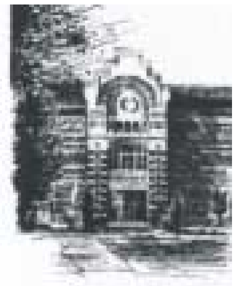

Devoir non surveillé 15

Corrigé

PROBLEME

On note $p : x \mapsto e^{x} = \exp(x)$, $q : x \mapsto e^{2x} = \exp(2x)$, $r : x \mapsto e^{x^2} = \exp(x^2)$. On note $\mathcal{B} = \{p, q, r\}$ et $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel engendré de $\mathcal{C}^{\infty}(\mathsf{R}, \mathsf{R})$ par la famille $\mathcal{B}$.

Partie I

On se propose de prouver que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$, au moyen de diverses méthodes. De par la définition de $\mathcal{E}$, il nous suffit de prouver que la famille $\mathcal{B}$ est libre ; soit donc a, b, c trois réels tels que $a.p + b.q + c.r = 0$ (où 0 désigne la fonction nulle).

1. L'étudiant Antoine a évalué l'expression $(a.p + b.q + c.r)(x)$ pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$.
   On obtient donc le système suivant :
   $$\left\{\begin{array}{llllll} \boxed{a} & + & b & +c & = 0 & \text{avec } x = 0 \\ a.e & + & b.e^2 & +c.e & = 0 & \text{avec } x = 1 \\ a.e^2 & + & b.e^4 & +c.e^4 & = 0 & \text{avec } x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} a & +b & +c & = 0 \\ & +\boxed{b.(e^2 - e)} & & = 0 \\ & +b.(e^4 - e^2) & +\boxed{c.(e^4 - e^2)} & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{array}\right.$$
   Donc la famille $\mathcal{B}$ est libre or on sait qu'elle est génératrice donc,
   $$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base } \mathcal{E}}$$

2. Antoine a utilisé le fait que $e^2 - e = e(e-1) \neq 0$ et $e^4 - e^2 = e^2(e+1)(e-1) \neq 0$, or le nombre e est défini comme l'unique antécédent de 1 pour la bijection $\ln$, on en déduit donc que $e > 0$ et $e \neq 1$ puisque $\ln(1) = 0$.

3. L'étudiant Nicolas a observé le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de l'application $a.p + b.q + c.r$.
   On a $\begin{array}{lllll} p = & 1 & +x & +\frac{1}{2}x^2 & +o(x^2) \\ q = & 1 & +2x & +2x^2 & +o(x^2) \\ r = & 1 & & +x^2 & +o(x^2) \end{array}$. Si on suppose que $a.p + b.q + c.r = 0$, de l'unicité du développement limité on en déduit le système suivant :
   $$\left\{\begin{array}{lllll} a & +b & \boxed{+c} & = 0 & \text{coefficient de } 1 \\ a & +2.b & & = 0 & \text{coefficient de } x \\ \frac{1}{2}.a & +2.b & +c & = 0 & \text{coefficient de } x^2 \end{array}\right.$$
   $$\left\{\begin{array}{llll} a & +b & +c & = 0 \\ \boxed{a} & +2.b & & = 0 \\ -\frac{1}{2}.a & +b & & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} a & +b & +c & = 0 \\ \boxed{a} & +2.b & & = 0 \\ & +2b & & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{array}\right.$$
   Donc la famille $\mathcal{B}$ est libre, donc
   $$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base } \mathcal{E}}$$

4. L'étudiant Luc a eu une autre idée : il s'est intéressé au comportement de chacune des trois fonctions p, q, r au voisinage de $+\infty$.
Posons $s(x) = a.e^x + b.e^{2x} + c.e^{x^2}$,on suppose toujours que $s = 0$. Des trois fonctions p, q, r, celle qui domine en $+\infty$ est r, en effet $\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{r(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{x-x^2} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{q(x)}{r(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{2x-x^2} = 0$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{s(x)}{r(x)} = c$, donc $c = 0$, on a alors $s(x) = a.e^x + b.e^{2x}$, la fonction q domine la fonction p en $+\infty$ ($\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$), donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{s(x)}{q(x)} = b$, donc $b = 0$. Finalement, on a $s(x) = a.e^x = 0$, ce qui nous donne immédiatement $a = 0$. Moralité $a = b = c = 0$, la famille $\mathcal{B}$ est libre, donc
$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base } \mathcal{E}}$$

5. La famille $\mathcal{B}$ est une base de E et elle contient trois éléments, donc
$$\boxed{\dim(E) = 3}$$
Si $\mathcal{B}$ est une base de E, on a $\dim(E) = card(\mathcal{B}) = \#(\mathcal{B})$, où $card$ désigne le cardinal, noté aussi $\#$, i.e. le nombre d'éléments pour un ensemble (famille) fini, on ne note pas $\dim(E) = \dim(\mathcal{B})$.

