Celle de la partie réservée à la vision proche est égale à :

$$f = 1/[(-5{,}5\text{ dioptries}) + (2\text{ dioptries})] = -0{,}286\text{ m.}$$

24.5 LA LOUPE

24 Si l'on adopte la valeur $x_n = 0{,}25$ m pour la position du *punctum optimum*, le grossissement d'une loupe est donné par :

$$G = (0{,}25\text{ m}) / f = (0{,}25\text{ m}) / (0{,}1\text{ m}) = 2{,}5.$$

---

25 La distance minimale entre deux points est égale à $y = x_n\,\theta$ où θ est l'acuité visuelle. Elle vaut donc $y = (1\text{ m})\,(1 \times 10^{-3}) = 1 \times 10^{-3}$ m.

---

26 Le grossissement d'une loupe est donné par $G = (0{,}25\text{ m}) / f$. On déduit sa distance focale par $f = (0{,}25\text{ m}) / (6) = 0{,}042$ m.

24.6 LE MICROSCOPE OPTIQUE

27 Grâce au microscope, on observe des détails de $(2 \times 10^{-3}\text{ m}) / g = 2 \times 10^{-5}$ m. La plus petite distance entre deux points résolus à l'oeil nu est d'environ 1×10^{-4} m. Pour obtenir des détails de 2×10^{-5} m, il faut observer une grandeur égale à $(1\text{ m})\,(2 \times 10^{-5}\text{ m}) / (1 \times 10^{-4}\text{ m}) = 0{,}2$ m.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

28 Le grossissement d'un microscope est $g = -s'_1\ (0{,}25\ \text{m}) / (f_1\ f_2)$ où les variables indicées par 1 se rapportent à l'objectif. On évalue donc :

$$g = -\ (0{,}15\ \text{m})\ (0{,}25\ \text{m}) / [(0{,}005\ \text{m})\ (0{,}028\ \text{m})] = 268.$$

---

29 L'objet pour l'oculaire est l'image par l'objectif. La distance de l'objet à l'oculaire est égale à $s_2 = (1/f_2 - 1/s'_2)^{-1} = [1/(0{,}03\ \text{m}) - 1/(-\ 0{,}25\ \text{m})]^{-1} = 0{,}027\ \text{m}$.

(a) On peut calculer la distance objectif-image par :

$$s'_1 = (0{,}16\ \text{m}) - (0{,}027\ \text{m}) = 0{,}133\ \text{m}.$$

(b) Utilisant la formule des lentilles minces, on calcule :

$$s_1 = (1/f_1 - 1/s'_1)^{-1} = [1/(0{,}004\ \text{m}) - 1/(0{,}133\ \text{m})]^{-1} = 0{,}00412\ \text{m}.$$

(c) Le grossissement du microscope est égal à :

$$g = -\ s'_1\ (0{,}25\ \text{m}) / (f_1\ f_2)$$
$$= -\ (0{,}133\ \text{m})\ (0{,}25\ \text{m}) / [(0{,}004\ \text{m})\ (0{,}030\ \text{m})] = -\ 277.$$

---

30 La plus petite distance entre deux points résolus à l'oeil nu est d'environ 1×10^{-4} m. Grâce au microscope, les détails peuvent être 150 fois plus petits, et donc, au minimum, être distants de :

$$(1 \times 10^{-4}\ \text{m}) / (150) = 6{,}67 \times 10^{-7}\ \text{m}.$$

24.7 L'OEIL

33 (a) La figure 24.23 permet de déduire approximativement la valeur des longueurs d'onde correspondant à une sensibilité égale à 0,5; il s'agit de 510 nm et 620 nm.

(b) La même figure, courbe (b), donne les valeurs de longueurs d'onde égales à 450 nm et 560 nm.

---

35 (a) La séparation angulaire θ de deux points séparés par une distance y est égale à $\theta = y / x_n$. Le diamètre minimum correspond à la valeur de :

$$y = x_n\ \theta = (0{,}25\ \text{m})\ (2{,}3 \times 10^{-6}) = 5{,}75 \times 10^{-7}\ \text{m}.$$

(b) Si l'acuité visuelle est réduite d'un facteur 10, le diamètre doit augmenter d'un même facteur et valoir $5{,}75 \times 10^{-6}$ m.

---

36 L'erreur d'alignement se calcule par :

$$y = x_n\ \theta = (0{,}25\ \text{m})\ (9 \times 10^{-6}) = 2{,}25 \times 10^{-6}\ \text{m}.$$

24.8 L'APPAREIL PHOTOGRAPHIQUE

38 Le diamètre de l'objectif est égal à $d = f / (1{,}4) = (0{,}05\ \text{m}) / (1{,}4) = 35{,}7\ \text{mm}$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

39 Augmenter le diamètre d'un facteur 2 signifie augmenter l'aire de l'objectif d'un facteur $2^2 = 4$. L'obturateur doit donc s'ouvrir 4 fois moins longtemps, soit pendant $t = (1\text{ s} / 25) / 4 = 0{,}01$ s.

---

42 L'image est une tache de rayon $r = 1{,}22\ \lambda\ f\ /\ d$. Les longueurs d'onde utiles vont de 400 à 700 nm, c'est-à-dire se situent au voisinage de la longueur d'onde moyenne de 550 nm. (a) Le rayon de la tache est égal à :

$$r = 1{,}22\ (550 \times 10^{-9}\text{ m})\ (2)$$
$$= 1{,}34 \times 10^{-6}\text{ m}.$$

(b) Il vaut $r = 1{,}22\ (550 \times 10^{-9}\text{ m})\ (32) = 21{,}47 \times 10^{-6}$ m.

24.9 RÉSOLUTION ET CONTRASTE DES MICROSCOPES

43 (a) On appelle ouverture numérique le produit $n \sin \theta$. Sa valeur est égale à :

$$(1{,}4) \sin 80° = 1{,}38.$$

(b) Le pouvoir séparateur se calcule par :

$$d = \lambda / (2\ n \sin \theta) = (400 \times 10^{-9}\text{ m}) / [2\ (1{,}4) \sin 80°] = 145\text{ nm}.$$

24.10 LES DÉFAUTS OPTIQUES DE L'OEIL

44 La puissance du système optique de l'oeil est égale à :

$$P_n = 1/x_n + 1/D = 1/(2\text{ m}) + 1/(0{,}02\text{ m}) = 50{,}5\text{ dioptries}.$$

La puissance idéale vaut $P = 1/\ (0{,}25\text{ m}) + 1\ /\ (0{,}02\text{ m}) = 54$ dioptries. Il lui faut donc des verres correcteurs de + 3,5 dioptries.

---

45 (a) Pour une vision normale, il faut que le *punctum remotum* soit rejeté à l'infini. Dans ce cas idéal, la puissance du système optique de l'oeil vaut :

$$P_f = 1/x_f + 1/D = 1/\infty + 1/(0{,}02\text{ m}) = 50\text{ dioptries}.$$

La puissance réelle est $P_f = 1/x_f + 1/D = 1/(0{,}5\text{ m}) + 1/(0{,}02\text{ m}) = 52$ dioptries. Pour permettre une vision de loin correcte, il faut que les verres correcteurs aient une puissance de – 2 dioptries. (b) Le pouvoir correcteur se calcule par $A = P_n - P_f = 1/x_n - 1/x_f$. On détermine x_n par $(A + 1/x_f)^{-1} = 0{,}166$ m. (c) Avec les verres correcteurs, on calcule la puissance :

$$P_n = A + P_f = (4\text{ dioptries}) + (50\text{ dioptries}) = 54\text{ dioptries}.$$

On détermine alors :

$$x_n = (P_n - 1/D)^{-1} = [(54\text{ dioptries}) - 1/(0{,}02\text{ m})]^{-1} = 0{,}25\text{ m}.$$

---

47 (a) On peut calculer la puissance de l'oeil au *punctum optimum* ; elle vaut :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$P_f = P_n - A = 1/x_n + 1/D - A$$
$$= 1/(0{,}1\text{ m}) + 1/(0{,}02\text{ m}) - (4\text{ dioptries}) = 56\text{ dioptries.}$$

On peut alors évaluer la position du *punctum remotum* par :

$$x_f = (P_f - 1/D)^{-1} = [(56\text{ dioptries}) - 1/(0{,}02\text{ m})]^{-1} = 0{,}166\text{ m.}$$

(b) La puissance idéale au *punctum remotum* est égale à :

$$P_f = 1/\infty + 1/(0{,}02\text{ m}) = 50\text{ dioptries.}$$

Il lui faut donc des verres correcteurs d'une puissance égale à – 6 dioptries.

(c) Dans ce cas, la puissance au *punctum optimum* est égale à :

$$P_n = A + P_f = 54\text{ dioptries.}$$

Le *punctum optimum* se situe en $x_n = (P_n - 1/D)^{-1} = 0{,}25$ m.

---

49 La puissance idéale au *punctum optimum* vaut :

$$P_n = 1/x_n + 1/D = 1/(0{,}25\text{ m}) + 1/(0{,}02\text{ m}) = 54\text{ dioptries.}$$

Elle obtient cette puissance grâce aux verres; on peut donc déterminer la puissance réelle des yeux : $P_n = 51$ dioptries. Avec cette puissance, son *punctum optimum* se situe en $x_n = (P_n - 1/D)^{-1} = [(51\text{ dioptries}) - 1/(0{,}02\text{ m})]^{-1} = 1$ m.

24.11 LA PERCEPTION DES COULEURS

50 (a) L'intersection des deux courbes se produit pour une longueur d'onde égale à 480 nm environ. (b) Lorsqu'on trace une ligne verticale marquant cette longueur d'onde, on rencontre la courbe du rouge pour un pourcentage égal à 28 % environ.

---

51 Une verticale tracée à 600 nm rencontre la courbe *G* à 30 % et la courbe *R* à 80 % environ.

---

52 (a) En traçant une droite partant de 480 nm et passant par le blanc, on trouve le complémentaire du bleu à 580 nm; ses coordonnées chromatiques sont $x = 0{,}52$, $y = 0{,}48$ et $z = 0$. (b) Le complémentaire du vert s'obtient en tirant une droite passant par le blanc; cette droite rencontre la courbe en un point correspondant à une teinte hors-spectrale dont les coordonnées chromatiques sont $x = 0{,}44$, $y = 0{,}13$ et $z = 1 - x - y = 0{,}43$.

SOLUTION DES PROBLÈMES

54 L'image d'un objet par un miroir plan a la même grandeur que l'objet. Le miroir mesure donc 1,5 m.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

55 L'image se forme dans l'oeil, comme si le bâtiment se situait à 200 m derrière le miroir. En dessinant les rayons partant du haut et du bas du bâtiment, passant par les extrémités du miroir et arrivant à l'oeil, on construit deux triangles ayant le même angle au sommet et des côtés parallèles. On peut donc écrire h / (200,25 m) = (0,1 m) / (0,25 m) et calculer la hauteur recherchée h = 80,1 m.

---

59 La formule des lentilles minces appliquée à la première lentille exprime $1/f_1 = 1/s_1 + 1/s'_1$. Puisque l'image par la première lentille constitue l'objet pour la seconde ($s_2 = -s'_1$), cette même formule s'écrit, pour la seconde lentille, $1/f_2 = -1/s'_1 + 1/s'_2$. Si l'on considère le système des lentilles, l'objet se trouve à une distance s_1 et l'image se forme en s'_2. On exprime donc que la distance focale du système obéit à la loi $1/f = 1/s_1 + 1/s'_2$. On déduit alors que l'expression de $1/f$ correspond à la somme de $1/f_1$ et de $1/f_2$.

---

60 La somme des distances objet-lentille et lentille-image, introduite dans la formule des lentilles minces, permet d'exprimer la distance focale de la lentille comme $f = s\,(1 - s)$. On obtient donc une équation du second degré, dont l'inconnue est la distance s. Les deux solutions de cette équation sont :

$$s = 0{,}053 \text{ m et } s = 0{,}947 \text{ m.}$$

Les grossissements correspondants se calculent par $g = -s'/s$ et valent respectivement – 18 et – 0,056.

---

61 La distance focale du système est donnée par $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$. La première lentille, l'eau, présente une face plane et une face convexe et sa distance focale obéit à $1/f_1 = (1{,}333 - 1)$ / (0,2 m) tandis que la distance focale de la seconde, en verre, est donnée par $1/f_2 = (1{,}5 - 1)$ / (– 0,2 m). On déduit alors la distance focale du système : f = – 1,20 m.

---

62 (a) La formule des lentilles minces implique :

$$s = (1/f - 1/s')^{-1} = [1/(0{,}08 \text{ m}) - 1/(3 \text{ m})]^{-1} = 0{,}082 \text{ m.}$$

(b) Par l'égalité des rapports des hauteurs et des distances, on peut calculer :

$$h = h'\,s\,/\,s' = (0{,}01 \text{ m})\,(0{,}082 \text{ m})\,/\,(3 \text{ m}) = 2{,}74 \text{ mm.}$$

(c) En utilisant la même égalité qu'au point (b), on calcule :

$$s' = s\,h'\,/\,h = (0{,}082 \text{ m})\,(0{,}2 \text{ m})\,/\,(2{,}74 \times 10^{-3} \text{ m}) = 6 \text{ m.}$$

(d) Enfin, de la même manière, on obtient la valeur de la distance entre l'objectif et la diapositive : $s = h\,s'\,/\,h' = (3 \text{ m})\,(2{,}74 \times 10^{-3} \text{ m})\,/\,(0{,}2 \text{ m}) = 0{,}041$ m. La formule des lentilles minces permet ensuite de calculer $f = 0{,}041$ m.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

63 La définition du facteur d'agrandissement linéaire, $g = -s'/s$ implique la relation $s = s'$. La formule des lentilles minces permet alors de calculer $s = 2f$.

---

64 La puissance d'une lentille se calcule par $P = 1/f = (n-1)(1/R_1 + 1/R_2)$. Comme une face est plane, le calcul se résume à :

$$P = (1{,}37 - 1) / (7{,}7 \times 10^{-3}\ \text{m}) = 48 \text{ dioptries.}$$

---

66 Pour la première lentille, la distance s_1 est grande, de sorte que $s'_1 = f_1 = 5$ cm. L'objet pour la seconde lentille est donc à sa droite : $s_2 = -2{,}5$ cm. On peut alors calculer la distance lentille 2-image par la formule des lentilles minces :

$$s'_2 = (1/f_2 - 1/s_2)^{-1} = [1/(0{,}05\ \text{m}) - 1/(-0{,}025\ \text{m})]^{-1} = 0{,}017\ \text{m}.$$

---

67 (a) On calcule la puissance au *punctum remotum* par :

$$P_f = P_n - A$$

$$= 1/x_n + 1/D - A = 1/(0{,}1\ \text{m}) + 1/(0{,}02\ \text{m}) - (2 \text{ dioptries}) = 58 \text{ dioptries.}$$

La position du *punctum remotum* vaut alors :

$$x_f = (P_f - 1/D)^{-1} = [(58 \text{ dioptries}) - 1/(0{,}02\ \text{m})]^{-1} = 0{,}125\ \text{m}.$$

(b) Quand le *punctum optimum* est à 0,25 m, la puissance est égale à :

$$P_n = 1/(0{,}25\ \text{m}) + 1/(0{,}02\ \text{m}) = 54 \text{ dioptries.}$$

La puissance en l'absence d'accomodation est calculée par :

$$P_f = P_n - A = (54 \text{ dioptries}) - (2 \text{ dioptries}) = 52 \text{ dioptries.}$$

La position du *punctum remotum* est alors égale à :

$$x_f = (P_f - 1/D)^{-1} = [(52 \text{ dioptries}) - 1/(0{,}02\ \text{m})]^{-1} = 0{,}5\ \text{m}.$$

---

69 Le grossissement vaut $G = -f_1/f_2 = -(2\ \text{m})/(0{,}1\ \text{m}) = -20$.

---

70 On peut calculer la distance focale de l'objectif par $(3\ \text{m}) - f_2 = 2{,}9$ m. Le grossissement est égal à $G = -f_1/f_2 = -(2{,}9\ \text{m})/(0{,}1\ \text{m}) = -29$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 25

La relativité restreinte

RAPPELS

La théorie de la relativité restreinte est basée sur deux principes fondamentaux : le principe de relativité qui stipule que toutes les lois de la physique et de la nature sont identiques dans tous les systèmes de référence d'inertie et celui qui exprime que la vitesse de la lumière dans le vide est la même pour tous les observateurs attachés à un système de référence d'inertie.

Cette théorie énonce que, par rapport au temps mesuré par un observateur au repos dans un laboratoire, le temps ne s'écoule pas aussi rapidement dans un système qui se déplace par rapport à lui avec la vitesse u. Cette dilatation du temps est exprimée par la relation $t' = t / [1 - u^2/c^2]^{1/2}$. Un événement qui prend un temps t dans un système en mouvement s'étend sur un laps de temps t' pour un observateur au repos. La vitesse u d'un mobile ne peut jamais égaler ou dépasser la vitesse de la lumière, le temps t' devenant infiniment long si u s'approche de c.

Une conséquence immédiate de la dilatation du temps est la contraction des longueurs. Une distance mesurée par un observateur en mouvement paraît plus courte et semble valoir $\ell' = \ell\ [1 - u^2/c^2]^{1/2}$.

La définition de la quantité de mouvement relativiste d'un objet de masse m et de vitesse v est $p = m\ v / [1 - v^2/c^2]^{1/2}$. Par cette définition, on trouve que l'énergie cinétique d'un objet de masse m et de vitesse v vaut :

$$K = m\ c^2\ [1 / (1 - v^2/c^2)^{1/2} - 1].$$

On définit l'énergie au repos d'un objet de masse m par $E_0 = m\ c^2$. L'énergie totale E de l'objet est égale à la somme des énergies au repos et cinétique de sorte que :

$$E = m\ c^2 / (1 - v^2/c^2)^{1/2}.$$

Si deux observateurs sont en mouvement à la vitesse u l'un par rapport à l'autre, et qu'un objet se déplace, pour un observateur du repère mobile, à la vitesse v', la

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

formule d'addition des vitesses permet de calculer la vitesse de ce même objet pour l'observateur du repère fixe ; elle vaut $v = (v' + u) / [1 + u\, v' / c^2]$.

SOLUTION DES EXERCICES

25.1 LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

1 Le pilote peut penser que c'est le sol qui se déplace alors que lui-même est au repos. Il voit donc défiler le sol à la vitesse de 2000 km h^{-1}.

---

2 (a) L'observateur sur Terre voit l'impulsion se propager à la vitesse :

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

(b) Les astronautes de la fusée peuvent se considérer au repos et, dans leur système de référence, la vitesse de l'impulsion lumineuse est encore c, ce système étant d'inertie.

---

3 Pour l'observateur terrestre, au repos, le temps nécessaire pour que l'impulsion lumineuse atteigne le sol est donné par :

$$t = h / c = (3 \times 10^{10} \text{ m}) / (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}) = 100 \text{ s}.$$

25.2 HORLOGES EN MOUVEMENT ET DILATATION DU TEMPS

4 (a) Le temps écoulé pour le passager est plus court que celui indiqué par l'horloge terrestre et vaut $t = t' [1 - v^2/c^2]^{1/2} = (1 \text{ an}) [1 - (0{,}95)^2]^{1/2} = 0{,}312$ an. (b) A cette vitesse, il pense avoir parcouru :

$$D = v\, t' = (0{,}95) (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}) (9{,}85 \times 10^6 \text{ s}) = 2{,}81 \times 10^{12} \text{ km}.$$

---

5 (a) La durée de vie moyenne des mésons en mouvement apparaît plus longue à un observateur sur Terre. Cette durée de vie semble être égale à :

$$t' = t / [1 - v^2/c^2]^{1/2} = (3 \times 10^{-8} \text{ s}) / [1 - (0{,}6)^2]^{1/2} = 3{,}75 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

(b) Un observateur terrestre voit les mésons parcourir une distance $D = v\, t' = (0{,}6) (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}) (3{,}75 \times 10^{-8} \text{ s}) = 6{,}75$ m.

---

6 La distance totale à parcourir est égale à 20 années-lumière, soit :

$$D = (20 \text{ ans}) (365{,}25 \text{ jours an}^{-1}) (86400 \text{ s jour}^{-1}) (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})$$
$$= 189 \times 10^{15} \text{ m}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Pour le jumeau resté sur Terre, le temps nécessaire pour parcourir cette distance est égal à $t = D / v = (189 \times 10^{15}\ \text{m}) / [0{,}99\ (3 \times 10^{8}\ \text{m s}^{-1})] = 20{,}2$ ans. A cause de la dilatation du temps, l'horloge du voyageur marque un temps plus petit, donné par $t = t' [1 - v^2/c^2]^{1/2} = (20{,}2\ \text{ans}) [1 - (0{,}99)^2]^{1/2} = 2{,}85$ ans. Le jumeau A, resté sur Terre, aura donc 40,2 ans tandis que son jumeau B n'en aura que 22,8.