On note ψ l'application qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe le triplet de réels $(f(0), f'(0), f(1))$.

6. L'application ψ est une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^3$, en effet, elle l'est coordonnée par coordonnée puisque l'évaluation et la dérivation sont des applications linéaires. On note que $\dim \mathcal{E} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, pour montrer que ψ est un isomorphisme, il suffit donc montrer qu'il est injectif. Soit $f = ap + bq + cr$ dans $\ker f$, on a donc $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$, on en déduit donc que
$$\left\{\begin{array}{llll} a & +b & +\boxed{c} & = 0 \\ a & +2.b & & = 0 \\ ae & +be^2 & +ce & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{llll} a & +b & +\boxed{c} & = 0 \\ a & +2.b & & = 0 \\ & +b(e^2 - e) & & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{array}\right.$$
On en conclut donc que ψ est injective donc
$$\boxed{\psi \text{ est un isomorphisme du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } \mathcal{E} \text{ sur le } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } \mathbb{R}^3}$$

7. Soit $f = a.p + b.q + c.r$ un élément de $\mathcal{E}$. On a donc
$$\left\{\begin{array}{llll} a & +b & +\boxed{c} & = f(0) \\ a & +2.b & & = f'(0) \\ ae & +be^2 & +ce & = f(1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{llll} a & +b & +\boxed{c} & = f(0) \\ a & +2.b & & = f'(0) \\ & +b(e^2 - e) & & = f(1) - ef(0) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = \frac{2}{e-1}f(0) + f'(0) - \frac{2}{e(e-1)}f(1) \\ b = -\frac{1}{e-1}f(0) + \frac{1}{e(e-1)}f(1) \\ c = \frac{e-2}{e-1}f(0) - f'(0) + \frac{1}{e(e-1)}f(1) \end{array}\right.$$
On a donc
$$\boxed{\begin{array}{llll} \psi^{-1}: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathcal{E} \\ & \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f(1) \end{pmatrix} & \mapsto & f = a.p + b.q + c.r \text{ avec } \left\{\begin{array}{l} a = \frac{2}{e-1}f(0) + f'(0) - \frac{2}{e(e-1)}f(1) \\ b = -\frac{1}{e-1}f(0) + \frac{1}{e(e-1)}f(1) \\ c = \frac{e-2}{e-1}f(0) - f'(0) + \frac{1}{e(e-1)}f(1) \end{array}\right. \end{array}}$$

Partie II

On note φ l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe $\varphi(f) = A.p + B.q + C.r$ où

$$\begin{cases} A = \frac{2}{e-1} f(0) + f'(0) + \frac{2}{e(e-1)} f(1) \\ B = -\frac{1}{e-1} f(0) - \frac{1}{e(e-1)} f(1) \\ C = \frac{e-2}{e-1} f(0) - f'(0) - \frac{1}{e(e-1)} f(1) \end{cases}$$

8. On note θ l'endomorphisme de R^3 défini par $\theta(a,b,c) = (a,b,-c)$. Soit $f = a.p + b.q + c.r$ un élément de $\mathcal{E}$. On a donc

$$f \xrightarrow{\psi} \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f(1) \end{pmatrix} \xrightarrow{\theta} \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ -f(1) \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi^{-1}} \begin{pmatrix} a = \frac{2}{e-1} f(0) + f'(0) + \frac{2}{e(e-1)} f(1) \\ b = -\frac{1}{e-1} f(0) - \frac{1}{e(e-1)} f(1) \\ c = \frac{e-2}{e-1} f(0) - f'(0) - \frac{1}{e(e-1)} f(1) \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\varphi = \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi}$$

L'endomorphisme φ est la composée de trois isomorphismes (θ est involutive donc bijective), on en déduit donc que

$$\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de l'espace vectoriel } \mathcal{E}.}$$