25.3 CONTRACTION DES LONGUEURS

7 Comme tout observateur se déplaçant le long d'un objet trouve que celui-ci subit une contraction, la longueur apparente de l'aimant pour le méson vaut :

$$\ell' = \ell [1 - v^2/c^2]^{1/2} = (2\ \text{m}) [1 - (0{,}9)^2]^{1/2} = 0{,}872\ \text{m}.$$

---

8 (a) Pour les observateurs dans le repère de la ligne droite, sa longueur ℓ est de 1300 m. Pour l'observateur en mouvement relatif, elle vaut :
$\ell' = \ell [1 - v^2/c^2]^{1/2} = (1300\ \text{m}) [1 - (90\ \text{m s}^{-1})^2 / (100\ \text{m s}^{-1})^2]^{1/2} = 566{,}7$ m.
(b) Le temps est donné par $t' = \ell' / v = (566{,}7\ \text{m}) / (90\ \text{m s}^{-1}) = 6{,}3$ s. (c) Pour les spectateurs, le temps nécessaire est $t = \ell / v = (1300\ \text{m}) / (90\ \text{m s}^{-1}) = 14{,}4$ s.

---

9 Dans son propre repère, la barre a une longueur de 1 m. L'observateur en mouvement relatif par rapport à cette règle voit, lui, une longueur égale à 0,5 m. On peut calculer la vitesse $v = c [1 - (\ell' / \ell)^2]^{1/2} = 0{,}866\ c$.

---

10 Dans son système d'axes d'inertie, la longueur ℓ du poteau vaut 20 m. Dans le système d'axes en mouvement relatif par rapport au poteau, nous lui trouvons une longueur égale à $\ell' = \ell [1 - v^2/c^2]^{1/2} = (20\ \text{m}) [1 - (0{,}6)^2]^{1/2} = 16$ m.

25.4 QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET ÉNERGIE

11 L'énergie au repos est égale à $E_0 = m c^2$ tandis que l'énergie cinétique se calcule par $K = m c^2 [1 / (1 - v^2/c^2)^{1/2} - 1]$. Pour que ces deux quantités soient égales, il faut que $[1 / (1 - v^2/c^2)^{1/2} - 1]$ soit égal à 1 ou encore $v = c \sqrt{3} / 2 = 0{,}866\ c$.

---

12 L'énergie au repos d'un gramme de charbon vaut :

$$E_0 = m c^2 = (1 \times 10^{-3}\ \text{kg}) (3 \times 10^{8}\ \text{m s}^{-1})^2 = 90 \times 10^{12}\ \text{J}.$$

Le rapport des deux énergies est égal à :

$$(3 \times 10^{4}\ \text{J}) / (90 \times 10^{12}\ \text{J}) = 0{,}33 \times 10^{-9}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

13 (a) L'équivalence entre la masse et l'énergie permet de calculer :

$$\Delta m = \Delta E / c^2$$
$$= [(5 \text{ eV})(1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J eV}^{-1}) / (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})^2] \, (1 \text{ uma}) / (1{,}66 \times 10^{-27} \text{ kg})$$
$$= 5{,}35 \times 10^{-9} \text{ uma.}$$

(b) La fraction de masse se calcule par :

$$\Delta m / m = (5{,}35 \times 10^{-9} \text{ uma}) / (30 \text{ uma}) = 1{,}78 \times 10^{-10}.$$

---

14 (a) Par unité de temps, une énergie totale de 3×10^9 J est produite. Par la relation d'équivalence entre l'énergie et la masse, on peut calculer :

$$\Delta m = \Delta E / c^2 = (3 \times 10^9 \text{ J}) / (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})^2 = 33{,}3 \times 10^{-9} \text{ kg.}$$

(b) En un an, la masse convertie est égale à :

$$(33{,}3 \times 10^{-9} \text{ kg})(3{,}16 \times 10^7 \text{ s}) = 1{,}05 \text{ kg.}$$

(c) Cette masse représente une fraction :

$$\Delta m / m = (1{,}05 \text{ kg}) / (1 \times 10^5 \text{ kg}) = 10{,}5 \times 10^{-6}$$

de l'oxyde d'uranium présent.

---

15 L'équivalence entre la masse et l'énergie permet de calculer la différence des masses comme :

$$m = E / c^2 = (1{,}25 \times 10^{-13} \text{ J}) / c^2 = 1{,}39 \times 10^{-30} \text{ kg} = 0{,}837 \times 10^{-3} \text{ uma.}$$

---

17 (a) Dans l'expression de l'énergie totale, le produit $m\,c^2$ représente l'énergie au repos de sorte qu'on peut calculer :

$$E = (938 \times 10^6 \text{ eV}) / [1 - (0{,}9)^2]^{1/2} = 2{,}15 \times 10^9 \text{ eV.}$$

(b) L'énergie cinétique s'obtient par :

$$K = E - E_0 = (2{,}15 \times 10^9 \text{ eV}) - (938 \times 10^6 \text{ eV}) = 1{,}21 \times 10^9 \text{ eV.}$$

---

18 (a) L'énergie totale est la somme de l'énergie au repos et de l'énergie cinétique. Cette dernière énergie est acquise suite à l'application de la différence de potentiel ; elle vaut $K = 12 \times 10^6$ eV. L'énergie totale est donc égale à :

$$E = (0{,}51 \times 10^6 \text{ eV}) + (12 \times 10^6 \text{ eV}) = 12{,}51 \times 10^6 \text{ eV.}$$

(b) Utilisant l'expression de l'énergie totale, on peut calculer la vitesse de l'électron $v = c\,\{1 - [(0{,}51 \times 10^6 \text{ eV}) / (12{,}51 \times 10^6 \text{ eV})]^2\}^{1/2} = 0{,}999\,c$.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

25.5 LE PROBLÈME DES ÉVÉNEMENTS SIMULTANÉS

20 (a) La distance mesurée par le passager du train est réduite du fait de la contraction des longueurs et représente $\ell' = 100$ m. Pour un observateur sur le quai, elle paraît plus longue : $\ell = \ell' \, [1 - u^2/c^2]^{1/2} = 167$ m. (b) Comme l'horloge attachée à la lampe B avance, on observe, sur Terre, que la lampe A s'allume avant B.

25.6 L'ADDITION DES VITESSES

21 On peut considérer que le faisceau sur lequel se trouve l'observateur est fixe et que le laboratoire se déplace vers lui à la vitesse $u = 0{,}8\ c$. Le second faisceau se déplace alors aussi vers l'observateur à la vitesse $v' = 0{,}8\ c$ de sorte que la vitesse relative vaut $v = (v' + u) / [1 + u\, v' / c^2] = (1{,}6\ c) / [1 + (0{,}64)] = 0{,}975\ c$.

22 La vitesse v' de l'objet dans le repère en mouvement ainsi que la vitesse relative u du repère sont égales à $0{,}6\ c$. On calcule donc :

$$\text{(a)} \quad v = (v' + u) / [1 + u\, v' / c^2] = 0{,}822\ c$$

$$\text{et} \quad \text{(b)} \quad v = (-v' + u) / [1 - u\, v' / c^2] = 0 \text{ m s}^{-1}.$$

23 La vitesse relative des deux repères, u, vaut $0{,}6\ c$ tandis que la vitesse de l'objet dans le repère du méson pi en mouvement est égale à $v' = 0{,}507\ c$. Avec ces valeurs, on calcule :

$$v = (v' + u) / [1 + u\, v' / c^2]$$

$$= [(0{,}507\ c) + (0{,}6\ c)] / [1 + (0{,}6\ c)\ (0{,}507\ c) / c^2] = 0{,}849\ c.$$

24 La vitesse relative des deux repères est égale à $u = 0{,}4\ c$ tandis que la vitesse de l'objet considéré est $v' = 0{,}6\ c$. Avec ces valeurs, on calcule :

$$\text{(a)} \quad v = (v' + u) / [1 + u\, v' / c^2] = c / [1 + (0{,}4)\ (0{,}6)] = 0{,}806\ c$$

$$\text{et} \quad \text{(b)} \quad v = (-v' + u) / [1 - u\, v' / c^2] = (-0{,}2\ c) / [1 - (0{,}4)\ (0{,}6)]$$

$$= -0{,}263\ c.$$

SOLUTION DES PROBLÈMES

25 Dans le repère attaché à l'étoile, la distance vaut $\ell = 10$ AL. Dans celui en mouvement relatif par rapport à l'étoile, elle vaut $\ell' = 1$ AL. On peut calculer la vitesse $u = c \, [1 - (\ell' / \ell)^2]^{1/2} = 0{,}995\ c$. (a) L'astronaute mettra un temps :

$$t' = \ell' / u = (1 \text{ an})\ c / [0{,}995\ c] = 1{,}005 \text{ an}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(b) Pour l'observateur terrestre, $t = \ell / u = (10 \text{ ans})\ c / [0{,}995\ c] = 10{,}05$ ans. (c) Ils ont en fait tous les deux raison, chacun dans son propre repère d'axes d'inertie.

---

26 Grâce aux données recueillies dans le repère de la piste, on peut calculer la vitesse du coureur : $u = \ell / t = (100 \text{ m}) / (10 \text{ s}) = 10 \text{ m s}^{-1}$. Comme la montre du coureur ralentit, le temps que le coureur y lit est égal à :

$$t = t' [1 - u^2 / c^2]^{1/2} = (10 \text{ s}) [1 - (10 \text{ m s}^{-1})^2 / (100 \text{ m s}^{-1})^2]^{1/2} = 9{,}95 \text{ s}.$$

---

27 (a) La vitesse relative du bateau par rapport au sol est de :

$$(5 - 3) \text{ km h}^{-1} = 2 \text{ km h}^{-1}$$

de sorte que la remontée du trajet dure :

$$t = D / v = (10 \text{ km}) / (2 \text{ km h}^{-1}) = 5 \text{ heures}.$$

(b) La vitesse relative du bateau par rapport au sol est à présent égale à :

$$(5 + 3) \text{ km h}^{-1} = 8 \text{ km h}^{-1}$$

et la descente prendra donc un temps égal à :

$$t = D / v = (10 \text{ km}) / (8 \text{ km h}^{-1}) = 1{,}25 \text{ heure}.$$

(c) Le trajet aller-retour nécessite un temps égal à (5 + 1,25) heures, soit 6,25 heures. (d) Sur eau stagnante, il faudrait un temps égal à :

$$t = 2\ D / v = 2\ (10 \text{ km}) / (5 \text{ km h}^{-1}) = 4 \text{ heures}.$$

(e) Le voyage en eau stagnante correspond à la situation du miroir immobile (partie (a) de la figure 25.1) tandis que le déplacement dans le courant correspond à la partie (b). Il est bon de remarquer que si l'on mesure le déplacement par rapport à l'eau et non par rapport au sol, la longueur est supérieure à 20 km (distance 2 D de la figure 25.1 (b)) et le temps de parcours est donc aussi plus long.

---

29 Par l'équivalence de la masse et de l'énergie, un mètre carré de la Terre reçoit par seconde, une masse de $m' = E / c^2 = (1 \times 10^3 \text{ J}) / (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})^2$. En un an, la masse reçue sous forme d'énergie est égale à :

$$m = (3{,}15 \times 10^7 \text{ s})\ m' = 3{,}5 \times 10^{-7} \text{ kg}.$$

---

30 (a) La quantité de mouvement s'exprime par $p = m\ v / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ tandis que l'énergie vaut $E = m\ c^2 / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Si on égale les expressions obtenues dans les deux cas pour les racines carrées, on obtient $m\ v / p = m\ c^2 / E$ et nous en tirons l'expression $v = p\ c^2 / E$. (b) L'énergie cinétique s'obtient, à partir de cette expression, sous la forme $K = p\ c^2 / v - m\ c^2$, ou encore :

$$K = m\ c^2\ [1 / (1 - v^2/c^2)^{1/2} - 1].$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Le développement de MacLaurin de cette expression, au premier ordre en $(v/c)^2$ est $K = m\,c^2\,[1 + (1/2)\,(v/c)^2 - 1] = m\,v^2\,/\,2$.

---

31 (a) L'énergie totale est égale à la somme de l'énergie de repos, $E_0 = m\,c^2$, et de l'énergie due à la présence de la différence de potentiel,

$$E_p = (1{,}6 \times 10^{-19})\ (60000\ \text{V}).$$

Le rapport de cette énergie à E_0 donne une valeur de 1,12. (b) Par l'expression relativiste de l'énergie, on calcule

$$v = c\,[1 - (m\,c^2\,/\,E)^2]^{1/2}$$

$$= (3 \times 10^8\ \text{m s}^{-1})\ \{1 - [1\,/\,(1{,}12)]^2\}^{1/2} = 1{,}35 \times 10^8\ \text{m s}^{-1}.$$

(c) La transformation de l'énergie potentielle en énergie cinétique conduit à une vitesse $v = [2\,(1{,}6 \times 10^{-19})\ (60000\ \text{V})\,/\,m]^{1/2} = 1{,}45 \times 10^8\ \text{m s}^{-1}$.

---

32 En remplaçant la quantité de mouvement p par son expression relativiste, en choisissant un dénominateur commun et en le mettant en évidence devant la racine, on obtient la relation suivante :

$$E = [1\,/\,(1 - v^2/c^2)^{1/2}]\ [m^2\,v^2\,c^2 + m^2\,c^4\,(1 - v^2/c^2)]^{1/2},$$

qui, simplifiée, est l'expression relativiste de l'énergie.

---

37 Ici, la vitesse v_x vaut $u = 0{,}8\,c$. La vitesse v_y est donnée par :

$$v_y = (0{,}9\,c)\ [1 - u^2/c^2]^{1/2} = 0{,}54\,c$$

et la grandeur de la vitesse est égale à :

$$v = [v_x^2 + v_y^2]^{1/2} = [(0{,}8\,c)^2 + (0{,}54\,c)^2]^{1/2} = 0{,}965\,c,$$

vitesse inférieure à c.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 26

Propriétés corpusculaires de la lumière : le photon

RAPPELS

Les résultats d'un certain nombre d'expériences ne trouvant pas d'interprétation dans la théorie ondulatoire de la lumière, Max Planck et Albert Einstein ont émis l'hypothèse du comportement corpusculaire de la lumière. Les quanta qui la composent, appelés photons, transportent une quantité finie d'énergie liée à la fréquence f de la lumière par l'expression $E = h f$, où h est la constante de Planck

$$(h = 6{,}625 \times 10^{-34} \text{ J s}).$$

Dans l'effet photo-électrique, un électron ne quitte l'émetteur que si l'énergie du photon absorbé par le métal est supérieure au travail d'extraction W. Si la fréquence est supérieure à une fréquence seuil $f_0 = W / h$, l'énergie excédentaire est communiquée, sous forme d'énergie cinétique, au photo-électron. On peut arrêter ces électrons en les forçant à remonter une différence de potentiel V_0 convenablement orientée. Cette différence de potentiel, pour laquelle le courant s'arrête de circuler, est liée à la vitesse maximale des photo-électrons par l'expression $e\, V_0 = m\, v_{max}^2 / 2$.

D'autres expériences confirment la quantification de l'énergie lumineuse. 1) Une cavité qui présente une petite ouverture se comporte comme un corps noir parfait caractérisé par une émissivité unitaire. Planck a supposé que le rayonnement dans une telle cavité est émis ou absorbé par des oscillateurs atomiques qui possèdent des énergies données par $E = n\, h f$ ($n = 0, 1, 2, ...$) et qui émettent de l'énergie par valeurs quantifiées : $E(n+1) - E(n) = h f$. 2) Dans l'effet Compton, un photon d'énergie $h f$ entre en collision avec un électron au repos, lui communique une énergie de recul E_{el} et est diffusé avec une énergie $h f'$ de sorte que la loi de conservation de l'énergie s'écrive $h f' = h f - E_{el}$. 3) Lorsqu'un faisceau d'électrons accélérés à partir du repos par une différence de potentiel V entre en collision avec une cible, il y a émission de rayons X. Les fréquences de ces rayons vont jusqu'à une fréquence maximum

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

donnée par $h f_{max} = e V$, ce qui ne peut s'expliquer facilement que si l'on admet que l'énergie de l'électron est convertie par production d'un seul photon.

Face à cette dualité onde-corpuscule, on réconcilie les deux aspects en représentant le photon comme un paquet d'énergie auquel est associée une onde. C'est la nature de l'expérience qui indique s'il faut avoir recours à la description ondulatoire ou corpusculaire de la lumière.

SOLUTION DES EXERCICES

26.1 L'EFFET PHOTO-ÉLECTRIQUE

1 Comme $W = h f_0$ est l'énergie minimum nécessaire à l'extraction de l'électron, l'énergie cinétique maximum est égale à $h f - h f_0$. On déduit par conséquent :

$$f_0 = f - m v_{max}^2 / (2 h)$$
$$= (7 \times 10^{14}\ \text{s}^{-1}) - (9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})\,(6 \times 10^{5}\ \text{m s}^{-1})^2 / [2\,(6{,}625 \times 10^{-34}\ \text{J s})]$$
$$= 4{,}52 \times 10^{14}\ \text{Hz}.$$

---

2 Il faut que l'énergie incidente minimale soit égale au travail d'extraction, $h f = W$. Comme $\lambda = c / f$, on calcule :

$$\lambda = c h / W = (3 \times 10^{8}\ \text{m s}^{-1})\,(4{,}135 \times 10^{-15}\ \text{eV s}) / (2{,}3\ \text{eV}) = 539\ \text{nm}.$$

---

3 La fréquence minimale se calcule lorsque l'énergie du photon est égale au travail d'extraction $h f = W$. On détermine alors :

$$f = (6{,}4 \times 10^{-19}\ \text{J}) / (6{,}625 \times 10^{-34}\ \text{J s}) = 9{,}66 \times 10^{14}\ \text{Hz}.$$

---

4 (a) L'énergie des photons incidents est égale à la somme du travail d'extraction et de l'énergie cinétique excédentaire, soit :

$$h f = W + K = (3\ \text{eV}) + (20\ \text{eV}) = 23\ \text{eV}.$$

(b) La fréquence maximale est égale à :

$$f = (23\ \text{eV}) / (4{,}135 \times 10^{-15}\ \text{eV s}) = 5{,}56 \times 10^{15}\ \text{Hz}.$$

---

5 Lorsque la lumière atteint la plaque, des électrons en sont éjectés et la plaque garde alors une charge globale positive. Comme les charges positives se répartissent uniformément sur les feuilles et que des charges de même signe se repoussent, les feuilles finissent par s'écarter.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

26.2 LE PHOTON

6 L'énergie d'un photon est égale à :

$$E = hf = (6{,}625 \times 10^{-34}\ \text{J s})\,(9{,}2 \times 10^{5}\ \text{s}^{-1}) = 6{,}095 \times 10^{-28}\ \text{J}.$$

Si N est le nombre de photons émis par seconde, la puissance totale est égale à $P = N\,E$. On en déduit :

$$N = P / E = (1 \times 10^{4}\ \text{W}) / (6{,}095 \times 10^{-28}\ \text{J}) = 16{,}4 \times 10^{30}\ \text{photons par seconde.}$$

---

7 Connaissant la longueur d'onde, on peut calculer l'énergie du photon par :

$$\begin{aligned} E = hf &= h\,c / \lambda \\ &= (6{,}625 \times 10^{-34}\ \text{J s})\,(3 \times 10^{8}\ \text{m s}^{-1}) / (590 \times 10^{-9}\ \text{m}) \\ &= 3{,}37 \times 10^{-19}\ \text{J}. \end{aligned}$$

Si N est le nombre de photons par unité de surface et par unité de temps, la puissance se calcule par $P = N\,A\,E$ où A est la surface de la sphère qui reçoit le rayonnement. On détermine :

$$\begin{aligned} r &= [P / (N\,4\,\pi\,E)]^{1/2} \\ &= \{(10\ \text{W}) / [(1 \times 10^{15}\ \text{m}^{-2}\ \text{s}^{-1})\,4\,\pi\,(3{,}37 \times 10^{-19}\ \text{J})]\}^{1/2} \\ &= 48{,}6\ \text{m}. \end{aligned}$$

---

8 L'énergie du photon vaut :

$$\begin{aligned} E = hf &= h\,c / \lambda \\ &= (6{,}625 \times 10^{-34}\ \text{J s})\,(3 \times 10^{8}\ \text{m s}^{-1}) / (550 \times 10^{-9}\ \text{m}) \\ &= 3{,}61 \times 10^{-19}\ \text{J}. \end{aligned}$$

Le nombre de photons qui atteignent la Terre par mètre carré, par seconde se calcule par :

$$N = P / E = (1 \times 10^{3}\ \text{W m}^{-2}) / (3{,}61 \times 10^{-19}\ \text{J}) = 2{,}77 \times 10^{21}\ \text{photons m}^{-2}\ \text{s}^{-1}.$$

---

10 Un photon d'énergie hf entrant en collision avec un électron au repos est diffusé avec une énergie hf'. La différence d'énergie est l'énergie de recul de l'électron. Elle vaut :

$$\begin{aligned} E &= h\,(f - f') \\ &= (4{,}135 \times 10^{-15}\ \text{eV s})\,[(2{,}4 \times 10^{20}\ \text{s}^{-1}) - (1{,}6 \times 10^{20}\ \text{s}^{-1})] \\ &= 3{,}31 \times 10^{5}\ \text{eV}. \end{aligned}$$

---

12 (a) Par définition de l'énergie, $E = h\,f$, et celle de la fréquence $f = c / \lambda$, on détermine la valeur de :

$$\begin{aligned} E &= (6{,}625 \times 10^{-34}\ \text{J s})\,(3 \times 10^{8}\ \text{m s}^{-1}) / (500 \times 10^{-9}\ \text{m}) \\ &= 3{,}975 \times 10^{-19}\ \text{J}. \end{aligned}$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(b) Grâce à la relation entre l'énergie et la quantité de mouvement, $E = p\,c$, on calcule :

$$p = E / c = (3{,}975 \times 10^{-19}\ \text{J}) / (3 \times 10^{8}\ \text{m s}^{-1}) = 1{,}325 \times 10^{-27}\ \text{kg m s}^{-1}.$$

---

13 La fréquence du photon est maximum quand l'énergie cinétique de l'électron est convertie en énergie d'un seul photon, soit $h\,f_{max} = e\,V$. On déduit :

$$V = (4{,}135 \times 10^{-15}\ \text{eV s})\,(9{,}5 \times 10^{18}\ \text{s}^{-1}) / (1\,e) = 39{,}3 \times 10^{3}\ \text{V}.$$

---

14 (a) Cette fréquence correspond à la situation où toute l'énergie de l'électron est convertie en énergie d'un photon. On calcule alors :

$$f_{max} = e\,V / h = (1\,e)\,(50000\ \text{V}) / (4{,}135 \times 10^{-15}\ \text{eV s}) = 12{,}1 \times 10^{18}\ \text{Hz}.$$

(b) La longueur d'onde correspondante vaut :

$$\lambda = c / f = (3 \times 10^{8}\ \text{m s}^{-1}) / (12{,}1 \times 10^{18}\ \text{s}^{-1}) = 24{,}8 \times 10^{-12}\ \text{m}.$$

---

15 (a) L'énergie du ressort vaut :

$$E = k\,x^2 / 2 = (16\ \text{N m}^{-1})\,(0{,}01\ \text{m})^2 / 2 = 800 \times 10^{-6}\ \text{J}$$

et correspond à $E = n\,h\,f$. On calcule également la fréquence d'oscillation du ressort par $f = [k / m]^{1/2} / (2\,\pi) = 2 / \pi$. On déduit :

$$n = (800 \times 10^{-6}\ \text{J}) / [(6{,}625 \times 10^{-24}\ \text{J s})\,(2 / \pi)] = 1{,}897 \times 10^{30}.$$

(b) La variation d'énergie $E(n+1) - E(n)$ est égale à $h\,f$; le rapport de la variation d'énergie à celle du ressort vaut :

$$(6{,}625 \times 10^{-24}\ \text{J s})\,(2 / \pi) / (800 \times 10^{-6}\ \text{J}) = 5{,}272 \times 10^{-31}.$$

26.3 PHOTONS ET VISION

16 On peut répartir les 100 bâtonnets sur un carré. 10 bâtonnets s'alignent le long de chaque côté. La longueur d'un côté de ce carré est égale à :

$$\ell = (10)\,(5 \times 10^{-6}\ \text{m}) = 50 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

et la surface vaut $A = \ell^2 = 2{,}5 \times 10^{-9}\ \text{m}^2$.

---

17 (a) L'intensité correspond à une puissance par unité de surface et la puissance est une énergie par unité de temps. On calcule donc l'intensité lumineuse par $I = n\,h\,(c / \lambda) / (t\,A)$ où n est le nombre de photons qui atteignent la pupille de surface A pendant un temps t. Elle vaut :

$$I = (100)\,(6{,}625 \times 10^{-24}\ \text{J s})\,(3 \times 10^{8}\ \text{m s}^{-1}) / [(500 \times 10^{-9}\ \text{m})\,(0{,}2\ \text{s})\,(2{,}5 \times 10^{-9}\ \text{m}^2)]$$

$$= 7{,}95 \times 10^{-8}\ \text{W m}^{-2}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

(b) La source rayonne vers la surface d'une sphère de rayon égal à 2 m. La puissance nécessaire est donc :

$$P = I\,A = I\,4\,\pi\,r^2 = (7{,}95 \times 10^{-8}\ \text{W m}^{-2})\,4\,\pi\,(2\ \text{m})^2 = 4{,}00 \times 10^{-6}\ \text{W}.$$

---

18 (a) La puissance $P = E / t = n\,h\,f / t = n\,h\,c / (\lambda\,t)$ est due à :

$$n / t = P\,\lambda / (h\,c)$$
$$= (1\ \text{W})\,(550 \times 10^{-9}\ \text{m}) / [(6{,}625 \times 10^{-24}\ \text{J s})\,(3 \times 10^{8}\ \text{m s}^{-1})]$$
$$= 2{,}77 \times 10^{18}\ \text{photons par seconde.}$$

(b) La puissance est émise vers une sphère de surface égale à $4\,\pi\,r^2$. Cette distance r doit être égale à :

$$r = [P / (4\,\pi\,I)]^{1/2} = \{(1\ \text{W}) / [4\,\pi\,(1 \times 10^{-7}\ \text{W m}^{-2})]\}^{1/2} = 892\ \text{m}.$$

(c) En développant l'expression de l'intensité, on peut trouver :

$$I = P / A = E / (t\,A) = n\,h\,c / (t\,A\,\lambda)$$

et calculer :

$$n / (t\,A) = (1 \times 10^{-7}\ \text{W m}^{-2})\,(550 \times 10^{-9}\ \text{m})$$
$$/ [(6{,}625 \times 10^{-24}\ \text{J s})\,(3 \times 10^{8}\ \text{m s}^{-1})]$$
$$= 2{,}77 \times 10^{11}\ \text{photons par mètre carré et par seconde.}$$

SOLUTION DES PROBLÈMES

20 (a) Puisque les masses des deux atomes sont identiques, la masse réduite s'évalue à $\mu = m_1 / 2 = (1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg}) / 2 = 0{,}835 \times 10^{-27}\ \text{kg}$. (b) De l'expression de l'énergie de vibration, on déduit la relation qui définit :

$$k = \mu\,[E / h]^2$$
$$= (0{,}835 \times 10^{-27}\ \text{kg})\,[(8{,}74 \times 10^{-20}\ \text{J}) / (6{,}625 \times 10^{-24}\ \text{J s})]^2$$
$$= 14{,}5\ \text{kg s}^{-2}.$$

---

22 (a) La masse réduite vaut :

$$\mu = m_1\,m_2 / (m_1 + m_2)$$
$$= (2{,}67 \times 10^{-26}\ \text{kg})\,(1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg})$$
$$/ [(2{,}67 \times 10^{-26}\ \text{kg}) + (1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg})]$$
$$= 1{,}57 \times 10^{-27}\ \text{kg}.$$

(b) La fréquence d'oscillation se calcule par :

$$f = [k / \mu]^{1/2} / (2\,\pi)$$
$$= [(50{,}5\ \text{N m}^{-1}) / (1{,}57 \times 10^{-27}\ \text{kg})]^{1/2} / (2\,\pi) = 2{,}85 \times 10^{13}\ \text{Hz}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

23 (a) L'énergie minimale nécessaire à l'extraction des électrons est égale au travail d'extraction : $W = h f$. La longueur d'onde correspondante est égale à :

$$\lambda = h c / W$$
$$= (4{,}135 \times 10^{-15} \text{ eV s})\,(3 \times 10^{8} \text{ m s}^{-1}) / (4{,}49 \text{ eV}) = 276 \text{ nm}.$$

(b) L'énergie résiduelle emportée par l'électron est égale à :

$$K = E - W = h c / \lambda - W$$
$$= (4{,}135 \times 10^{-15} \text{ eV s})\,(3 \times 10^{8} \text{ m s}^{-1}) / (250 \times 10^{-9} \text{ m}) - (4{,}49 \text{ eV})$$
$$= 0{,}472 \text{ eV}.$$

(c) Le potentiel d'arrêt se calcule lorsque $e\,V_0 = K$, soit quand $V_0 = 0{,}472$ V.

---

25 (a) L'énergie incidente est égale à $h f$. On calcule donc :

$$f = (1{,}6 \times 10^{-14} \text{ J}) / (6{,}625 \times 10^{-24} \text{ J s}) = 24{,}2 \times 10^{18} \text{ Hz}.$$

(b) Le bilan énergétique de l'effet Compton s'exprime par $h f' = h f - E_{el}$. On détermine donc :

$$f' = f - E_{el} / h$$
$$= (24{,}2 \times 10^{18} \text{ Hz}) - (4000 \text{ eV}) / (4{,}135 \times 10^{-15} \text{ eV s})$$
$$= 23{,}2 \times 10^{18} \text{ Hz}.$$

---

26 (a) L'énergie peut s'exprimer par $E = p\,c$ et l'on détermine :

$$p = E / c = (20000 \text{ eV})\,(1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J eV}^{-1}) / (3 \times 10^{8} \text{ m s}^{-1})$$
$$= 10{,}7 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}.$$

(b) La longueur d'onde est égale à :

$$\lambda = c / f$$
$$= (3 \times 10^{8} \text{ m s}^{-1}) / [(20000 \text{ eV}) / (4{,}135 \times 10^{-15} \text{ eV s})] = 6{,}2 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

---

27 L'énergie de chacun des photons est égale à (135 MeV) / 2 = 67,5 MeV. Comme l'énergie s'exprime par $E = h f = h c / \lambda$, on détermine :

$$\lambda = h c / E$$
$$= (4{,}135 \times 10^{-15} \text{ eV s})\,(3 \times 10^{8} \text{ m s}^{-1}) / (67{,}5 \times 10^{6} \text{ eV})$$
$$= 1{,}84 \times 10^{-14} \text{ m}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 27

Propriétés ondulatoires de la matière

RAPPELS

Les théories classiques conduisent à un modèle instable de la structure atomique de la matière. Tout comme la lumière, la matière présente des aspects corpusculaire et ondulatoire. Les atomes émettent et absorbent de la lumière à des fréquences spécifiques qui obéissent à la relation $1 / \lambda = R_H \, [1/n_f^2 - 1/n_i^2]$ où :

$$n_i = n_f + 1, n_f + 2, \ldots \text{ et } R_H \text{ (constante de Rydberg)} = 1{,}097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

Les raies du domaine visible correspondent à $n_f = 2$, celles de l'ultraviolet à $n_f = 1$ et celles de l'infrarouge à $n_f \geqslant 3$.

L'hypothèse de Louis de Broglie associe une dualité onde-corpuscule à la lumière et à la matière. La relation entre la longueur d'onde associée à une particule et sa quantité de mouvement s'exprime par $\lambda = h / p$. Dans les expériences de diffraction d'électrons, la relation de Bragg, applicable aux rayons X, l'est aussi aux électrons : $m \lambda = 2 d \sin \theta$ où $m = 1, 2, 3 \ldots$ Cette hypothèse constitue l'un des fondements les plus importants de la physique moderne.

Bohr a adopté le modèle atomique de Rutherford : un noyau composé de protons et de neutrons autour duquel gravitent des électrons. Il y a toutefois ajouté que seules quelques orbites atomiques sont possibles; Bohr a postulé en effet que le moment cinétique orbital de l'électron est quantifié :

$$L = r m v = n h / (2 \pi) = n \hbar$$

où $n = 1, 2, 3 \ldots$ est le nombre quantique principal. Ce postulat conduit à la sélection des rayons possibles de rotation de l'électron autour du noyau à la distance :

$$r_n = n^2 a_0 / Z \text{ où } a_0 = \hbar^2 / (k m e^2) = 5{,}29 \times 10^{-11} \text{ m}$$

est le rayon de Bohr. De même, l'énergie totale de l'électron sur une orbite s'exprime par $E_n = - Z^2 E_0 / n^2$ où $E_0 = k e^2 / (2 a_0) = 13{,}6$ eV est l'énergie la plus basse permise

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

pour un électron. L'orbite correspondante est l'état fondamental. Les résultats de Bohr sont corrects pour tout atome à un électron.

Le principe d'incertitude énonce les limites imposées par la nature à la précision des mesures simultanées de la position et de la quantité de mouvement d'un objet : $\Delta x\, \Delta p_x \geqslant \hbar$. Il est impossible de mettre simultanément en évidence, dans une même expérience, les caractères ondulatoire et corpusculaire de la lumière ou de la matière.

SOLUTION DES EXERCICES

27.1 LES ÉCHECS DE LA PHYSIQUE CLASSIQUE

1 L'énergie cinétique initiale de la particule α se transforme en énergie potentielle d'interaction à la distance minimale d'approche. On peut écrire $E = k\, q_{Au}\, q_\alpha / r$ et calculer :

$$r = (9 \times 10^9\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2})\ (79)\ (2)\ (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2 \\ / [(4{,}8 \times 10^6\ \text{eV})\ (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{J eV}^{-1})] \\ = 4{,}74 \times 10^{-14}\ \text{m}.$$

2 Pour calculer cette distance, il suffit d'effectuer une règle de trois : la distance proton-électron est alors égale à :

$$(5{,}3 \times 10^{-11}\ \text{m})\ (0{,}06\ \text{m}) / (0{,}8 \times 10^{-15}\ \text{m}) = 3975\ \text{m}.$$

3 Dans la formule généralisée de Balmer, les raies du domaine visible correspondent à $n_f = 2$. On calcule alors $1/\lambda = R_H\, [1/n_f^2 - 1/n_i^2]$. La longueur d'onde vaut $\lambda = [(1{,}097 \times 10^7\ \text{m}^{-1})\ (1/2^2 - 1/4^2)]^{-1} = 486\ \text{nm}$.

4 Dans la formule généralisée de Balmer, les raies du domaine ultraviolet correspondent à $n_f = 1$. La longueur d'onde vaut :

$$\lambda = [(1{,}097 \times 10^7\ \text{m}^{-1})\ (1/1^2 - 1/2^2)]^{-1} = 122\ \text{nm}.$$

27.2 L'HYPOTHÈSE ONDULATOIRE DE DE BROGLIE

6 Comme l'énergie thermique se transforme en énergie cinétique, on peut écrire $3\, k_B\, T / 2 = m\, v^2 / 2$. En introduisant l'expression de la quantité de mouvement $p = m\, v$, cette relation devient $3\, k_B\, T / 2 = p^2 / (2\, m)$ et l'hypothèse de de Broglie permet de déterminer $\lambda = h / p = h / (3\, m\, k_B\, T)^{1/2}$. Pour l'électron, on calcule :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$\lambda = (6{,}625 \times 10^{-34}\ \text{J s}) / [3\ (9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})\ (1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J K}^{-1})\ (300\ \text{K})]^{1/2}$$
$$= 6{,}23\ \text{nm}$$

et pour le neutron :

$$\lambda = (6{,}625 \times 10^{-34}\ \text{J s}) / [3\ (1{,}675 \times 10^{-27}\ \text{kg})\ (1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J K}^{-1})\ (300\ \text{K})]^{1/2}$$
$$= 0{,}145\ \text{nm}.$$

---

7 La longueur d'onde de de Broglie se calcule par $\lambda = h / p$ où p est la quantité de mouvement de la Terre. Elle se calcule par $p = m\ v = m\ (2\ \pi / T)\ r$. La longueur d'onde vaut donc :

$$\lambda = (6{,}625 \times 10^{-34}\ \text{J s}) / \{(6 \times 10^{24}\ \text{kg})\ [2\ \pi / (31{,}56 \times 10^{6}\ \text{s})]\ (1{,}5 \times 10^{11}\ \text{m})\}$$
$$= 3{,}70 \times 10^{-63}\ \text{m}.$$

---

8 L'énergie de l'atome d'oxygène permet de calculer sa quantité de mouvement $p = (2\ m\ E)^{1/2}$. On calcule alors la longueur d'onde de de Broglie par :

$$\lambda = h / p = (6{,}625 \times 10^{-34}\ \text{J s}) / [2\ (16\ \text{uma})\ (1{,}66 \times 10^{-27}\ \text{kg uma}^{-1})\ (1\ \text{eV})\ (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{J eV}^{-1})]^{1/2}$$
$$= 7{,}19 \times 10^{-12}\ \text{m}.$$

---

10 (a) La quantité de mouvement de de Broglie se calcule par $p = h / \lambda$ et vaut :

$$p = (6{,}625 \times 10^{-34}\ \text{J s}) / (1 \times 10^{-15}\ \text{m}) = 6{,}625 \times 10^{-19}\ \text{kg m s}^{-1}.$$

(b) On détermine l'énergie cinétique par :

$$K = m\ v^2 / 2 = p^2 / (2\ m)$$
$$= (6{,}625 \times 10^{-19}\ \text{kg m s}^{-1})^2 / [2\ (6{,}64 \times 10^{-27}\ \text{kg})]$$
$$= 33{,}05 \times 10^{-12}\ \text{J} = 207\ \text{MeV}.$$

---

11 (a) La formule de Bragg pour $m = 1$ donne :

$$\lambda = 2\ d \sin \theta = 2\ (0{,}12\ \text{nm}) \sin 20^\circ = 0{,}0821\ \text{nm}.$$

(b) L'énergie de ces électrons est égale à :

$$E = p^2 / (2\ m) = h^2 / (2\ m\ \lambda^2)$$
$$= (6{,}625 \times 10^{-34}\ \text{J s})^2 / [2\ (9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})\ (0{,}0821 \times 10^{-9}\ \text{m})^2]$$
$$= 35{,}75 \times 10^{-18}\ \text{J, soit } 223\ \text{eV}.$$

---

12 (a) La vitesse se calcule par :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$v = p / m = h / (m \lambda)$$
$$= (6{,}625 \times 10^{-34} \text{ J s}) / [(1{,}675 \times 10^{-27} \text{ kg})\,(0{,}3 \times 10^{-9} \text{ m})]$$
$$= 1318 \text{ m s}^{-1}.$$

(b) Si le mouvement des neutrons est uniforme, on détermine le temps par :

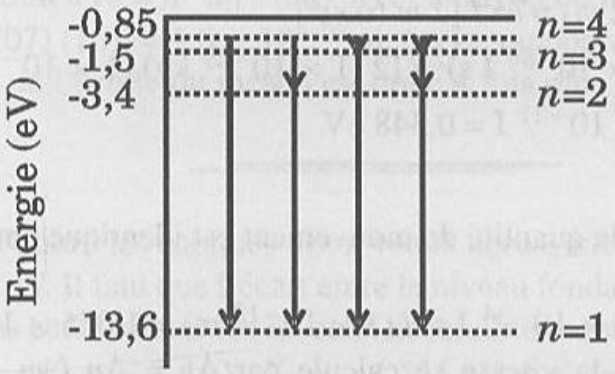
$$t = x / v = (10 \text{ m}) / (1318 \text{ m s}^{-1}) = 7{,}6 \times 10^{-3} \text{ s}.$$

27.3 L'ATOME DE BOHR

14 (a) L'énergie absorbée vaut :

$$\Delta E = E_4 - E_1 = [-E_0/4^2] - [-E_0/1^2] = E_0\,(1 - 1/16) = 12{,}75 \text{ eV}.$$

(b) L'électron peut passer directement du niveau $n = 4$ au niveau $n = 1$, ou du niveau $n = 4$ à $n = 2$, suivi du passage de $n = 2$ à $n = 1$ ou du niveau $n = 4$ à $n = 3$ suivi du passage de $n = 3$ à $n = 1$ ou encore, en trois étapes, de $n = 4$ à $n = 3$, $n = 3$ à $n = 2$ et $n = 2$ à $n = 1$ (graphe ci-dessous). (c) L'énergie du photon le plus énergétique est de 12,75 eV. La longueur d'onde associée se calcule par $\lambda = h\,c / E = (4{,}135 \times 10^{-15} \text{ eV s})\,(3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}) / (12{,}75 \text{ eV}) = 97{,}3 \text{ nm}$.



16 Le rayon de l'orbite est égal à $r_3 = (3)^2\,(5{,}29 \times 10^{-11} \text{ m}) = 4{,}761 \times 10^{-10} \text{ m}$. La longueur de l'orbite vaut alors $\ell = 2\,\pi\,r_3 = 2{,}99 \times 10^{-9} \text{ m}$. La quantification de l'énergie de l'électron permet de calculer $E_3 = E_0 / 3^2 = 1{,}51 \text{ eV}$. On détermine ensuite, en utilisant l'expression $E = p^2 / (2\,m) = h^2 / (2\,\text{m}\,\lambda^2)$ la valeur de la longueur d'onde par :

$$\lambda = h / (2\,m\,E)^{1/2}$$
$$= (6{,}625 \times 10^{-34} \text{ J s}) / [2\,(9{,}11 \times 10^{-31} \text{ kg})\,(1{,}51 \text{ eV})\,(1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J eV}^{-1})]^{1/2}$$
$$= 99{,}8 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

On détermine alors n, le rapport de la longueur de l'orbite à la longueur d'onde :

$$n = (2{,}99 \times 10^{-9} \text{ m}) / (99{,}8 \times 10^{-11} \text{ m}) = 3.$$

17 L'énergie du photon $h\,f$ est égale à $E_{n,i} - E_{n,f}$. On peut écrire :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$2{,}55 \text{ eV} = E_0 \, (1/n^2 - 1/4^2)$$

et calculer $n = [(2{,}55 \text{ eV}) / E_0 + 1/16]^{-1/2} = 2$.

18 L'énergie du photon absorbé vaut $hf = E_4 - E_2 = E_0 \, (1/4 - 1/16) = 2{,}55$ eV. On détermine sa fréquence $f = (2{,}55 \text{ eV}) / (4{,}135 \times 10^{-15} \text{ eV s}) = 6{,}17 \times 10^{14}$ Hz.