9. On trouve immédiatement

$$\boxed{\begin{cases} \varphi(p) & = & \frac{e+3}{e-1}p & - & \frac{2}{e-1}q & - & \frac{2}{e-1}r \\ \varphi(q) & = & \frac{4e}{e-1}p & - & \frac{e+1}{e-1}q & - & \frac{2e}{e-1}r \\ \varphi(r) & = & \frac{4}{e-1}p & - & \frac{2}{e-1}q & + & \frac{e-3}{e-1}r \end{cases}}$$

10. On en déduit immédiatement que

$$\boxed{M = \mathcal{M}at(\varphi, \mathcal{B}) = \frac{1}{e-1} \begin{pmatrix} e+3 & 4e & 4 \\ -2 & -e-1 & -2 \\ -2 & -2e & e-3 \end{pmatrix}}$$

11. On a $\varphi \circ \varphi = \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi = \psi^{-1} \circ \theta^2 \circ \psi = \psi^{-1} \circ Id \circ \psi = Id$ et

$$\begin{pmatrix} e+3 & 4e & 4 \\ -2 & -e-1 & -2 \\ -2 & -2e & e-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e+3 & 4e & 4 \\ -2 & -e-1 & -2 \\ -2 & -2e & e-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2-2e+1 & 0 & 0 \\ 0 & e^2-2e+1 & 0 \\ 0 & 0 & e^2-2e+1 \end{pmatrix}$$

On vérifie bien que $M^2 = I_3$, on en déduit que

$$\boxed{\varphi \text{ est une symétrie.}}$$

Partie III

12. On note $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ invariants par φ. On remarque que

$$\{\varphi(f) = f\} \Longleftrightarrow \left\{\psi^{-1} \circ \theta \circ \psi(f) = f\right\} \Longleftrightarrow \{\theta(\psi(f)) = \psi(f)\}$$

Or les éléments invariants de θ sont clairement $\{(x,y,z) \in \mathsf{R}^3 / z = 0\}$, et comme $\psi(f) = (f(0), f'(0), f(1))$, on en déduit donc que

$$\{\varphi(f) = f\} \Longleftrightarrow \{f(1) = 0\}$$

Moralité

$$\boxed{\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} / f(1) = 0\}}$$

En considérant la forme linéaire $ev_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(1) \end{array}$, on en déduit donc que $\mathcal{P} = \ker(ev_1)$, d'après le théorème du rang, $\mathcal{P}$ est un hyperplan de $\mathcal{E}$, espace vectoriel de dimension 3. On en déduit par conséquent que

$$\boxed{\mathcal{P} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{E} \text{ de dimension deux}}$$

Soit $f = ap + bq + cr$ dans $\mathcal{P}$, on a donc

$$(ap + bq + cr)(1) = ae + be^2 + ce = 0$$

On en déduit donc que

$$f = ap + bq + cr \in \mathcal{P} \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} a & = & -eb & - & c \\ b & = & b & & \\ c & = & & & c \end{array} \right.$$

On en déduit immédiatement que

$$\boxed{\mathcal{P} = vect(-ep + q, r - p)}$$

Or $\mathcal{P}$ est de dimension 2, on en déduit donc que $e_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{2x} - e^{x+1} \end{array}$ et $e_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x^2} - e^x \end{array}$ forment une base de $\mathcal{P}$.

13. On note $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = -f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ transformés en leur opposé par φ. On remarque que

$$\{\varphi(f) = -f\} \iff \{\psi^{-1} \circ \theta \circ \psi(f) = -f\} \iff \{\theta(\psi(f)) = -\psi(f)\}$$

Or les vecteurs de $\mathcal{E}$ transformés en leur opposé par θ sont clairement $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0\}$, et comme $\psi(f) = (f(0), f'(0), f(1))$, on en déduit donc que

$$\{\varphi(f) = -f\} \iff \{f(0) = f'(0) = 0\}$$

Soit $f = ap + bq + cr$ dans $\mathcal{D}$, on a donc

$$\begin{array}{rl} (ap + bq + cr)(0) & = a + b + c = 0 \\ (ap + bq + cr)'(0) & = a + 2b = 0 \end{array}$$

On en déduit donc que

$$f = ap + bq + cr \in \mathcal{D} \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & -2b \\ b & = & b \\ c & = & b \end{array} \right.$$