27.4 LE PRINCIPE D'INCERTITUDE

19 En invoquant le principe d'incertitude, on trouve :

$$\Delta x \geqslant \hbar / (m \, \Delta v) = (1{,}055 \times 10^{-34} \text{ J s}) / [(0{,}1 \text{ kg}) \, (0{,}003 \text{ m s}^{-1})]$$
$$= 3{,}52 \times 10^{-31} \text{ m}.$$

20 La quantité de mouvement minimale s'obtient lorsqu'on considère le cas limite d'égalité dans le principe d'incertitude. L'énergie cinétique minimale est égale à :

$$E = p_{min}^2 / (2 \, m) = \hbar^2 / [2 \, m \, (\Delta x)^2]$$
$$= (1{,}055 \times 10^{-34} \text{ J s})^2 / [2 \, (1 \times 10^{-29} \text{ kg}) \, (1 \times 10^{-10} \text{ m})^2]$$
$$= 527{,}5 \times 10^{-21} \text{ J} = 0{,}348 \text{ eV}.$$

21 (a) L'incertitude sur la quantité de mouvement est identique dans les deux cas ; elle vaut :

$\Delta p = \hbar / \Delta x = (1{,}055 \times 10^{-34} \text{ J s}) / (1 \times 10^{-10} \text{ m}) = 1{,}055 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}$.

(b) L'incertitude sur la vitesse se calcule par $\Delta v = \Delta p / m$. Dans le cas de l'électron, elle vaut :

$\Delta v = (1{,}055 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}) / (9{,}11 \times 10^{-31} \text{ kg}) = 1{,}16 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$

tandis que pour la pierre, elle vaut :

$\Delta v = (1{,}055 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}) / (0{,}2 \text{ kg}) = 5{,}275 \times 10^{-24} \text{ m s}^{-1}$.

SOLUTION DES PROBLÈMES

22 Le nombre quantique principal n se calcule par $n = r \, m \, v / \hbar$ où v est égal au produit de la vitesse angulaire et du rayon de l'orbite $\omega \, r$. On détermine donc :

$$n = (1{,}50 \times 10^{11} \text{ m})^2 \, (5{,}98 \times 10^{24} \text{ kg}) \, 2 \, \pi$$
$$/ \, [(1{,}055 \times 10^{-34} \text{ J s}) \, (365{,}25 \text{ jours}) \, (86400 \text{ s jour}^{-1})]$$
$$= 254 \times 10^{72}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

23 (a) En développant l'expression de l'énergie, on trouve :

$$E_n = - [(k Z^2 e^2) / (2 n^2)] [k m e^2 / \hbar^2].$$

Dans le cas du positronium, la masse de la particule est la moitié de celle de l'électron :

$$E_n = - [(k Z^2 e^2) / (2 n^2)] [k (m_e / 2) e^2 / \hbar^2]$$

$$= - (k Z^2 e^2) / (2 n^2 2 a_0) = - Z^2 E_0 / (2 n^2).$$

L'énergie de liaison de l'état fondamental vaut $E_1 = - E_0 / 2 = - 6{,}8$ eV. (b) Du développement du rayon de l'orbite, on déduit l'expression $r_n = 2 n^2 a_0 / Z$ et le rayon de l'orbite fondamentale vaut $r_1 = 2 a_0 = 1{,}06 \times 10^{-10}$ m.

---

25 (a) Le développement de l'expression de l'énergie donne la relation :

$$E_n = - [(k Z^2 e^2) / (2 n^2)] [k m e^2 / \hbar^2].$$

Comme la masse de la particule est 207 fois celle de l'électron, on trouve (même développement que l'exercice 27-23) $E_n = - 207 Z^2 E_0 / n^2$. Pour $n = 1$ et $Z = 16$, on calcule $E_1 = 7{,}21 \times 10^5$ eV. (b) Le développement de l'expression de l'orbite conduit à $r_n = n^2 a_0 / (207 Z)$ et le rayon de l'orbite fondamentale vaut $r_1 = a_0 / [(207) (16)] = 1{,}6 \times 10^{-14}$ m. (c) Le rapport des deux rayons est égal à 4. Le rayon de l'orbite du méson est donc 4 fois plus grand que celui du noyau de soufre.

---

27 Calculons d'abord les énergies des niveaux accessibles avec une énergie photonique de 13 eV. Il faut que l'écart entre le niveau fondamental et le niveau excité n'excède pas cette valeur; les niveaux accessibles sont :

$$E_2 = - 3{,}4 \text{ eV}, E_3 = - 1{,}511 \text{ eV et } E_4 = - 0{,}85 \text{ eV}.$$

Lors du retour à l'état fondamental à partir de E_2, l'énergie du photon émis est égale à $E_2 - E_1 = 10{,}2$ eV. Le passage de E_3 à E_1 peut se faire directement ou via E_2. Dans le premier cas, le photon émis a une énergie égale à $E_3 - E_1 = 12{,}1$ eV alors que dans le second cas, elles valent $E_3 - E_2 = 1{,}89$ eV et $E_2 - E_1$ (déjà calculée). La désexcitation à partir du niveau $n = 4$ peut également se faire en différentes étapes. Une première consiste en un passage direct de $n = 4$ à $n = 1$: l'énergie du photon émis est égale à $E_4 - E_1 = 12{,}75$ eV, une seconde en passant des niveaux E_4 à E_3 suivie de E_3 à E_1 : les photons émis ont des énergies égales à $E_4 - E_3 = 0{,}661$ eV et $E_3 - E_1$. Une troisième possibilité consiste à passer de E_4 à E_3, de E_3 à E_2 et de E_2 à E_1. La dernière peut se faire en passant de E_4 à E_2 suivie de E_2 à E_1; l'énergie du premier photon est égale à $E_4 - E_2 = 2{,}55$ eV, les autres ont déjà été calculées.

---

30 (a) L'énergie cinétique du photon émis est donnée par $E_n = n^2 \hbar^2 / (2 I)$ (exercice 27-29) et vaut donc :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$E_2 = (2^2)\ (1{,}055 \times 10^{-34}\ \text{J s})^2 / [2\ (1{,}92 \times 10^{-46}\ \text{kg m}^2)]$$
$$= 1{,}16 \times 10^{-22}\ \text{J} = 0{,}725\ \text{meV}.$$

(b) Comme l'énergie du photon s'exprime aussi par $h f$, on calcule la fréquence par $f = E_2 / h = (0{,}725 \times 10^{-3}\ \text{eV}) / (4{,}135 \times 10^{-15}\ \text{eV s}) = 1{,}75 \times 10^{11}$ Hz.

---

31 L'écart entre le niveau fondamental et le niveau excité ne doit pas excéder 12,5 eV ; les niveaux accessibles sont $E_2 = -3{,}4$ eV et $E_3 = -1{,}511$ eV. L'énergie du photon émis lors de la désexcitation de E_2 vers E_1 est égale à $E_2 - E_1 = 10{,}2$ eV, celle des photons émis lors du passage de E_3 vers E_1 vaut $E_3 - E_1 = 12{,}1$ eV alors que le passage de E_3 vers E_1 via E_2 génère un photon d'énergie égale à $E_3 - E_2 = 1{,}89$ eV et un autre d'énergie $E_2 - E_1$.

---

33 L'énergie de l'électron est égale à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle : $E = K + U = [p^2 / (2\ m)] - [k\ e^2 / r]$ où $r = a_0 + \varepsilon$. En utilisant le principe d'incertitude, $p_{min} = \Delta p = \hbar / r$, l'énergie devient $E = \hbar^2 / [2\ m\ (a_0 + \varepsilon)^2] - k\ e^2 / (a_0 + \varepsilon)$. L'énergie est minimale lorsque sa dérivée par rapport à ε s'annule. On calcule donc $dE / d\varepsilon = 0$, soit :

$$-\hbar^2 + k\ m\ e^2\ a_0 + k\ m\ e^2\ \varepsilon = 0.$$

En remplaçant a_0 par son expression, on obtient finalement $k\ m\ e^2\ \varepsilon = 0$, soit $\varepsilon = 0$.

---

34 (a) Par le principe d'incertitude, on peut calculer l'énergie cinétique :

$$K = p^2 / (2\ m) = \hbar^2 / (2\ m\ r^2)$$

quand on utilise $p_{min} = \Delta p$. Pour un électron, on calcule :

$$K = (1{,}055 \times 10^{-34}\ \text{J s})^2 / [2\ (9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})\ (1 \times 10^{-14}\ \text{m})^2]$$
$$= 61{,}1 \times 10^{-12}\ \text{J} = 382\ \text{MeV}.$$

(b) Pour le neutron, l'expression conduit à l'énergie cinétique :

$$K = (1{,}055 \times 10^{-34}\ \text{J s})^2 / [2\ (1{,}675 \times 10^{-27}\ \text{kg})\ (1 \times 10^{-14}\ \text{m})^2]$$
$$= 33{,}2 \times 10^{-15}\ \text{J} = 0{,}208\ \text{MeV},$$

énergie de l'ordre de la différence entre les niveaux d'énergie nucléaire.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre **28**

Mécanique quantique et structure atomique

RAPPELS

Du fait de la dualité onde-corpuscule qui intervient dans la description de la matière, il apparaît que pour tout phénomène ondulatoire classique, il existe une équation dont les solutions décrivent chaque état ondulatoire possible par une fonction d'onde spécifique. La définition complète d'un état requiert différents nombres quantiques : le nombre quantique principal n qui, dans l'atome d'hydrogène, détermine les niveaux d'énergie $E_n = - Z^2 E_0 / n^2$, le nombre quantique orbital ℓ qui définit le moment cinétique orbital $L = [\ell (\ell + 1)]^{1/2} \hbar$ où $\ell = 0, 1, 2, \ldots n-1$, le nombre quantique magnétique m_ℓ qui sélectionne les moments cinétiques possibles par $L_z = m_\ell \hbar$ où $m_\ell = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell$. Les niveaux d'énergie qui en résultent dans un champ magnétique sont donnés pas :

$$E_{m_\ell,\ell} = - \mu_z B = - [- e / (2 m)] m_\ell \hbar B = m_\ell e \hbar B / (2 m).$$

Le quatrième nombre quantique est le nombre quantique de spin s, associé au moment cinétique intrinsèque de l'électron, qui détermine le moment angulaire de spin :

$$S = [s (s+1)]^{1/2} \hbar$$

où $s = 1/2$ pour les protons, électrons et neutrons et $s = 1$ pour les photons. La composante S_z du moment angulaire de spin s'écrit $m_s \hbar$ où $m_s = \pm 1/2$.

Le principe d'exclusion de Pauli exprime que l'on ne peut trouver plus d'un électron dans un état défini par les mêmes nombres quantiques alors que les particules indiscernables de spin zéro ou un peuvent être placées dans n'importe quel état quantique, occupé ou non. Le modèle de structure électronique en couches place les électrons dans des états de même énergie disposés en couches par rapport au niveau fondamental.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

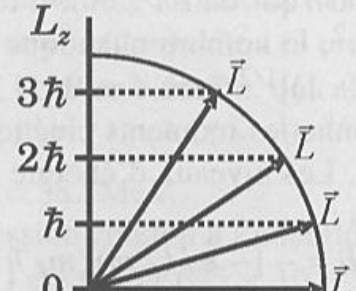
Lors de l'émission ou de l'absorption d'un photon par un atome, les électrons changent d'état d'énergie tout en conservant le moment angulaire total de l'atome et du photon. En général, le moment angulaire orbital de l'électron qui absorbe ou émet le photon change d'une unité lors de la transition.

SOLUTION DES EXERCICES

28.1 LES NOMBRES QUANTIQUES DE L'ATOME D'HYDROGÈNE

1 (a) Les valeurs du nombre quantique orbital s'étagent entre 0 et $n - 1$. Les différentes grandeurs possibles, quand $n = 4$, sont donc 0, 1, 2 et 3. (b) La notation spectroscopique de l'état $n = 4$, $\ell = 0$ est 4 *s*. Celle de l'état $n = 4$, $\ell = 1$ est 4 *p*, celle de l'état $n = 4$, $\ell = 2$ est 4 *d* et celle de $n = 4$, $\ell = 3$ est 4 *f*. (c) Le nombre quantique magnétique varie de $-\ell$ à $+\ell$ et dans chaque cas, sa valeur maximale est 0, 1, 2 et 3. La grandeur maximale de L_z est donc, respectivement, $0, \hbar, 2\hbar$ et $3\hbar$.

2 La valeur du moment cinétique est égale à $L = [\ell\ (\ell + 1)]^{1/2}\ \hbar = \sqrt{12}\ \hbar$. La projection L_z du moment cinétique peut prendre les valeurs $L_z = m_\ell\ \hbar$ où m_ℓ varie de -3 à $+3$.



3 (a) Les niveaux d'énergie dans un champ magnétique sont donnés par :

$$E_{m,\ell} = m_\ell\ e\hbar\ B\ /\ (2\ m).$$

Lorsque $\ell = 2$, le nombre quantique magnétique varie entre -2 et $+2$. Les différents niveaux sont donc, pour $m_\ell = \pm 2$, $E_{\pm 2} = \pm\ e\hbar\ B\ /\ m$, pour $m_\ell = \pm 1$,

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

$E_{\pm 1} = \pm e\hbar B / (2m)$ et pour $m_\ell = 0$, l'énergie E_0 est nulle. (b) La différence d'énergie est donnée par :

$$\Delta E = E_1 - E_0 = e\hbar B / (2m) = 92{,}645 \times 10^{-24} \text{ J} = 5{,}79 \times 10^{-4} \text{ eV}.$$

(c) Sachant que le niveau $m_\ell = 1$ est plus énergétique que le niveau $m_\ell = 0$, il faut que l'électron absorbe le photon.

---

4 Le moment magnétique de spin est égal à $m_s = +1/2$ pour le spin up et $-1/2$ pour le spin down. La différence d'énergie se calcule par $\Delta E = 2U = 4\,\mu_B B\, m_s$ et vaut $4\,(0{,}93 \times 10^{-23}\text{ A m}^2)\,(1\text{ T})\,(1/2) = 18{,}6 \times 10^{-24}\text{ J} = 1{,}16 \times 10^{-4}\text{ eV}$.

---

5 Le nombre quantique orbital peut prendre 4 valeurs : $\ell = 0$, 1, 2 et 3.

$\ell = 0$	$m_\ell = 0$	$m_s = \pm 1/2$
$\ell = 1$	$m_\ell = -1, 0, +1$	$m_s = \pm 1/2$ pour chaque m_ℓ
$\ell = 2$	$m_\ell = -2, -1, 0, +1, +2$	$m_s = \pm 1/2$pour chaque m_ℓ
$\ell = 3$	$m_\ell = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$	$m_s = \pm 1/2$ pour chaque m_ℓ

On calcule donc le nombre total d'états quantiques : il vaut 32.

---

6 Le même raisonnement que celui conduit à l'exercice 28-5 donne (a) 2 états, (b) 6 états et (c) 10 états.

28.2 STRUCTURE ATOMIQUE ET TABLEAU PÉRIODIQUE

7 La caractéristique commune aux trois atomes est qu'ils possèdent un électron isolé sur une couche *s* externe.

---

8 Lorsque les nombres quantiques n et ℓ valent 4 et 3 respectivement, en tenant compte du nombre quantique de spin, le nombre d'états quantiques est égal à 14 puisque le nombre quantique magnétique peut prendre 7 valeurs entre -3 et $+3$.

---

9 Le second électron à enlever se trouve sur la couche fermée 1 *s* la plus proche du noyau. Chaque électron a la même probabilité de se trouver près du noyau de sorte que chaque électron écrante le noyau pendant la moitié du temps. Le noyau est donc perçu comme une charge $Z = 3$ pendant une partie du temps et comme $Z = 2$ pendant l'autre partie. La charge effective du noyau est donc égale à $(3+2) / 2 = 2{,}5$. Pour les deux électrons dans l'état 1 *s*, on trouve donc une énergie totale égale à $E = -2\,Z_{eff}^2\,E_0 / n^2 = -2\,(2{,}5)^2\,(13{,}6\text{ eV}) / 1^2 = 170\text{ eV}$ alors que si le second électron est enlevé, le dernier voit le noyau comme une charge égale à $Z = 3$ et son énergie vaut :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$E = - Z^2 E_0 / n^2 = - (3)^2 (13{,}6 \text{ eV}) / 1^2 = 122 \text{ eV}.$$

La différence d'énergie est égale à 48 eV.

---

10 Dans les deux situations, la charge effective du noyau est égale à :

$$Z_{eff} = (2+1) / 2 = 1{,}5.$$

L'énergie de l'électron lorsque l'atome n'est pas excité se calcule par :

$$E_1 = - (1{,}5)^2 (13{,}6 \text{ eV}) / 1^2 = - 30{,}6 \text{ eV}.$$

L'énergie de ce même électron, localisé sur la couche $n = 2$ quand l'atome est excité, vaut $E_2 = - (1{,}5)^2 (13{,}6 \text{ eV}) / 2^2 = - 7{,}65$ eV. L'énergie la plus basse est E_1 ; elle correspond à un état plus proche du noyau et donc plus stable.

---

13 L'hydrogène présente un seul électron sur sa couche 1 *s* alors qu'il en manque un pour fermer la couche externe des atomes halogènes. L'électron de l'hydrogène sert donc à fermer cette couche.

---

14 (a) Le calcul de la valeur du dédoublement en énergie donne, par la formule non perturbée, $\Delta U_1 = 186 \times 10^{-24}$ J alors que la formule perturbée donne une valeur $\Delta U_2 = 186{,}22 \times 10^{-24}$ J. (b) La différence entre ces deux valeurs équivaut à $(\Delta U_2 - \Delta U_1) / \Delta U_1 = 1{,}162 \times 10^{-3}$, soit 0,116 % de la valeur non perturbée.

---

15 Les onze électrons du sodium permettent de fermer la couche $n = 1$, $\ell = 0$ avec 2 électrons ainsi que les couches $n = 2$, $\ell = 0$ et $n = 2$, $\ell = 1$ par 8 électrons. Le dernier électron occupe le niveau $n = 3$, $\ell = 0$, $m_\ell = 0$, $s = 1/2$ et $m_s = \pm 1/2$.

28.3 EMISSION ATOMIQUE ET SPECTRES D'ABSORPTION

17 Le photon émis a une énergie égale à la différence d'énergie entre les niveaux occupés par l'électron. Elle vaut $\Delta E = (13{,}6 \text{ eV}) [(3{,}1)^2 - (1{,}5)^2] / 3^2 = 11{,}1$ eV.

---

18 (a) Un électron de la couche 1 *s* voit, la moitié du temps, le noyau comme une charge $Z = 29$ et pendant l'autre partie du temps, comme une charge écrantée par le second électron de la couche, soit comme $Z = 28$. La charge effective du noyau pour un électron 1 *s* peut donc s'évaluer à $Z_{eff(1\,s)} = (28+29) / 2 = 28{,}5$. Un électron de la couche 2 *p* est à un niveau d'énergie supérieure aux couches 1 *s* et 2 *s*, occupées toutes les deux par deux électrons. Les électrons de la couche 2 *p* voient donc une charge résiduelle du noyau égale à $Z = 25$. Pour un électron particulier, la charge effective du noyau peut être écrantée partiellement par les autres électrons, et très grossièrement, on peut compter que pendant un sixième

du temps, la charge effective est égale à $Z = 25$, pendant une autre fraction du temps, $Z = 24$ et ainsi de suite jusqu'au dernier sixième du temps où $Z = 20$. On peut donc évaluer la charge effective du noyau pour un électron 2 *p* à :

$$[(25) + (24) + (23) + (22) + (21) + (20)] / 6 = 22{,}5.$$

(b) L'énergie de l'état 2 *p* est égale à :

$$E_2 = - Z_{eff}^2 E_0 / n^2 = - (22{,}5)^2 (13{,}6 \text{ eV}) / 2^2 = - 1{,}72 \times 10^3 \text{ eV}$$

tandis que l'énergie de l'électron 1 *s* vaut :

$$E_1 = - (28{,}5)^2 (13{,}6 \text{ eV}) / 1^2 = - 11{,}05 \times 10^3 \text{ eV}.$$

On calcule alors la différence des énergies emportée par les rayons X, par $E_2 - E_1 = 9{,}33 \times 10^3$ eV. On détermine la longueur d'onde des rayons X par :

$$\lambda = h c / E$$
$$= (6{,}625 \times 10^{-34} \text{ J s}) (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}) / [(9{,}33 \times 10^3 \text{ eV}) (1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J eV}^{-1})]$$
$$= 1{,}33 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

28.4 MASERS ET LASERS

19 Le diamètre de la tache est la longueur de l'arc de cercle :

$$r \theta = (3{,}8 \times 10^5 \text{ km}) (1 \times 10^{-5} \text{ rad}) = 3{,}8 \text{ km}.$$

---

20 (a) Suivant la définition de la puissance, on détermine :

$$P = E / t = (10 \text{ J}) / (5 \times 10^{-11} \text{ s}) = 2 \times 10^{11} \text{ W}.$$

(b) L'intensité est la puissance par unité de surface irradiée :

$$I = (2 \times 10^{11} \text{ W}) / (2 \times 10^{-6} \text{ m}^2) = 2 \times 10^{17} \text{ W m}^{-2}.$$

---

21 La longueur d'onde est liée à la période *T* de l'onde sinusoïdale par la relation $\lambda = c T = (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}) (1 \times 10^{-11} \text{ s}) = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$.

SOLUTION DES PROBLÈMES

23 (a) Chaque électron 1 *s* voit une charge nucléaire $Z = 7$ ou, quand la charge est écrantée, $Z = 6$. La charge effective est donc égale à $Z_{eff} = 6{,}5$. Lorsque les deux électrons sont présents sur la couche 1 *s*, l'énergie totale vaut :

$$E_1 = - 2 (6{,}5)^2 (13{,}6 \text{ eV}) / 1^2 = - 1149 \text{ eV},$$

alors que si on enlève un électron, la particule restante voit une charge nucléaire $Z = 7$ et son énergie est égale à :

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

$$E_2 = -(7)^2\,(13{,}6\text{ eV}) / 1^2 = -666\text{ eV}.$$

La différence des deux énergies est l'énergie nécessaire pour extraire un électron; elle vaut $E_2 - E_1 = 483$ eV. (b) A cause de la répulsion des deux électrons, l'effet d'écran est réduit et la charge effective est plus grande que $Z_{eff} = 6{,}5$. L'énergie E_1 est donc plus élevée et la différence $E_2 - E_1$ aussi, rejoignant les 540 eV mesurés. (c) Les électrons 2 *s* sont parfois très proches du noyau et par conséquent, l'écrantage du noyau pour les électrons 1 *s* peut être plus important; la charge effective s'en trouve donc réduite et l'énergie de l'état 1 *s* aussi.

---

24 (a) L'électron 2 *s* isolé a une énergie E_1 égale à 18,12 eV. La charge effective du noyau pour cet électron vaut donc $Z_{eff} = [E_1\ 2^2 / E_0]^{1/2} = 2{,}3$. (b) Comme l'énergie d'ionisation du premier électron est égale à 9,32 eV, on peut calculer l'énergie de l'état 2 *s* occupé par les deux électrons par :

$$E_2 = (18{,}12\text{ eV}) + (9{,}32\text{ eV}) = 27{,}44\text{ eV}$$

et déterminer :

$$Z_{eff} = \{n^2\,E_2 / [2\,E_0]\}^{1/2} = \{(2)^2\,(27{,}44\text{ eV}) / [2\,(13{,}6\text{ eV})]\}^{1/2} = 2.$$

---

25 (a) L'énergie totale des cinq électrons vaut :

$$E_1 = -5\,Z_{eff}^2\,E_0 / n^2 = -5\,(4)^2\,(13{,}6\text{ eV}) / (2)^2 = -272\text{ eV}.$$

(b) L'énergie des six électrons est égale à la somme de l'énergie des cinq électrons et de l'énergie d'ionisation, soit :

$$E_2 = (272\text{ eV}) + (21{,}56\text{ eV}) = 293{,}56\text{ eV}.$$

On calcule alors la charge effective qui y correspond :

$$Z_{eff} = [n^2\,E_2 / (6\,E_0)]^{1/2} = \{(2)^2\,(293{,}56\text{ eV}) / [6\,(13{,}6\text{ eV})]\}^{1/2} = 3{,}79.$$

Chapitre 29

La structure atomique de la matière

RAPPELS

Différents mécanismes assurent la cohésion d'un matériau. La liaison ionique se forme lorsqu'il y a transfert complet d'un électron d'un atome à un autre. Cette opération nécessite l'apport de l'énergie d'ionisation pour arracher l'électron et libère l'énergie de formation lors de la capture de l'électron par le second atome. L'énergie finale de la molécule est égale à la différence entre ces deux énergies augmentée de l'énergie potentielle électrostatique entre les deux ions formés.

La mise en commun des électrons périphériques constitue un autre mécanisme de liaison, la liaison covalente. La distribution des électrons dans la molécule covalente peut être très différente de la distribution des électrons dans les atomes constitutifs isolés. Le carré du module de la fonction d'onde donne la probabilité par unité de volume de trouver un électron en un point r et lorsque les atomes se combinent, le principe d'exclusion de Pauli n'autorise l'occupation d'un état orbital que par au plus deux électrons de spins différents. La liaison covalente peut être décrite à partir du phénomène d'hybridation par lequel des fonctions d'onde atomiques se combinent pour former des hybrides.

La liaison métallique assure la cohésion d'un agrégat comportant un grand nombre d'atomes. Les électrons d'un métal sont complètement délocalisés et assurent la conductivité du matériau. Dans les semi-conducteurs, les électrons restent liés au réseau mais un apport d'énergie peut permettre à un électron de quitter la bande de valence et, pour autant que son énergie soit au moins égale à la largeur de la bande interdite, d'atteindre la bande de conduction et de se mouvoir dans l'échantillon.

La liaison de Van der Waals résulte de l'attraction des moments dipolaires induits ou permanents des molécules et est responsable de la cohésion des liquides et des solides. La liaison hydrogène se produit lorsqu'un électron, déjà engagé dans une liaison covalente, est attiré par un autre atome et forme un pont entre ces deux particules.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

La Résonance Magnétique Nucléaire (RMN) permet d'étudier la structure des molécules en exploitant la propriété que présentent les noyaux de se comporter comme des dipôles magnétiques dans un champ d'induction appliqué. Rappelons que l'énergie d'un dipôle faisant un angle θ avec la direction du champ magnétique $\mathbf{B}_T$ est $U = -\mu B_T \cos\theta$ et que toute particule élémentaire comme le proton possède un moment dipolaire μ associé au moment angulaire de spin $\mathbf{S}$ par $\mu = 2{,}79\, e\, \mathbf{S} / m_p$. L'énergie potentielle du proton s'exprime par $U = \pm 2{,}79\, \mu_N B_T$ où μ_N est le magnéton nucléaire $\mu_N = e\hbar / (2 m_p) = 5{,}05 \times 10^{-27}$ A m^2. Dans un champ magnétique, le moment angulaire du proton subit un couple τ donné par $\tau = \mu \times \mathbf{B}_T$. Ce couple provoque un mouvement de précession du moment angulaire autour de $\mathbf{B}_T$ avec une fréquence donnée par $f_p = 0{,}444\, e\, B_T / m_p$. Dans l'expérience de RMN, les moments angulaires des protons de l'échantillon précessionnent à la fréquence f_p autour du champ total $\mathbf{B}_T$ existant au niveau de l'échantillon. Un proton libre précessionne, lui, à une fréquence f_e dans le champ extérieur $\mathbf{B}_e$ et la différence entre les deux fréquences est donnée par $\Delta f = f_p - f_e = 0{,}444\, e\, (B_T - B_e) / m_p$.

SOLUTION DES EXERCICES

29.1 LA LIAISON IONIQUE

1 (a) L'énergie requise pour transférer l'électron est la différence entre les énergies d'ionisation et de formation, soit $E = (5{,}12\text{ eV}) - (3{,}82\text{ eV}) = 1{,}3$ eV. (b) L'énergie potentielle électrostatique de la molécule est donnée par :

$$E = -k e^2 / r_0$$
$$= -(9{,}0 \times 10^9\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2})(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2 / (2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m})$$
$$= -9{,}76 \times 10^{-19}\ \text{J} = -6{,}1\ \text{eV}.$$

(c) L'énergie totale de la molécule est égale à $(-6{,}1\text{ eV}) + (1{,}3\text{ eV}) = -4{,}8$ eV. Il faut fournir cette quantité d'énergie pour diviser la molécule en deux atomes neutres.

---

2 (a) L'énergie potentielle est due à l'attraction entre les ions ; elle est égale à :

$$E = -k e^2 / r_0$$
$$= -(9{,}0 \times 10^9\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2})(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2 / (1{,}51 \times 10^{-10}\ \text{m})$$
$$= -1{,}53 \times 10^{-18}\ \text{J} = -9{,}54\ \text{eV}.$$

(b) L'énergie de cohésion est égale à la somme de l'énergie potentielle électrostatique et de la différence entre les énergies d'ionisation et de formation; elle vaut $E = (-9{,}54\text{ eV}) + (5{,}39\text{ eV}) - (3{,}51\text{ eV}) = -7{,}66$ eV.

---

3 (a) L'énergie potentielle résulte de l'interaction entre les ions et vaut :

$$E = - k\, e^2 / r_0 = - 5{,}76 \text{ eV}.$$

(b) L'énergie de formation se calcule par $E_{ionisation} + E_{potentielle} - E_{totale}$ et vaut (5,12 eV) + (– 5,76 eV) – (– 3,77 eV) = 3,13 eV.

29.2 LA LIAISON COVALENTE

4 L'atome de magnésium a deux électrons de valence dans un état 3 *s*. Il manque par contre un électron au chlore pour fermer la couche 3 *p*. Comme les fonctions d'onde 3 *s* du Mg présentent une symétrie sphérique, leur recouvrement avec la fonction d'onde 3 *p* du Cl est peu important. Si l'on combine une orbitale *p* et une orbitale *s* du Mg, le résultat est une paire d'orbitales *sp* qui présentent un lobe important dans une direction et un autre plus petit dans la direction opposée. Les deux électrons de valence du Mg occupent deux états qui recouvrent les régions correspondant à l'état vacant de chaque atome de Cl. La molécule $MgCl_2$ est donc une molécule linéaire avec un atome de Mg entre deux atomes de Cl.

---

5 Non, la molécule est symétrique. Il ne peut y avoir de charge nette positive sur un atome et une charge négative équivalente sur l'autre.

---

6 L'énergie potentielle se calcule par $U = - 2\, k\, e^2 / r$ et vaut :

$$U = - 2\,(9{,}0 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2})\,(1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C})^2 / (0{,}53 \times 10^{-10} \text{ m})$$
$$= - 8{,}69 \times 10^{-18} \text{ J} = - 54{,}3 \text{ eV}.$$

29.3 LA LIAISON MÉTALLIQUE

9 (a) La bande se remplit complètement. (b) Dans une bande partiellement remplie, les électrons peuvent changer facilement de niveau d'énergie et de tels matériaux sont de bons conducteurs électriques et thermiques. Dans le cas où les bandes sont remplies, les électrons sont incapables de changer d'état et la conduction est faible. De tels matériaux sont isolants ou semi-conducteurs et constituent de mauvais conducteurs thermiques.

29.4 ISOLANTS ET SEMI-CONDUCTEURS

11 Il faut que le photon ait une énergie au moins égale à 1,1 eV. La fréquence correspondant à cette énergie se calcule par :

$$f = E / h = (1{,}1 \text{ eV}) / (4{,}135 \times 10^{-15} \text{ eV s}) = 2{,}66 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

12 Lorsque la température augmente, l'énergie thermique moyenne augmente aussi. Des électrons peuvent donc avoir une énergie thermique suffisante pour quitter la bande de valence et atteindre la bande de conduction. En appliquant une différence de potentiel aux extrémités du matériau, il doit être possible de mesurer un courant électrique en fonction de la température.

---

13 Oui. L'énergie libérée est emmenée par un photon, transférée à un autre électron ou sert à exciter le réseau.

29.5 LES LIAISONS FAIBLES

14 La molécule A provoque l'apparition d'un moment dipolaire induit dans la molécule B. Dès ce moment, la partie négative de la molécule B est plus proche de la partie positive de A que ne l'est sa partie positive. Comme des charges de signes opposés s'attirent, la force est attractive.

29.6 LE COMPORTEMENT D'UN DIPÔLE MAGNÉTIQUE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE

17 L'énergie potentielle du proton est égale à $U = \pm 2{,}79\ \mu_N B_T$ où le signe positif correspond au cas où S_z et μ_z sont parallèles au champ. On calcule :

(a) $U = -2{,}79\ (5{,}05 \times 10^{-27}\ \text{A m}^2)\ (1{,}2\ \text{T}) = -16{,}9 \times 10^{-27}\ \text{J}$

et (b) $+16{,}9 \times 10^{-27}\ \text{J}$.

---

18 (a) Puisque de l'énergie est produite et libérée, le proton passe dans un état énergétique plus stable. Il atteint donc une orientation parallèle au champ magnétique. (b) L'énergie du photon peut s'écrire $U = hf$ mais aussi $U = 2\ (2{,}79)\ (5{,}05 \times 10^{-27}\ \text{A m}^2)\ B_T$. On calcule donc :

$$B_T = (6{,}625 \times 10^{-34}\ \text{J s})\ (5 \times 10^{7}\ \text{Hz}) / [2\ (2{,}79)\ (5{,}05 \times 10^{-27}\ \text{A m}^2)]$$
$$= 1{,}18\ \text{T}.$$

---

20 La fréquence de précession est définie par $f_p = 0{,}444\ e\ B_T / m_p$. En introduisant la charge et la masse du proton, elle vaut :

$$f_p = (0{,}444)\ (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})\ (1{,}2\ \text{T}) / (1{,}673 \times 10^{-27}\ \text{kg}) = 5{,}1 \times 10^{7}\ \text{Hz}.$$

---

21 La différence entre les deux fréquences est égale à :

$$\Delta f = f_p - f_e = 0{,}444\ e\ (B_T - B_e) / m_p$$

et l'on calcule :

$$B_T - B_e = (300\ \text{Hz})\ (1{,}673 \times 10^{-27}\ \text{kg}) / [(0{,}444)\ (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})]$$
$$= 7{,}06 \times 10^{-6}\ \text{T}.$$

---

22 $\Delta U = 2\ (2{,}79)\ \mu_N\ B_T = 2\ (2{,}79)\ [e\hbar / (2\ m_p)]\ B_T = h\ [2{,}79 / (2\ \pi)]\ e\ B_T / m_p$. En effectuant le quotient entre crochets, on obtient :

$$\Delta U = h\ (0{,}444)\ e\ B_T / m_p = h f_p.$$

29.7 MESURE DE LA FRÉQUENCE DE PRÉCESSION

24 Le déplacement en fréquence est donné par :

$$\Delta f = 0{,}444\ e\ (B_T - B_e) / m_p$$
$$= (0{,}444)\ (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})\ (1{,}5 \times 10^{-6}\ \text{T}) / (1{,}673 \times 10^{-27}\ \text{kg})$$
$$= 63{,}7\ \text{Hz}.$$

---

25 La différence de fréquence est donnée par $f_p - f_e = 0{,}444\ e\ (B_T - B_e) / m_p$. On voit donc que si $B_T > B_e$, il faut que $f_p > f_e$. La fréquence du champ magnétique appliqué est plus grande que f_e.

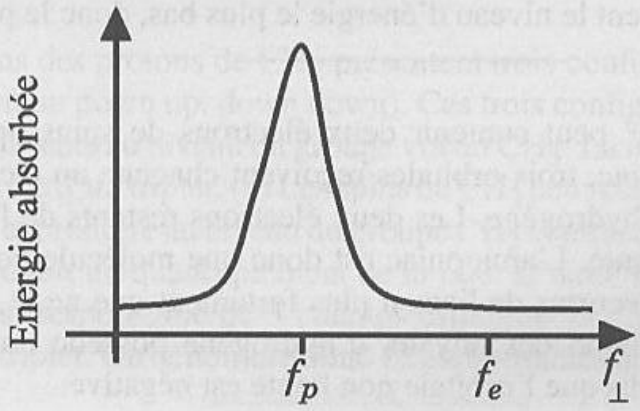
29.8 L'APPAREILLAGE RMN

27 Le proton précessionne à la fréquence $f = 0{,}444\ e\ B_e / m_p$. Le champ vaut :

$$B_e = f\ m_p / [0{,}444\ e]$$
$$= (6 \times 10^7\ \text{Hz})\ (1{,}673 \times 10^{-27}\ \text{kg}) / [(0{,}444)\ (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})] = 1{,}41\ \text{T}.$$

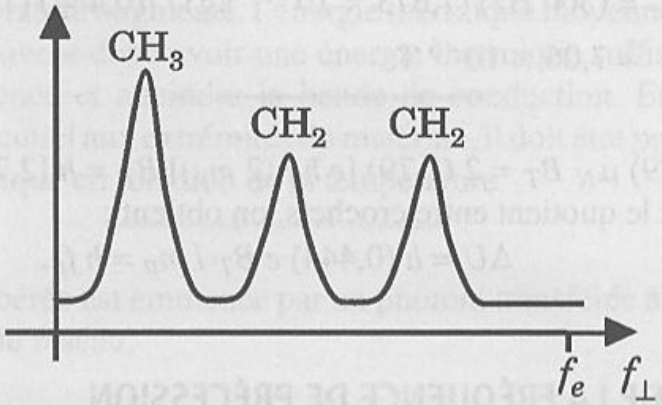
29.9 LE DÉPLACEMENT CHIMIQUE

29 La fréquence de résonance est inférieure à f_e.



© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

30 (a)



(b) Pour chaque molécule, trois protons dans le groupe CH_3 et deux protons dans les deux groupes CH_2 absorbent l'énergie. L'énergie est donc absorbée par les trois groupes dans les rapports 3 : 2 : 2.

29.10 LE COUPLAGE SPIN-SPIN

33 Il s'agit de la molécule CH_3-OH. En effet, les protons du groupe OH peuvent subir 4 champs légèrement différents suivant la configuration des spins de CH_3. Le quadruplement de la raie associée au groupe OH est lié à cet effet. De plus, il existe deux possibilités d'alignement des spins de OH et on assiste au dédoublement des raies de résonance du groupe CH_3 voisin.

SOLUTION DES PROBLÈMES

34 Le moment dipolaire vaut :

$$p = q\,\ell = (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})\,(2{,}79 \times 10^{-10}\ \text{m}) = 4{,}46 \times 10^{-29}\ \text{C m}.$$

---

35 La molécule neutre contient trois protons et trois électrons. Deux électrons sont appariés, le troisième ne l'est pas. L'ion moléculaire ne contient que deux électrons qui occupent le niveau d'énergie le plus bas, donc le plus stable.

---

36 Chaque orbitale sp^3 peut contenir deux électrons de spins opposés. Dans la molécule d'ammoniac, trois orbitales reçoivent chacune un électron de l'azote et un électron de l'hydrogène. Les deux électrons restants de l'azote occupent une orbitale non liante. L'ammoniac est donc une molécule polaire : le noyau d'azote attire les électrons de liaison plus fortement que ne le font les noyaux d'hydrogène. La région des noyaux d'hydrogène possède donc un excès de charge positive tandis que l'orbitale non liante est négative.

---

38 (a) L'hybridation est sp^2 pour le graphite et sp^3 pour le diamant. (b) La structure du graphite est bidimensionnelle et les liaisons sont faibles entre les différentes couches de graphite. La structure du diamant est tridimensionnelle et les différentes couches du cristal sont fortement connectées.

---

40 L'énergie potentielle d'une particule se calcule par $U = k\ q\ q' / r$. Les couples de charges q, q' qui interviennent en (a) sont : 2 fois (O^+, 2 électrons) et 2 fois (2 électrons, H^+) à une distance de $0{,}7 \times 10^{-10}$ m, 2 fois (O^+, H^+) et (2 électrons, 2 électrons) à une distance de $1{,}4 \times 10^{-10}$ m, 2 fois (O^+, 2 électrons) à une distance de $2{,}1 \times 10^{-10}$ m et (O^+, O^+) séparés de $2{,}8 \times 10^{-10}$ m. On calcule la somme des différentes contributions à l'énergie potentielle totale et l'on trouve : $U_1 = -\ 125{,}1$ eV. Dans la représentation (b), les couples d'ions qui participent au calcul de l'énergie potentielle sont : 2 fois (O^+, 2 électrons) et (2 électrons, H^+) à une distance de $0{,}7 \times 10^{-10}$ m et le couple (O^+, H^+) à une distance de $1{,}4 \times 10^{-10}$ m. Le calcul de l'énergie potentielle dans ce cas donne :

$$U_2 = -\ 113{,}1 \text{ eV}.$$

La différence entre les énergies potentielles des charges dans les deux configurations est égale à $\Delta U = U_2 - U_1 = 12{,}0$ eV.

---

41 Suite à la circulation des électrons, le champ B_e produit un champ induit ΔB opposé à B_e à l'intérieur de l'anneau et parallèle à B_e à l'extérieur. Au niveau de l'hydrogène, le champ s'est donc accru. La fréquence de précession f_p du moment dipolaire du proton de l'atome d'hydrogène augmente et devient supérieure à f_e.

---

43 (a) Le courant induit est responsable d'un champ induit qui s'oppose à l'apparition de B_e. Le courant d'électrons induit circule dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. (b) Le champ à l'intérieur du cylindre est réduit tandis qu'à l'extérieur, ce champ augmente. A l'endroit des atomes d'hydrogène, le champ est réduit et la fréquence de précession diminue.

---

44 (a) Les spins des protons de CH_2 présentent trois configurations différentes (up up, up down ou down up, down down). Ces trois configurations produisent trois champs différents au niveau du groupe voisin CH_3. La résonance associée à CH_3 prend la forme d'un triplet. (b) Les spins de CH_3 peuvent adopter 4 configurations différentes et produire au niveau du groupe CH_2 central quatre champs différents; cet effet produit un quadruplement de la raie. D'autre part, le groupement CH_2 extérieur est responsable de 3 champs différents et chaque raie du quadruplet devient un triplet. On dénombre donc 12 composantes dans la résonance centrale.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 30

Physique nucléaire

RAPPELS

Un faisceau issu d'une source radioactive se sépare en trois composantes en présence d'un champ magnétique. On distingue trois grands types de désintégrations : la désintégration *gamma* (γ) par laquelle un photon est émis, la désintégration *alpha* (α) qui s'accompagne de la libération d'un noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$ et la désintégration *bêta* (β) au cours de laquelle un électron ou un positron est libéré, accompagné d'un neutrino.

La désintégration nucléaire est un processus aléatoire caractérisé par une demi-vie T, temps nécessaire pour que la moitié des noyaux présents se désintègrent. La variation du nombre N de noyaux présents pendant un temps Δt est proportionnelle au nombre de noyaux prêts à être désintégrés, ce qui signifie que chaque noyau a une probabilité fixe constante de subir la fragmentation radioactive. On écrit :

$$\Delta N = - \lambda N \Delta t$$

où λ est la constante de désintégration. La formule de désintégration exponentielle permet de déterminer le nombre de noyaux restants au temps t par $N = N_0 \, e^{-\lambda t}$ si N_0 est le nombre de noyaux présents en $t = 0$. On peut également montrer que la constante de désintégration et le temps de demi-vie sont liés par la relation :

$$\lambda = \ln 2 / T = 0{,}693 / T.$$

Lors de l'ingestion d'un composé radioactif, la demi-vie effective T_{eff} est obtenue en combinant la demi-vie biologique T_b et la demi-vie physique T_p en suivant la règle $1/T_{eff} = 1/T_b + 1/T_p$. La demi-vie effective est plus courte que les deux autres parce que les deux processus contribuent à l'élimination du radio-isotope administré.

Le rapport entre les quantités initiale et actuelle d'un radio-isotope dans un objet permet de déterminer le temps écoulé depuis la formation de l'objet. Une méthode connue est celle de la datation au carbone 14.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit

Grâce aux expériences de bombardement d'atomes par des particules α, on peut calculer le rayon du noyau d'un atome par $R = A^{1/3}$ $(1{,}4 \times 10^{-15}$ m) où A est le nombre de masse du noyau. La recherche a également permis de mettre en évidence les constituants du noyau atomique : Z protons et $A - Z$ neutrons. Les espèces nucléaires, ayant le même nombre atomique mais différant par leur nombre de neutrons sont des isotopes. La masse d'un noyau est plus petite que la somme des masses de ses constituants; ce défaut de masse, multiplié par le carré de la vitesse de la lumière, est égal à l'énergie de liaison nucléaire. Dans le modèle nucléaire en couches, chaque niveau d'énergie peut contenir au maximum quatre nucléons : deux protons et deux neutrons de spins opposés. Les noyaux tendent à adopter la structure la plus stable au moyen de désintégrations β. Les noyaux à couche extérieure complète, particulièrement stables, sont appelés noyaux magiques.

SOLUTION DES EXERCICES

30.1 LA DEMI-VIE

1 La formule de désintégration exponentielle permet, en exprimant :

$$N / N_0 = 1/8 = e^{-\lambda (24\ h)},$$

de calculer la constante de désintégration $\lambda = \ln 8 / (24\ \text{h})$ et par conséquent la demi-vie $T = 0{,}693 / \lambda = 8$ h.

---

2 A chaque demi-vie, la radioactivité décroit d'un facteur 2. Un facteur 64 correspond à la sixième puissance de 2. Il faut donc 6 demi-vies pour que la radioactivité décroisse d'un facteur 64.

---

3 La demi-vie effective est donnée par $1/T_{eff} = 1/T_b + 1/T_p$ où la demi-vie biologique est égale à 22 jours et la demi-vie physique, 87,1 jours. On calcule donc $T_{eff} = [1/(22\ \text{jours}) + 1/(87{,}1\ \text{jours})]^{-1} = 17{,}6$ jours.

---

4 Par la définition de la demi-vie effective, on calcule :

$$T_b = [1/T_{eff} - 1/T_p]^{-1} = [1/(6\ \text{jours}) - 1/(10\ \text{jours})]^{-1} = 15\ \text{jours}.$$

---

5 La demi-vie correspond au temps nécessaire pour que le taux de comptage soit réduit de moitié, c'est-à-dire passe de 455 coups par minute à environ 228 coups par minute. Une première approximation permet de déterminer un temps compris entre 5 et 6 jours. Après 5 jours, le taux est tombé à 246 coups par minute (tableau

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

30.6) et on estime qu'il faut un peu plus de 0,6 jour pour passer de 246 à 228 coups par minute. La demi-vie est donc égale à environ 5,6 jours.

7 Le rapport N / N_0 est donné par $e^{-\lambda t}$ où $\lambda = 0{,}693 / T = 0{,}0693\ h^{-1}$. Sa valeur est égale à $N / N_0 = e^{-(0{,}0693 / h)(24\ h)} = 0{,}1895$. Il ne subsiste donc que 18,95 % de l'échantillon.

8 (a) Voir exercice 30-3 : T_{eff} = 17,56 jours. (b) On détermine le rapport des nombres de radio-isotopes initial et final par $N / N_0 = e^{-\lambda t}$ où :

$$\lambda = 0{,}693 / (17{,}56\ \text{jours}) = 0{,}0395\ \text{jour}^{-1}.$$

On déduit alors $N / N_0 = e^{-\lambda\ (22\ \text{jours})} = 0{,}42$. Il subsiste donc 42 % de radio-isotopes dans l'organisme.

30.2 DATATION EN ARCHÉOLOGIE ET EN GÉOLOGIE

9 La demi-vie du carbone 14 est de 5730 ans. Si le rapport N / N_0 est égal à 1/4, deux demi-vies se sont écoulées, soit 11460 ans.

10 Après une demi-vie, x noyaux d'^{235}U se sont transformés en [$x/2$ noyaux d'^{235}U + $x/2$ noyaux de ^{207}Pb]. Après une seconde demi-vie, les $x/2$ noyaux d'^{235}U sont devenus [$x/4$ noyaux d'^{235}U + $x/4$ noyaux de ^{207}Pb]. Après deux demi-vies, on obtient donc, sur 4 noyaux, 1 noyau d'^{235}U et 3 noyaux de ^{207}Pb. L'âge de la roche est égal à 2 T = 2 (0,71 milliard d'années) = 1,42 milliards d'années.

11 La raison la plus évidente est que les combustibles fossiles sont trop vieux...

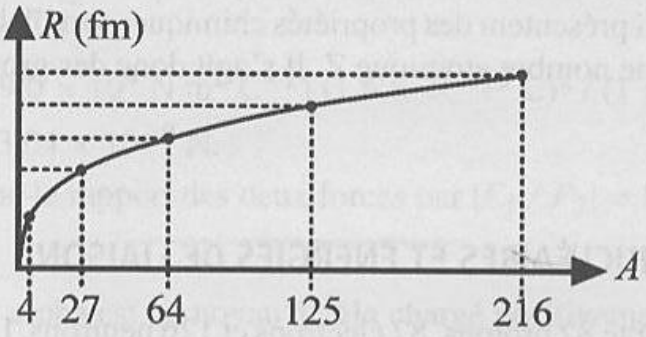
12 La formule de désintégration exponentielle appliquée au cas du ^{14}C permet de calculer $N = (1 \times 10^{-12})\ e^{-(0{,}693)(40000\ \text{ans}) / (5730\ \text{ans})} = 7{,}9 \times 10^{-15}$.

13 Il faut deux demi-vies pour que la concentration diminue d'un facteur quatre. Il faut donc 2 (650 ans) = 1300 ans à l'eau pour se renouveler.

30.3 LES DIMENSIONS NUCLÉAIRES

14 (a) Le rayon nucléaire vaut $R = A^{1/3}\ (1{,}4 \times 10^{-15}\ \text{m})$ où A est le nombre de masse du noyau.

Pour l'^{4}He, $R = (4)^{1/3}\ (1{,}4 \times 10^{-15}\ \text{m}) = 2{,}22 \times 10^{-15}\ \text{m}$,
pour l'^{27}Al, $R = (27)^{1/3}\ (1{,}4 \times 10^{-15}\ \text{m}) = 4{,}2 \times 10^{-15}\ \text{m}$,
pour le ^{64}Cu, $R = (64)^{1/3}\ (1{,}4 \times 10^{-15}\ \text{m}) = 5{,}6 \times 10^{-15}\ \text{m}$,
pour l'^{125}I, $R = (125)^{1/3}\ (1{,}4 \times 10^{-15}\ \text{m}) = 7 \times 10^{-15}\ \text{m}$
et dans le cas du ^{216}Po, $R = (216)^{1/3}\ (1{,}4 \times 10^{-15}\ \text{m}) = 8{,}4 \times 10^{-15}\ \text{m}$.
(b)



15 Le volume total de l'atome se calcule par $4\ \pi\ r^3\ /\ 3$ tandis que celui du noyau vaut $4\ \pi\ [A^{1/3}\ (1{,}4 \times 10^{-15})]^3\ /\ 3$ où A, le nombre de masse, vaut 4. Le rapport du volume du noyau à celui de l'atome est égal à :

$$[A^{1/3}\ (1{,}4 \times 10^{-15})]^3\ /\ (1 \times 10^{-10})^3 = 1{,}1 \times 10^{-14}.$$

16 (a) La masse volumique du noyau d'oxygène est égale à sa masse rapportée à son volume, soit :

$$\rho = (16)\ (1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg})\ /\ [(4\ \pi\ /\ 3)\ (1{,}4)^3\ (16)\ (1 \times 10^{-15}\ \text{m})^3]$$
$$= 145 \times 10^{15}\ \text{kg m}^{-3}.$$

(b) Le rapport de la masse volumique du noyau d'oxygène à celle de l'eau est égal à 145×10^{12}.

17 Le volume de l'étoile se calcule par le rapport de la masse du Soleil à la masse volumique du noyau, calculée par :

$$A\ (1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg})\ /\ [(4\ \pi\ /\ 3)\ A\ (1{,}4)^3\ (1 \times 10^{-15}\ \text{m})^3].$$

Sachant que la masse du Soleil vaut 2×10^{30} kg, on détermine $r = 1{,}5 \times 10^4$ m.

18 Le volume d'une mole est égal à N_A fois le volume d'un noyau de carbone et vaut $V = (6{,}02 \times 10^{23})\ (4\ \pi\ /\ 3)\ A\ (1{,}4 \times 10^{-15}\ \text{m})^3 = 83 \times 10^{-21}\ \text{m}^3$.

30.4 PROTONS ET NEUTRONS

19 Dans une représentation atomique, le nombre supérieur correspond au nombre de nucléons A tandis que le nombre inférieur est le nombre de protons Z. Le

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

nombre de neutrons s'obtient par $N = A - Z$. On trouve donc, pour le $^{14}_{6}C$, $N = 8$, pour le $^{36}_{17}Cl$, $N = 19$, pour le $^{64}_{29}Cu$, $N = 35$ et pour le $^{208}_{82}Pb$, $N = 126$.

---

20 (a) Le nombre de neutrons est égal à $N = A - Z$. Les deux noyaux $^{2}_{1}H$ et $^{3}_{2}He$ possèdent un seul neutron tandis que les noyaux $^{3}_{1}H$ et $^{4}_{2}He$ en possèdent deux. (b) Les noyaux qui présentent des propriétés chimiques semblables sont les isotopes, qui ont le même nombre atomique Z. Il s'agit donc des groupes $^{1}_{1}H$, $^{2}_{1}H$ et $^{3}_{1}H$ et de $^{3}_{2}He$ et $^{4}_{2}He$.

30.5 MASSES NUCLÉAIRES ET ÉNERGIES DE LIAISON

21 Le plomb compte 82 protons, 82 électrons et 126 neutrons. La somme des masses des différents constituants donne :

$$82\ (1{,}00728) + 82\ (5{,}48 \times 10^{-4}) + 126\ (1{,}00866) = 209{,}7331 \text{ uma}.$$

Le défaut de masse est égal à (209,7331 uma) – (207,9766 uma) = 1,7565 uma. L'équivalent énergétique vaut :

$$(1{,}7565 \text{ uma})\ (1{,}66 \times 10^{-27} \text{ kg uma}^{-1})\ (3 \times 10^{8} \text{ m s}^{-1})^2 / (1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J eV}^{-1}) = 1{,}64 \times 10^{9} \text{ eV}.$$

Cette énergie de liaison vaut :

$$(1{,}64 \times 10^{9} \text{ eV}) / (208 \text{ nucléons}) = 7{,}86 \text{ MeV nucléon}^{-1}.$$

---

22 La somme des masses des constituants du $^{207}_{82}Pb$ est égale à 208,7244 uma et celle du $^{208}_{82}Pb$ vaut 209,7331 uma. Le défaut de masse du $^{207}_{82}Pb$ est égal à (208,7244 uma) – (206,9759 uma) = 1,7485 uma et celui du $^{208}_{82}Pb$ vaut (209,7331 uma) – (207,9766 uma) = 1,7565 uma. La différence de leurs défauts de masse vaut donc 0,008 uma. (b) L'équivalent énergétique du défaut de masse par nucléon du $^{207}_{82}Pb$ est :

$$(1{,}7565 \text{ uma})\ (1{,}66 \times 10^{-27} \text{ kg uma}^{-1})\ (3 \times 10^{8} \text{ m s}^{-1})^2 / [(1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J eV}^{-1})\ (208 \text{ nucléons})] = 7{,}89 \text{ MeV}.$$

---

23 (a) L'énergie de liaison est l'équivalent énergétique du défaut de masse, soit :

$$(1{,}5 \text{ uma})\ (1{,}66 \times 10^{-27} \text{ kg uma}^{-1})\ (3 \times 10^{8} \text{ m s}^{-1})^2 / [(1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J eV}^{-1}) = 1400 \text{ MeV}.$$

(b) L'énergie de liaison par nucléon est égale à :

$$(1400 \text{ MeV}) / (200 \text{ nucléons}) = 7 \text{ MeV nucléon}^{-1}.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

30.6 LES FORCES NUCLÉAIRES

24 (a) La force électrique entre deux protons vaut :

$$F_1 = k\,e^2 / r^2 = (9{,}0 \times 10^9\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2})\,(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2 / (1 \times 10^{-15}\ \text{m})^2$$
$$= 230{,}4\ \text{N}.$$

(b) La force électrique entre un proton et un électron vaut :

$$F_2 = -\,k\,e^2 / r^2$$
$$= -\,(9{,}0 \times 10^9\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2})\,(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2 / (1 \times 10^{-10}\ \text{m})^2$$
$$= -23{,}04 \times 10^{-9}\ \text{N}.$$

(c) On détermine le rapport des deux forces par $|F_1 / F_2| = 1 \times 10^{10}$.

---

25 (a) La particule alpha est un noyau d'^{4}He chargé positivement grâce à ses deux protons. Sachant que l'énergie d'interaction entre un proton et l'uranium est égale à 15 MeV, l'énergie de répulsion entre deux protons et ce même atome est doublée, soit 30 MeV. (b) Comme le neutron est neutre, l'énergie d'interaction électrique est nulle.

---

27 (a) L'énergie potentielle vaut :

$$E = k\,e^2 / r$$
$$= (9{\times}10^9\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2})(1{,}6{\times}10^{-19}\ \text{C})^2 / [(1{\times}10^{-15}\ \text{m})(1{,}6{\times}10^{-19}\ \text{J eV}^{-1})]$$
$$= 1{,}44\ \text{MeV}.$$

(b) L'équivalent massique de cette énergie est donné par $E = m\,c^2$ et donc :

$$m = (1{,}44 \times 10^6\ \text{eV})\,(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{J eV}^{-1})$$
$$/\,[(1{,}66 \times 10^{-27}\ \text{kg uma}^{-1})\,(3 \times 10^8\ \text{m s}^{-1})^2]$$
$$= 1{,}54 \times 10^{-3}\ \text{uma}.$$

30.7 NIVEAUX D'ÉNERGIE NUCLÉAIRE ET STABILITÉ NUCLÉAIRE

28 Le nombre total de nucléons (et donc de protons) doit être conservé entre les réactifs et les produits de réaction. Sachant que le proton p est un atome $^1_1$H, on détermine l'inconnue X. (a) Du côté des réactifs, le nombre total de protons est égal à 7 tandis que le nombre total de nucléons vaut 13. Il manque donc, dans les produits de réaction, un composé ayant 6 protons et un nombre de masse égal à 11. Comme on reconnaît un composé par son nombre atomique, un atome à 6 protons est un atome de carbone : $X = {}^{11}_{6}$C. (b) On dénombre 4 protons et 6 nucléons du côté des réactifs; il manque donc un composé à 1 proton et 1 nucléon dans les produits de réaction, soit $X = {}^1_1$H, c'est-à-dire un proton. (c) Le nombre total de protons est égal à 8 tandis que le nombre de nucléons est égal à 15. Du côté des produits de réaction, le composé X a donc 1 proton et 3 nucléons; il s'agit du tritium $^3_1$H.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

29 Le nombre total de nucléons (et donc de protons) doit être conservé entre les réactifs et les produits de réaction. Sachant que le proton p est un atome ${}_1^1\text{H}$, on détermine l'inconnue X. (a) Du côté des réactifs, le nombre total de protons est égal à 2 tandis que le nombre total de nucléons vaut 4. Il manque donc, dans les produits de réaction, un composé ayant 1 proton et un nombre de masse égal à 3. Comme on reconnaît un composé par son nombre atomique, un atome à 1 proton est un atome d'hydrogène : $X = {}_1^3\text{H}$. (b) On dénombre 8 nucléons dont 4 protons du côté des produits de réaction; il manque donc un composé à 1 proton et 2 nucléons dans les réactifs, soit $X = {}_1^2\text{H}$. (c) Le nombre total de protons est égal à 10 tandis que le nombre de nucléons est égal à 20. Du côté des réactifs, le composé X a donc 4 nucléons dont 2 protons; il s'agit d'une particule alpha, ${}_2^4\text{H}$.

30.8 LES DÉSINTÉGRATIONS RADIOACTIVES

31 (a) La fréquence du photon se calcule par :

$$f = E / h = (2 \times 10^6 \text{ eV}) / (4{,}135 \times 10^{-15} \text{ eV s}) = 4{,}84 \times 10^{20} \text{ Hz}.$$

(b) La longueur d'onde est reliée à la fréquence par :

$$\lambda = c / f = (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}) / (4{,}84 \times 10^{20} \text{ s}^{-1}) = 6{,}2 \times 10^{-13} \text{ m}.$$

---

32 (a) Le nombre de nucléons est resté constant mais il manque une charge positive en fin de réaction; il s'agit d'une désintégration β^+. Les particules émises sont un positron e^+ et un neutrino. (b) Le nombre de nucléons est constant mais une charge positive supplémentaire est apparue. Elle s'accompagne de l'émission d'un électron et d'un neutrino (désintégration β^-). (c) L'atome de carbone passe d'un état excité vers un état plus stable; il s'agit d'une désintégration *gamma*. (d) Le nombre de masse et le nombre atomique sont modifiés : 4 nucléons dont 2 protons; il s'agit donc d'une désintégration *alpha*.

30.9 LA FISSION NUCLÉAIRE. RÉACTEURS ET BOMBES À FISSION

33 En général, les fragments de la fission ont un rapport neutrons / protons trop élevé pour des noyaux de masse moyenne. Ils expulsent donc presque immédiatement un ou plusieurs neutrons et subissent ensuite une série de désintégrations *bêta* qui transforment un neutron en proton, rendant le noyau plus stable.

---

34 Ils cherchent des sites qui soient à l'abri des catastrophes naturelles (séismes) et donc d'une grande stabilité géologique.

---

36 L'^{235}U est en très faible concentration dans l'uranium naturel et la séparation des deux isotopes est très coûteuse et très difficile puisque leurs propriétés chimiques sont presque identiques.

---

37 La masse de la particule incidente, le neutron, est pratiquement égale à la masse du noyau d'hydrogène constitué d'un proton; on calcule donc que l'énergie cinétique finale du neutron est pratiquement nulle; ce n'est pas le cas lorsque la particule 2 est le noyau d'oxygène.

30.10 LA FUSION NUCLÉAIRE

38 Si l'on calcule l'énergie libérée par nucléon de réactif, on trouve, pour le processus de fusion, (17,4 MeV) / (5 nucléons) = 3,48 MeV nucléon^{-1} tandis que pour la fission, elle vaut (200 MeV) / (239 nucléons) = 0,837 MeV nucléon^{-1}.

---

39 Dans le cas de la fusion de deux isotopes de l'hydrogène, il faut vaincre la répulsion entre 2 protons tandis que la réaction au $^{6}_{3}$Li fait intervenir 3+1 protons. La force de répulsion à combattre est trois fois plus grande; il faut donc fournir trois fois plus d'énergie et par conséquent, le processus requiert une température plus élevée.

---

40 Le neutron est un particule neutre; il ne faut donc pas fournir l'énergie qui sert à vaincre la répulsion coulombienne dans d'autres types de réactions, ce qui limite les températures nécessaires.

SOLUTION DES PROBLÈMES

41 Si l'activité du radio-isotope n'est plus que 1 % de sa valeur initiale, on exprime le rapport N / N_0 par 0,01. On peut calculer le temps t pour que $0{,}01 = e^{-\lambda t}$ où $\lambda = 0{,}693 / T$ en écrivant $\ln 0{,}01 = -(0{,}693 / T)\, n\, T$ où n indiquera le nombre de demi-vies. On détermine $n = 6{,}64$.

---

42 Le nombre actuel de noyaux, N, est égal à 20 % du nombre N_0 initial, soit $N / N_0 = 0{,}2$. On calcule alors le temps qui s'est écoulé en utilisant la formule de désintégration exponentielle, $N / N_0 = e^{-\lambda t}$ où $\lambda = 0{,}693 / T$ avec $T = 5730$ ans. On détermine $t = \ln 0{,}2 / (-\lambda) = 13307$ années.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

43 Son activité finale N peut s'exprimer par N_0 / e. En divisant par N_0 les deux membres de l'égalité dans la formule de désintégration exponentielle, on calcule $t = 1 / \lambda = (28 \text{ ans}) / (0{,}693) = 40{,}4 \text{ ans}$.

---

44 La comparaison des deux activités au temps t permet d'écrire, par la formule de désintégration exponentielle, $128\ e^{-0{,}693\ t} = e^{-0{,}693\ t/8}$. En appliquant le logarithme népérien aux deux termes de l'égalité, on obtient :

$$t = 8 \ln 128 / [7\ (0{,}693)] = 8{,}002 \text{ jours.}$$

---

46 (a) Le rayon de la première orbite de Bohr est donné par :

$$r = \hbar^2 / (k\ Z\ m_\mu\ e^2)$$
$$= [\hbar^2 / (k\ m_{e^-}\ e^2)] / (207\ Z) = a_0 / (207\ Z)$$
$$= (5{,}29 \times 10^{-11} \text{ m}) / [207\ (92)] = 2{,}78 \times 10^{-15} \text{ m.}$$

(b) Le rayon nucléaire est égal à :

$$R = A^{1/3}\ (1{,}4 \times 10^{-15} \text{ m}) = (238)^{1/3}\ (1{,}4 \times 10^{-15} \text{ m}) = 8{,}676 \times 10^{-15} \text{ m.}$$

Le rapport des deux rayons r / R est égal à 0,320 (inférieur à 1 !).

---

51 (a) Le rayon nucléaire est donné par :

$$R = A^{1/3}\ (1{,}4 \times 10^{-15} \text{ m}) = (235)^{1/3}\ (1{,}4 \times 10^{-15} \text{ m}) = 8{,}64 \times 10^{-15} \text{ m.}$$

(b) On détermine l'énergie potentielle par :

$$E = k\ q\ q' / r$$
$$= (9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2})\ (46)^2\ (1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C})^2 / [2\ (8{,}64 \times 10^{-15} \text{ m})]$$
$$= 28{,}22 \times 10^{-12} \text{ J} = 176{,}3 \text{ MeV.}$$

---

52 (a) Dans le calcul de l'énergie de masse, il faut tenir compte de la contribution des protons et de celle des neutrons. Comme leurs masses sont semblables et que leurs nombres respectifs sont inconnus, adoptons pour masse d'un nucléon, la valeur moyenne de leurs deux masses, soit 1,00797 uma. L'énergie de masse est égale à :

$$A\ (1{,}00797 \text{ uma})\ (1{,}66 \times 10^{-27} \text{ kg uma}^{-1})\ (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})^2$$
$$/\ (1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J eV}^{-1}) = 941{,}2\ A \text{ MeV.}$$

Le rapport de l'énergie de liaison du noyau, 8 A MeV, à l'énergie de masse vaut alors $8{,}5 \times 10^{-9}$. (b) L'énergie de masse de l'atome d'hydrogène est égale à :

$$[(1{,}00728 \text{ uma}) + (5{,}48 \times 10^{-4} \text{ uma})]\ (1{,}66 \times 10^{-27} \text{ kg uma}^{-1})\ (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})^2$$
$$/\ (1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J eV}^{-1}) = 941 \text{ MeV.}$$

Le rapport de l'énergie de liaison du noyau et de l'énergie de masse est égal à 14,45.

---

53 Puisque les deux particules ont des énergies cinétiques initiales négligeables, l'énergie cinétique emportée par les mésons est la différence des équivalents énergétiques des masses des particules. On calcule donc :

$$K = 2\, m_p\, c^2 - 4\, m_\pi\, c^2$$
$$= [2\ (1{,}00728\ \text{uma})\ (1{,}66 \times 10^{-27}\ \text{kg uma}^{-1})\ (3 \times 10^8\ \text{m s}^{-1})^2 / (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{J eV}^{-1})] - 4\ (139{,}6\ \text{MeV})$$
$$= 1323\ \text{MeV}.$$

---

54 La masse excédentaire du neutron par rapport au proton a un équivalent énergétique égal à $E = m\, c^2$. Cette énergie se transforme en énergie potentielle électrique : $E = k\, e^2 / r$. De ces égalités, on déduit :

$$r = k\, e^2 / (m\, c^2)$$
$$= (9 \times 10^9\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2})\ (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2 / \{[(1{,}00866\ \text{uma}) - (1{,}00728\ \text{uma})](1{,}66 \times 10^{-27}\ \text{kg uma}^{-1})(3 \times 10^8\ \text{m s}^{-1})^2\}$$
$$= 1{,}12 \times 10^{-15}\ \text{m}.$$

---

55 (a) Sachant qu'une mole, soit 235 gr, contient N_A noyaux, on calcule l'énergie libérée par 1 kg d'^{235}U par :

$$E = (6{,}02 \times 10^{23}\ \text{noyaux})\ [(1\ \text{kg})/(0{,}235\ \text{kg})](200 \times 10^6\ \text{eV noyau}^{-1})(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{J eV}^{-1})$$
$$= 8{,}2 \times 10^{13}\ \text{J}.$$

(b) Par seconde, l'énergie nécessaire est de 5×10^{11} J. Un kg d'uranium fournit $8{,}2 \times 10^{13}$ J, soit, avec un rendement de 30 %, une énergie de $2{,}46 \times 10^{13}$ J. Il faut donc consommer une quantité d'uranium égale à :

$$(5 \times 10^{11}\ \text{J s}^{-1}) / (2{,}46 \times 10^{13}\ \text{J kg}^{-1}) = 0{,}0203\ \text{kg s}^{-1}.$$

---

57 (a) La température est donnée par :

$$T = 2\, E / (3\, k_B) = 2\ (0{,}1 \times 10^6\ \text{eV}) / [3\ (8{,}625 \times 10^{-5}\ \text{eV K}^{-1})] = 7{,}72 \times 10^8\ \text{K}.$$

(b) Cette expression de l'énergie donne une valeur moyenne, ce qui signifie que certains atomes peuvent avoir une énergie inférieure à cette valeur et d'autres une énergie supérieure à celle-ci. Dans le dernier cas, la réaction de fusion peut s'amorcer plus rapidement.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre **31**

Radiations ionisantes

RAPPELS

La désintégration radioactive des noyaux produit plusieurs espèces de particules ionisantes dont l'énergie est de l'ordre de quelques millions d'eV. Par ordre croissant de pénétration dans la matière, on distingue les radiations suivantes : les ions positifs (par exemple les particules alpha), les électrons et les positrons, les photons (rayons X, d'origine atomique, et rayons gamma, d'origine nucléaire) et les neutrons.

Le parcours des particules dans la matière est fonction de leur énergie. Pour des ions positifs, par exemple, la perte d'énergie cinétique par unité de parcours est proportionnelle (pour des vitesses non relativistes) à l'expression $m\ q^2\ /\ 2\ K$, où m et q sont respectivement la masse et la charge de l'ion et K est l'énergie cinétique initiale.

Plusieurs unités de dose de rayonnement sont utilisées dans la mesure des effets de l'irradiation.

L'*activité d'une source* est le nombre de désintégrations qui se produisent par unité de temps dans la masse radioactive. L'activité de n moles d'un échantillon est donnée par l'expression $A = (0{,}693\ /\ T)\ n\ N_A$, où T est la demi-vie de l'échantillon et N_A le nombre d'Avogadro. L'unité d'activité est le becquerel (Bq) qui représente une désintégration par seconde. Le curie ($1\ \text{Ci} = 3{,}7 \times 10^{10}$ désintégrations par seconde) est plus fréquemment utilisé en pratique.

L'*exposition* ne se définit que pour les rayons X et gamma d'énergie inférieure à 3 MeV et constitue une mesure physique de l'irradiation à laquelle a été soumis un objet. L'unité est le roentgen (R), défini comme suit : 1 R de rayons X produit, dans un kilogramme d'air sec sous pression et température normales (CNTP : 0 °C et 1 atmosphère), $2{,}58 \times 10^{-4}$ coulomb d'ions positifs et une quantité égale d'ions négatifs.

La *dose absorbée* est l'énergie cédée par une radiation ionisante à l'unité de masse du tissu absorbant. Elle s'exprime en rad : 1 rad = 0,01 J kg^{-1}. Une exposition de 1 roentgen à des rayons X ou gamma produit, dans un tissu mou, une dose absorbée d'environ 1 rad. Une dose de 100 rad s'appelle 1 gray (Gy).

La *dose biologiquement équivalente* (en rem) est égale à la dose physique absorbée (en rad) multipliée par le FEB (facteur d'efficacité biologique). Le FEB est fonction du rayonnement : la référence est le rayonnement X de 200 keV, pour lequel le FEB vaut 1 rem rad^{-1}.

L'exposition aux radiations est strictement réglementée. La dose maximum admissible (DMA) est définie pour l'irradiation subie dans les activités professionnelles (5 rem par an), pour la vie quotidienne, au niveau d'un individu (0,5 rem par an) et, en moyenne, pour l'ensemble de la population (0,17 rem par an pour une personne).

SOLUTION DES EXERCICES

31.1 L'INTERACTION DES RAYONNEMENTS AVEC LA MATIÈRE

1 Dans le cas du photon gamma, l'énergie de chaque photon est suffisante pour provoquer une ionisation. Dans le cas des micro-ondes, un photon absorbé a trop peu d'énergie et l'on doit attendre l'absorption d'un très grand nombre de photons avant que l'accumulation d'énergie n'aboutisse à une ionisation.

---

3 (a) La distance d'arrêt d'une particule α dans la matière est toujours très proche du parcours moyen. C'est pour ces radiations que le nombre de particules détectées peut tomber brutalement à zéro, après un parcours de quelques centimètres dans l'air. (b) La distance d'arrêt dans l'air étant de 9,5 cm, elle vaudra $r = [(1{,}29 \text{ kg m}^{-3}) / (2700 \text{ kg m}^{-3})]\ (9{,}5 \times 10^{-2} \text{ m}) = 4{,}5 \times 10^{-5}$ m dans l'aluminium.

---

4 D'après les données de la figure 31.4, le parcours d'un électron de 10 MeV dans l'eau est de 5 cm et le parcours moyen d'une particule α dans l'eau est de 2×10^{-2} cm.

---

5 L'absorption d'un photon gamma entraîne l'émission d'un électron de coeur très fortement lié à l'atome. Cette émission laisse, dans les couches électroniques profondes, une lacune qu'un électron moins lié peut combler. L'énergie électromagnétique libérée lors de cette transition apparaît sous la forme d'un photon X.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

6 Non. L'énergie du photon gamma sert d'abord à extraire l'électron du niveau atomique profond dans lequel il se trouve et ensuite à lui communiquer de l'énergie cinétique. L'énergie cinétique de l'électron est donc inférieure à l'énergie du photon gamma.

---

9 La perte d'énergie cinétique par unité de parcours, pour une particule de masse m et de charge q est donnée par $\Delta K = - C\, m\, q^2 / (2\, K)$, où K est l'énergie cinétique initiale et C est une constante. La masse m_p du proton est proche de 1 uma et la masse m_d du deutéron avoisine 2 uma. Elles ont toutes deux une charge $q = e$. Si la perte d'énergie ΔK est la même pour les deux particules, c'est que l'énergie incidente K(d) du deutéron est double de l'énergie K(p) du proton.

---

10 La charge du proton étant identique à celle du deutéron, la perte d'énergie est proportionnelle à la masse de la particule. Dès lors, $\Delta K(\text{d}) = 2\, \Delta K(\text{p})$.

---

12 Le noyau de ^{14}C a une masse proche de $m = 14$ uma et une charge égale à $q_C = 6\, e$. Le noyau de ^{14}N a une masse égale à celle du ^{14}C et une charge $q_N = 7\, e$. Pour ces particules, 40 MeV représentent une vitesse $v = 23 \times 10^6\ \text{m s}^{-1}$, ce qui donne un rapport $v / c = 0{,}078$. Nous pouvons donc appliquer la relation 31.2. Dans ce cas, le rapport des pertes d'énergie est :

$$\Delta K_\text{N} / \Delta K_\text{C} = (m\, q_\text{N}^2 / 2\, K) / (m\, q_\text{C}^2 / 2\, K) = (q_\text{N} / q_\text{C})^2 = (7/6)^2 = 1{,}36.$$

On trouve ainsi $\Delta K_\text{C} = (1{,}36)\ (2\ \text{MeV}) = 2{,}72\ \text{MeV}$.

---

13 Le parcours d'un électron de 10 MeV est de 5 cm dans l'eau et de 0,5 cm dans le plomb.

31.2 UNITÉS DE DOSE DE RAYONNEMENT

14 L'iode ^{131}I subit une désintégration caractérisée par une demi-vie de :

$$8{,}1\ \text{jours} = (8{,}1\ \text{j})\ (24\ \text{h j}^{-1})\ (3600\ \text{s h}^{-1}) = 7{,}00 \times 10^5\ \text{s}.$$

L'activité A est liée au temps de demi-vie T par la relation $n = (A\, T) / (0{,}693\, N_A)$ qui, ici, donne le nombre de moles n dans l'échantillon. L'activité est donnée par $A = 1 \times 10^{-6}\ \text{Ci} = (1 \times 10^{-6})\ (3{,}7 \times 10^{10}\ \text{s}^{-1}) = 3{,}7 \times 10^4\ \text{s}^{-1}$, ce qui correspond à :

$$n = (3{,}7 \times 10^4\ \text{s}^{-1})\ (7{,}00 \times 10^5\ \text{s}) / [(0{,}693)\ (6{,}02 \times 10^{23}\ \text{mole}^{-1})]$$
$$= 6{,}2 \times 10^{-14}\ \text{mole}.$$

Comme une mole de ^{131}I représente une masse de 131×10^{-3} kg, la masse d'iode dont l'activité atteint la valeur de 1 microcurie est :

$$m = (6{,}2 \times 10^{-14} \text{ mole})\ (0{,}131 \text{ kg mole}^{-1}) = 8{,}13 \times 10^{-15} \text{ kg}.$$

---

15 Un roentgen correspond à la production de $2{,}58 \times 10^{-4}$ coulomb d'ions positifs et une quantité équivalente d'ions négatifs dans un kilogramme d'air sec aux conditions normales de température et de pression. Chaque ion positif a une charge $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C et le nombre d'ions produits est donc :

$$(2{,}58 \times 10^{-4} \text{ C}) / (1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C}) = 1{,}61 \times 10^{15}.$$

---

16 La demi-vie est $T = (8 \text{ h})\ (3600 \text{ s h}^{-1}) = 28800$ s. Le nombre de moles produisant une activité A est $n = (A\ T) / (0{,}693\ N_A)$. Dans le cas présent,

$$n = (1 \times 10^{-6})\ (3{,}7 \times 10^{10} \text{ s}^{-1})\ (28800 \text{ s}) / [(0{,}693)\ (6{,}02 \times 10^{23} \text{ mole}^{-1})]$$
$$= 2{,}55 \times 10^{-15} \text{ mole}.$$

---

18 Si x est la dose absorbée (en rad), l'énergie dégagée vaut :

$$Q = x\ (0{,}01 \text{ J kg}^{-1} \text{ rad}^{-1}).$$

La chaleur spécifique de l'eau, à pression constante, vaut $4{,}169 \times 10^3$ J kg^{-1} K^{-1} et l'énergie nécessaire pour élever la température d'un kilogramme d'eau de 30 K est $Q = (1 \text{ kg})\ (4{,}169 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1})\ (30 \text{ K}) = 1{,}25 \times 10^5$ J. L'absorption de $x = (1{,}25 \times 10^5 \text{ J}) / (0{,}01 \text{ J kg}^{-1} \text{ rad}^{-1}) = 1{,}25 \times 10^7$ rad est nécessaire pour fournir cette énergie.

---

19 Une exposition de un roentgen (1 R) conduit à la production de :

$$2{,}58 \times 10^{-4} \text{ coulomb}$$

par kilogramme d'air sec à température et pression normales. Ici, la charge libérée vaut $q = (1 \times 10^{16})\ e = (1 \times 10^{16})\ (1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C}) = 1{,}6 \times 10^{-3}$ C, ce qui correspond à une exposition de $(1{,}6 \times 10^{-3} \text{ C}) / (2{,}58 \times 10^{-4} \text{ C R}^{-1}) = 6{,}20$ R.

---

20 (a) Une dose de 2×10^5 rad correspond, pour un kilogramme de matière alimentaire, à une énergie égale à $(2 \times 10^5)\ (0{,}01 \text{ J kg}^{-1}) = 2000 \text{ J kg}^{-1}$. (b) En supposant une chaleur spécifique de 4169 J kg^{-1} K^{-1}, égale à celle de l'eau, on trouve à partir de la relation $(2000 \text{ J kg}^{-1}) = (4169 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1})\ (\Delta T)$ la variation de température $\Delta T = 0{,}5$ K.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

21 (a) Déposée au rythme de 4000 rad h^{-1}, une dose de 300 rad sera absorbée en un temps t = (300 rad) / (4000 rad h^{-1}) = 0,075 h = 270 s (ou 4,50 min). (b) La dose biologiquement équivalente à 300 rem correspond à une absorption physique de (300 rem) / (0,7) = 428 rad, obtenue en (428 rad) / (4000 rad h^{-1}) = 0,107 h = 386 s (ou 6,43 min).

31.3 EFFETS NOCIFS DES RADIATIONS EXPOSITION CHRONIQUE AUX RADIATIONS

23 Pour les activités professionnelles, la dose maximum admissible est de 5 rem par an et 1,25 rem par trimestre. (a) La technicienne peut effectuer (1,25 rem par trimestre) / (0,1 rem par manipulation) = 12 manipulations par trimestre. (b) En un an, on autorise 50 manipulations.

---

26 Une année compte un peu plus de 52 semaines et l'hôtesse passe en moyenne (20 h sem^{-1}) (52 sem an^{-1}) = 1,04 × 10^3 h an^{-1} à haute altitude. Elle reçoit donc, annuellement, (0,7 × 10^{-3} rem h^{-1}) (1,04 × 10^3 h an^{-1}) (1 an) = 0,730 rem de radiations. La dose reçue est donc nettement inférieure à la dose maximum admissible (DMA) dans une activité professionnelle (5 rem par an), mais supérieure à la dose admise pour l'ensemble de la population (individuellement, 0,5 rem par an).

---

27 Au taux de 72 × 10^{-3} rem par an reçus en moyenne du fait de l'utilisation diagnostique des rayons X, une personne de 30 ans a subi une irradiation totale de : (72 × 10^{-3} rem an^{-1}) (30 ans) = 2,16 rem, soit :

$$(2{,}16 \text{ rem}) / (250 \text{ rem}) = 0{,}86 \times 10^{-2} \text{ fois}$$

la dose qui double le nombre de décès par cancer (250 rem). On peut donc estimer que les rayons X diagnostiques sont, aux Etats-Unis, à l'origine d'environ :

$$(0{,}86 \times 10^{-2})\ (3 \times 10^5 \text{ décès par an}) = 2600 \text{ décès par an.}$$

---

29 La probabilité de mourir du cancer est doublée par une dose comprise entre 100 et 500 rem. Suivant l'hypothèse linéaire, le nombre annuel de décès $D(x)$ est fonction de la dose moyenne reçue x suivant la loi :

$$D(x) = [1 + x / (100 \text{ rem})]\ D(0)$$

si la dose doublante est 100 rem, ou $D(x) = [1 + x / (500 \text{ rem})]\ D(0)$ si la dose doublante est 500 rem. Si la dose reçue est 100 rem, le nombre de décès est $D(100 \text{ rem}) = 2\ D(0)$ dans la première hypothèse (le nombre de décès est doublé en un an) et $D(100 \text{ rem}) = 1{,}2\ D(0)$ dans la deuxième (le nombre de décès est doublé en 5 ans). La même règle est suivie par les mutations génétiques, mais la

dose doublante est comprise entre 25 et 150 rem. $D(x)$ est donc comprise entre $[1 + x / (150 \text{ rem})]\ D(0)$ et $[1 + x / (25 \text{ rem})]\ D(0)$. Pour une dose de 100 rem, on trouve un nombre de décès annuels compris entre 1,67 $D(0)$ (double après 1,5 an) et 5 $D(0)$ (double après 0,25 an).

31.4 RADIATIONS EN MÉDECINE

30 Seules les cellules situées sur l'axe de rotation sont soumises à une irradiation continue. Les autres cellules ne sont irradiées que pendant une petite fraction du temps total d'exposition du patient et reçoivent donc une dose très inférieure. La thérapie par rotation permet donc de choisir les cellules qui recevront une forte dose.

---

31 Les rayons X à faible dose produisent des cancers qui apparaissent de manière aléatoire dans une population très vaste. Utilisés à forte dose sur un malade, ils produisent à coup sûr des effets locaux destructeurs et servent alors à détruire directement et complètement les cellules malades.

31.5 AUTRES APPLICATIONS DES RADIATIONS

32 Sali avec de la poussière radioactive, le linge présente une activité mesurable. Pendant le lavage, le détergent déloge et élimine une fraction des poussières, en fonction de son efficacité. La comparaison de l'activité du linge avant et après lavage permet donc une mesure quantitative de l'efficacité du détergent.

31.6 DÉTECTION ET MESURE DES RADIATIONS

34 En rencontrant des atomes d'hydrogène, les neutrons perdent rapidement leur énergie : la masse de ces atomes est en effet pratiquement égale à celle des neutrons et, dans le cas d'une collision élastique, le transfert d'énergie cinétique est maximum. Les neutrons sont donc rapidement arrêtés par un matériau hydrogéné et l'interposition de plaques de ces matériaux entre la source et le détecteur pour former un écran de plus en plus épais conduit à un comptage Geiger-Mueller de plus en plus faible.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

SOLUTION DES PROBLÈMES

35 (a) Un photon X est un quantum d'énergie électromagnétique : son énergie ne peut pas être absorbée *progressivement* par la matière traversée : il disparaît entièrement après avoir parcouru une distance d'autant plus grande, en moyenne, que son énergie (ou sa fréquence) est plus élevée. Une mince feuille d'aluminium arrête les rayons X mous, peu énergétiques. Les rayons plus durs, qui ont un parcours plus long que l'épaisseur de la feuille, traversent celle-ci sans subir de diminution de leur énergie. (b) Les rayons X mous sont arrêtés superficiellement, dès l'entrée dans la matière absorbante et ne sont d'aucune utilité dans les techniques médicales qui, précisément, comptent sur la forte pénétration des rayons X. Les supprimer à l'aide d'une mince feuille d'aluminium permet de diminuer les dégâts d'irradiation au niveau de la peau exposée.

---

36 (a) 1000 Ci représentent $(1000)\ (3{,}70 \times 10^{10}) = 3{,}7 \times 10^{13}$ désintégrations par seconde. La puissance absorbée par le plomb est dans ce cas :

$$(3{,}7 \times 10^{13}\ \text{s}^{-1})\ (2{,}5 \times 10^{6})\ (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{J}) = 14{,}8\ \text{W}.$$

---

37 (a) La source de ^{60}Co de 10 Ci subit $(10)\ (3{,}70 \times 10^{10}) = 0{,}370 \times 10^{12}$ désintégrations par seconde, ce qui représente $7{,}40 \times 10^{11}$ photons gamma. (b) A 1 m de la source, ce rayonnement traverse une surface $S = 4\ \pi\ (1\ \text{m})^2 = 12{,}6\ \text{m}^2$. Le flux est donc de $(7{,}40 \times 10^{11}\ \text{s}^{-1}) / (12{,}6\ \text{m}^2) = 5{,}89 \times 10^{10}\ \text{m}^{-2}\ \text{s}^{-1}$.

---

38 10 Ci correspondent à $(10)\ (3{,}70 \times 10^{10}) = 3{,}70 \times 10^{11}$ désintégrations par seconde. Chacune de ces désintégrations produit un électron (particule β^-). A 2 m de la source, les $3{,}70 \times 10^{11}$ électrons se distribuent sur une surface $S = 4\ \pi\ (2\ \text{m})^2 = 50{,}26\ \text{m}^2$. Le flux est donc :

$$\phi = (3{,}70 \times 10^{11})\ (50{,}26\ \text{m}^2) = 7{,}36 \times 10^{9}\ \text{m}^{-2}\ \text{s}^{-1}$$

et sur 1 cm^2, ou $1 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$, $(7{,}36 \times 10^{9}\ \text{m}^{-2}\ \text{s}^{-1})\ (1 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) = 7{,}36 \times 10^{5}$ électrons tombent par seconde.

---

39 Une exposition de 1 R (un roentgen) à des rayons X ou des rayons gamma produit dans un matériau mou une dose absorbée d'environ 1 rad. Ainsi, 100 R de rayons X de 200 keV produisent une dose absorbée de 100 rad. Pour cette radiation, le FEB (facteur d'efficacité biologique) vaut exactement 1 et la dose biologiquement équivalente vaut 100 rem.

---

40 (a) Le nombre de particules ΔN qui, à chaque seconde, traversent la surface d'une sphère de rayon R centrée sur une source isotrope est égal au nombre de

particules émises par seconde par la source et est donc indépendant de R. Le flux de particules $\Delta N / (4 \pi R^2)$ (et donc aussi l'exposition) est ainsi inversement proportionnel au carré de la distance à la source. (b) Si la source de 1 mg de Ra produit 8,2 rad h^{-1} à une distance de 0,01 m, la dose biologiquement équivalente reçue d'une source de 60 mg, à la même distance, représente :

$$(0{,}965 \text{ rem rad}^{-1})\ (60 \text{ mg})\ (8{,}2 \text{ rad h}^{-1} \text{ mg}^{-1}) = 475 \text{ rem h}^{-1}.$$

On atteint une dose de 100 rem après un temps :

$$t = (100 \text{ rem}) / (475 \text{ rem h}^{-1}) = 0{,}21 \text{ h, ou } 12{,}6 \text{ min.}$$

A 0,05 m, la dose reçue est divisée par 25 et le temps nécessaire à l'accumulation de 100 rem est 25 fois plus long (5,25 h).

---

41 Soit m la masse de matière radioactive injectée. Diffusant dans le système circulatoire du patient, elle se disperse dans le volume V (cherché) du sérum. Du fait de la dilution, un échantillon de volume v prélevé par la suite sur le patient contient une masse $(v / V)\ m$ de matière injectée. Puisé dans le volume $V_r = 2000 \text{ cm}^3$ du système témoin, le second échantillon de volume v contient une masse $(v / V_r)\ m$ de matière radioactive. Le rapport des masses dans les échantillons, $[(v / V_r)\ m] / [(v / V)\ m] = V / V_r$ doit être égal au rapport des activités, $A_r / A = (1892 - 155) / (2600 - 155) = 0{,}710$. Le volume total de sérum est donc $V = (0{,}710)\ V_r = (0{,}710)\ (2000 \text{ cm}^3) = 1420 \text{ cm}^3$.

---

42 (a) 10 μCi représentent une activité de :

$$(10 \times 10^{-6})\ (3{,}70 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}) = 3{,}7 \times 10^5 \text{ désintégrations par seconde,}$$

ou $1{,}33 \times 10^9$ désintégrations par heure. (b) Chaque désintégration libère :

$$0{,}66 \times 10^6 \text{ eV d'énergie,}$$

ou $(0{,}66 \times 10^6 \text{ eV})\ (1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J eV}^{-1}) = 1{,}06 \times 10^{-13}$ J. En une heure,

$$(1{,}33 \times 10^9)\ (1{,}06 \times 10^{-13} \text{ J}) = 1{,}407 \times 10^{-4} \text{ J}$$

sont emportés par le rayonnement et le dixième, soit $1{,}407 \times 10^{-5}$ J sont absorbés par le corps de l'étudiant. (c) La dose absorbée (en rad) est le nombre de centièmes de joule dissipés dans un kilogramme de matière. Ici, chaque kilogramme absorbe $2{,}34 \times 10^{-7}$ J et la dose absorbée est ainsi $2{,}34 \times 10^{-5}$ rad. (d) La dose biologiquement équivalente est la dose absorbée multipliée par le FEB : $(0{,}8 \text{ rem rad}^{-1})\ (2{,}34 \times 10^{-5} \text{ rad}) = 1{,}88 \times 10^{-5}$ rem, ou 0,0188 millirem. (e) Le rapport entre cette dose et la dose naturelle de 88 millirem vaut 2×10^{-4}.

---

43 (a) L'énergie libérée en une heure par la source vaut $1{,}407 \times 10^{-4}$ J (voir le problème 31-42) et l'énergie absorbée par l'enfant en une heure correspond à la moitié de celle-ci, c'est-à-dire $0{,}7 \times 10^{-4}$ J. En un an,

$$(0{,}7 \times 10^{-4} \text{ J})\ (24)\ (365) = 0{,}616 \text{ J}$$

sont donc absorbés. (b) 1 rad correspond à l'absorption de 0,01 J par kg. La dose

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

absorbée en un an est donc ici [(0,616 J) / (0,01)] / (20 kg) = 3,08 rad. (c) La dose biologiquement équivalente est alors (3,08 rad) (0,8 rem rad^{-1}) = 2,46 rem, 28 fois supérieure à la dose reçue naturellement.

---

47 La population des Etats-Unis est de $2{,}2 \times 10^8$ habitants. Une dose moyenne de $3{,}1 \times 10^{-4}$ rad correspond donc à :

$$(3{,}1 \times 10^{-4} \text{ rad})\ (2{,}2 \times 10^8 \text{ habitants}) = 6{,}82 \text{ man-rad},$$

laquelle induit 4,30 nouveaux cancers. (b) Ceci représente un accroissement relatif de (4,30) / [(8400) (45)] = $1{,}14 \times 10^{-5}$. (c) Une dose de 0,02 rad reçue par une population de n bébés représente un nombre $C = (0{,}02\,n)\,(63) / (1 \times 10^6)$ de cancers. La probabilité que le cancer frappe l'un des bébés est donc égale à $C / n = 1{,}26 \times 10^{-6}$ (1 nouveau né sur 0,8 million sera atteint).

Exercices et problèmes dont les solutions ne se trouvent ni dans le présent ouvrage ni dans le manuel de Kane et Sternheim

Chapitre 1 Le mouvement rectiligne
1-38, 1-42, 1-50

Chapitre 2 Le mouvement à deux dimensions
2-8, 2-12, 2-19, 2-24, 2-34, 2-35, 2-39, 2.-43, 2-45, 2-50, 2-54

Chapitre 3 Les lois de Newton
3-6, 3-8, 3-10, 3-11, 3-14, 3-16, 3-18, 3-24, 3-26, 3-28, 3-32, 3-36, 3-38, 3-42, 3-60, 3-64, 3-68, 3-74, 3-76, 3-80, 3-82, 3-86, 3-90

Chapitre 4 La statique
4-2, 4-4, 4-10, 4-12, 4-14, 4-20, 4-22, 4-23, 4-28, 4-29, 4-30, 4-35, 4-37, 4-40, 4-44, 4-46, 4-48, 4-50, 4-52, 4-55, 4-56, 4-58

Chapitre 5 Le mouvement circulaire
5-12, 5-16, 5-18, 5-32, 5-34, 5-36, 5-40, 5-44, 5-50

Chapitre 6 Travail, énergie et puissance
6-2, 6-19, 6-23, 6-45, 6-55, 6-61 (énoncé incomplet), 6-62, 6-69, 6-70, 6-74

Chapitre 7 Quantité de mouvement et moment cinétique
7-7, 7-8, 7-9, 7-10, 7-16, 7-24, 7-26, 7-30, 7-34, 7-35, 7-44, 7-45, 7-48, 7-49, 7-51, 7-55, 7-56, 7-57, 7-59, 7-61, 7-63, 7-67, 7-69, 7-73, 7-75, 7-76, 7-77, 7-79, 7-82, 7-85, 7-86 (énoncé incomplet)

Chapitre 8 Propriétés élastiques des matériaux
8-4, 8-8, 8-12, 8-16, 8-18, 8-26, 8-28, 8-30, 8-34, 8-36, 8-38, 8-40, 8-44, 8-46, 8-58

Chapitre 9 Le mouvement vibratoire
9-12, 9-18, 9-24, 9-26, 9-30, 9-36, 9-38, 9-42, 9-44, 9-46, 9-48, 9-50, 9-54, 9-56, 9-60, 9-62, 9-65

Chapitre 10 La température et le comportement des gaz
10-3, 10-9, 10-11, 10-13, 10-15, 10-17, 10-21, 10-23, 10-25, 10-27, 10-31, 10-35, 10-41, 10-51, 10-55

Chapitre 11 Thermodynamique
11-10, 11-11, 11-14, 11-25, 11-30, 11-40, 11-48

Chapitre 12 Propriétés thermiques de la matière
12-4, 12-14, 12-18, 12-24, 12-30, 12-34, 12-35, 12-36, 12-40, 12-48, 12-50, 12-56, 12-62

Chapitre 13 La mécanique des fluides non visqueux
13-4, 13-10, 13-13, 13-16, 13-20, 13-22, 13-26, 13-28, 13-32, 13-40, 13-41, 13-44, 13-45, 13-50, 13-51

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 14 Écoulement des fluides visqueux
14-4, 14-8, 14-12, 14-15, 14-24, 14-26, 14-37, 14-41, 14-43, 14-47, 14-51, 14-57

Chapitre 15 Forces de cohésion dans les liquides
15-8, 15-12, 15-14, 15-15, 15-20, 15-25, 15-32

Chapitre 16 Forces électriques, champs et potentiels
16-8, 16-18, 16-22, 16-26, 16-38, 16-44, 16-47, 16-53

Chapitre 17 Courants continus
17-4, 17-6, 17-10, 17-14, 17-16, 17-20, 17-28, 17-30, 17-36, 17-53, 17-57, 17-63

Chapitre 18 Conduction nerveuse
18-8, 18-16, 18-20, 18-22, 18-24, 18-28, 18-30, 18-33, 18-35

Chapitre 19 Le magnétisme
19-12, 19-22, 19-26, 19-42, 19-44, 19-46, 19-48, 19-52

Chapitre 20 Courants et champs induits
20-19, 20-22, 20-24, 20-28, 20-29, 20-33, 20-40, 20-46, 20-48, 20-57, 20-64, 20-66, 20-75, 20-76, 20-77

Chapitre 21 Les ondes
21-2, 21-4, 21-8, 21-13, 21-24, 21-25, 21-32, 21-44, 21-46, 21-50, 21-55, 21-56, 21-58, 21-61

Chapitre 22 Les ondes sonores
22-14. 22-22, 22-27, 22-28, 22-29, 22-39, 22-40, 22-41, 22-45, 22-49, 22-55, 22-59

Chapitre 23 Propriétés ondulatoires de la matière
23-10, 23-14, 23-32, 23-34, 23-42, 23-44, 23-48, 23-52, 23-54, 23-58, 23-60, 23-61, 23-62, 23-63, 23-64, 23-66, 23-67, 23-70, 23-71, 23-72, 23-74, 23-76, 23-78, 23-79

Chapitre 24 Miroirs, lentilles et instruments d'optique
24-6, 24-16, 24-32, 24-34, 24-53, 24-56, 24-57, 24-58, 24-65, 24-68

Chapitre 25 La relativité restreinte
25-16, 25-19, 25-28, 25-33, 25-34, 25-36

Chapitre 26 Propriétés corpusculaires de la lumière : le photon
26-24

Chapitre 27 Propriétés ondulatoires de la matière
27-24, 27-26, 27-28, 27-32

Chapitre 28 Mécanique quantique et structure atomique
28-12, 28-16, 28-22, 28-26

Chapitre 29 La structure atomique de la matière
29-7, 29-8, 29-10, 29-15, 29-16, 29-19, 29-23, 29-26, 29-31, 29-32, 29-37, 29-39, 29-42

Chapitre 30 Physique nucléaire
30-6, 30-18, 30-26, 30-30, 30-48, 30-50, 30-54, 30-56

Chapitre 31 Radiations ionisantes
31-2, 31-8, 31-22, 31-24, 31-28, 31-33, 31-44, 31-46

Constantes physiques fondamentales

Quantité	*Symbole*	*Valeur numérique*
Vitesse de la lumière (dans le vide)	c	$3{,}00 \times 10^{8}$ m s^{-1}
Constante de gravitation	G	$6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
Nombre d'Avogadro	N_A	$6{,}02 \times 10^{23}$ molécules mole^{-1}
Constante molaire des gaz	R	8,31 J K^{-1} mole^{-1}
Constante de Boltzmann	k_B	$1{,}38 \times 10^{-23}$ J K^{-1}
		$8{,}62 \times 10^{-5}$ eV K^{-1}
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5{,}67 \times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}
Unité de masse atomique	uma (ou u)	$1{,}66 \times 10^{-27}$ kg
Constante de Coulomb	k	$9{,}00 \times 10^{9}$ N m^2 C^{-2}
	$\varepsilon_0 = 1/4\pi k$	$8{,}85 \times 10^{-12}$ C^2 N^{-1} m^2
Constante de Biot et Savart	k'	1×10^{-7} T m A^{-1}
Charge de l'électron	$-e$	$-1{,}60 \times 10^{-19}$ C
Masse de l'électron	m_e	$9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
Charge du proton	e	$1{,}60 \times 10^{-19}$ C
Masse du proton	m_p	$1{,}673 \times 10^{-27}$ kg
Masse du neutron	m_n	$1{,}675 \times 10^{-27}$ kg
Constante de Planck	h	$6{,}63 \times 10^{-34}$ J s
		$4{,}14 \times 10^{-15}$ eV s
	$\hbar = h/2\pi$	$1{,}055 \times 10^{-34}$ J s
		$6{,}58 \times 10^{-16}$ eV s
Constante de Rydberg	R_H	$1{,}10 \times 10^{7}$ m^{-1}
Rayon de Bohr	a_0	$5{,}29 \times 10^{-11}$ m
Magnéton de Bohr	μ_B	$9{,}27 \times 10^{-24}$ J T^{-1}

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Données astronomiques

Pression atmosphérique standard	1 atm $1{,}013 \times 10^5$ Pa 1,013 bar 760 mm Hg 760 torr
Accélération de la gravité g	9,81 m s^{-2}
Champ magnétique (Washington, D.C.)	$5{,}7 \times 10^{-5}$ T
Vitesse du son (air sec, 20°C)	344 m s^{-1}
Masse de la Terre	$5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Volume de la Terre	$1{,}09 \times 10^{21}$ m^3
Rayon moyen de la Terre	$6{,}38 \times 10^6$ m
Densité moyenne de la Terre	$5{,}52 \times 10^3$ kg m^{-3}
Vitesse angulaire moyenne de rotation de la Terre	$7{,}29 \times 10^{-5}$ rad s^{-1}
Distance moyenne Terre-Soleil	$1{,}50 \times 10^{11}$ m
Distance moyenne Terre-Lune	$3{,}84 \times 10^8$ m
Vitesse orbitale moyenne de la Terre autour du Soleil	$2{,}98 \times 10^4$ m s^{-1}
Rayon moyen du Soleil	$6{,}95 \times 10^8$ m
Masse du Soleil	$1{,}99 \times 10^{30}$ kg
Rayon moyen de la Lune	$1{,}74 \times 10^6$ m
Volume de la Lune	$2{,}20 \times 10^{19}$ m^3
Masse de la Lune	$7{,}35 \times 10^{22}$ kg
Densité moyenne de la Lune	$3{,}34 \times 10^3$ kg m^{-3}
Accélération moyenne de la gravité sur la Lune	1,62 m s^{-2}

Masses atomiques

N° at.	Elément	Symbole	Masse atom. (uma)	N° at.	Elément	Symbole	Masse atom. (uma)
1	hydrogène	H	1,00797	26	fer	Fe	55,847
2	hélium	He	4,0026	27	cobalt	Co	58,9332
3	lithium	Li	6,939	28	nickel	Ni	58,71
4	béryllium	Be	9,0122	29	cuivre	Cu	63,54
5	bore	B	10,811	30	zinc	Zn	65,37
6	carbone	C	12,01115	31	gallium	Ga	69,72
7	azote	N	14,0067	32	germanium	Ge	72,59
8	oxygène	O	15,9994	33	arsenic	As	74,9216
9	fluor	F	18,9984	34	sélénium	Se	78,96
10	néon	Ne	20,183	35	brome	Br	79,909
11	sodium	Na	22,9898	36	krypton	Kr	83,80
12	magnésium	Mg	24,312	37	rubidium	Rb	85,47
13	aluminium	Al	26,9815	38	strontium	Sr	87,62
14	silicium	Si	28,086	39	yttrium	Y	88,905
15	phosphore	P	30,9738	40	zirconium	Zr	91,22
16	soufre	S	32,064	41	niobium	Nb	92,906
17	chlore	Cl	35,453	42	molybdène	Mo	95,94
18	argon	Ar	39,948	43	technétium	Tc	[99]
19	potassium	K	39,102	44	ruthénium	Ru	101,07
20	calcium	Ca	40,08	45	rhodium	Rh	102,905
21	scandium	Sc	44,956	46	palladium	Pd	106,4
22	titanium	Ti	47,90	47	argent	Ag	107,870
23	vanadium	V	50,942	48	cadmium	Cd	112,40
24	chrome	Cr	51,996	49	indium	In	114,82
25	manganèse	Mn	54,9380	50	étain	Sn	118,69

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

N° at.	Elément	Symbole	Masse atom. (uma)	N° at.	Elément	Symbole	Masse atom. (uma)
51	antimoine	Sb	121,75	79	or	Au	196,967
52	tellure	Te	127,60	80	mercure	Hg	200,59
53	iode	I	126,9044	81	thallium	Tl	204,37
54	xénon	Xe	131,30	82	plomb	Pb	207,19
55	césium	Cs	132,905	83	bismuth	Bi	208,980
56	barium	Ba	137,34	84	polonium	Po	[210]
57	lanthane	La	138,91	85	astate	At	[210]
58	cérium	Ce	140,12	86	radon	Rn	[222]
59	praséodyme	Pr	140,907	87	francium	Fr	[223]
60	néodyme	Nd	144,24	88	radium	Ra	226,05
61	prométhium	Pm	[145]	89	actinium	Ac	[227]
62	samarium	Sm	150,35	90	thorium	Th	232,038
63	europium	Eu	151,96	91	protactinium	Pa	[231]
64	gadolinium	Gd	157,25	92	uranium	U	[238,03]
65	terbium	Tb	158,924	93	neptunium	Np	[237]
66	dysprosium	Dy	162,50	94	plutonium	Pu	[242]
67	holmium	Ho	164,930	95	americium	Am	[243]
68	erbium	Er	167,26	96	curium	Cm	[247]
69	thulium	Tm	168,934	97	berkélium	Bk	[247]
70	ytterbium	Yb	173,04	98	californium	Cf	[249]
71	lutétium	Lu	174,97	99	einsteinium	Es	[254]
72	hafnium	Hf	178,49	100	fermium	Fm	[257]
73	tantale	Ta	180,948	101	mendélévium	Md	[256]
74	tungstène	W	183,85	102	nobélium	No	[259]
75	rhénium	Re	186,2	103	lawrencium	Lw	[260]
76	osmium	Os	190,2	104	(sans nom)		[261]
77	iridium	Ir	192,2	105	(sans nom)		[262]
78	platine	Pt	195,09	106	(sans nom)		[263]