On en déduit immédiatement que

$$\boxed{\mathcal{D} = vect(-2p + q + r)}$$

On en déduit par conséquent que

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{E} \text{ de dimension un, d'équations } \left\{ \begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & + & 2b & & & = & 0 \end{array} \right.}$$

Le vecteur $e_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2e^x + e^{2x} + e^{x^2} \end{array}$ est une base de $\mathcal{D}$ et les éléments de $\mathcal{D}$ sont caractérisés par

$$\boxed{f(0) = f'(0) = 0}$$

14. Afin de démontrer que $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$, il faut prouver que $\dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{D} = \dim \mathcal{E}$ (ce qui est immédiat) et $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \{0\}$. Soit f dans $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}$, on a donc $\theta(\psi(f)) = \psi(f)$ et $\theta(\psi(f)) = -\psi(f)$, on en déduit immédiatement que $\psi(f) = 0$ et comme ψ est un isomorphisme, on a donc $f = 0$. On donc

$$\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}}$$

15. On a (e_1, e_2) base de $\mathcal{P}$ et (e_3) base de $\mathcal{D}$, on en déduit donc que (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de $\mathcal{P} + \mathcal{D}$, cette famille sera libre puisque la somme est directe, on en déduit donc que

$$\boxed{\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } \mathcal{E}.}$$

16. On en déduit immédiatement de tout ce qui précède que

$$\mathcal{M}at(\varphi, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien le fait que

$$\boxed{\varphi \text{ est une symétrie de base } \mathcal{P} \text{ et de direction } \mathcal{D}}$$

Partie IV

On se propose de développer ici l'idée suivie par l'étudiant Luc dans la première partie (question 4). On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont le terme constant est nul ; pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n. On identifie un polynôme et la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ qui lui est naturellement associée.

17. Montrons que $\mathcal{F}$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$:
• $\mathcal{F}$ est non vide car 0 (le polynôme nul) a son coefficient constant nul.
• $\mathcal{F}$ est stable par combinaison linéaire : soient P et Q deux éléments de $\mathcal{F}$ et a, b deux réels alors le coefficient constant de $aP + bQ$ est la combinaison linéaire des coefficients constants de P et Q, donc nul.

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X]}$$

On pouvait être plus efficace en remarquant que $\mathcal{F} = \{P \in \mathbb{R}[X], p(0) = 0\}$, i.e. $\mathcal{F} = Ker(ev_0)$ où ev_0 est la forme linéaire définie par $ev_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & p(0) \end{array}$.

Remarquons tout d'abord que $\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n[X]$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ car l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel, il sera d'autre part de dimension finie en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. On a de manière évidente :

$$\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n[X] = \{a_n X^n + \ldots + a_1 X,\ a_n, \ldots, a_1 \in \mathbb{R}\} = Vect(X^n, \ldots, X)$$

La famille $(X^n, \ldots, X)$ est donc génératrice, elle est libre aussi car c'est une sous famille de la base canonique, donc

$$\boxed{\begin{array}{c} (X^n, \ldots, X) \text{ est une base de } \mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n[X] \\ \dim \mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n[X] = n \end{array}}$$

18. Soit $(P_k)_{1\leq k\leq q}$ une famille de polynômes vérifiant la condition suivante

$$\text{pour } 1 \leq k \leq q, P_{k+1}(x) - P_k(x) \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty$$

On note $f_k = \exp \circ P_k$ la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $f_k(x) = e^{P_k(x)} = \exp(P_k(x))$.
Pour n tel que $1 \leq n \leq q$, $\mathcal{P}(n)$ désigne la proposition "la famille $(f_k)_{1\leq k\leq n}$ est libre", montrons la par récurrence :
• Initialisation : La proposition $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée car f_1 n'est pas l'application nulle.
• Hérédité : Soit n tel que $1 \leq n \leq q-1$, supposons que la proposition $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. la famille $(f_k)_{1\leq k\leq n+1}$ est libre. Ecrivons $a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n + a_{n+1} f_{n+1} = 0$ (0 est l'application nulle), montrons que les réels $a_1 = \cdots = a_{n+1} = 0$. Sachant $\mathcal{P}(n)$, il suffit de montrer que $a_{n+1} = 0$.
Pour $1 \leq k \leq n$, $p_k(x) - p_{n+1}(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (ceci découle d'une addition des conditions $p_{k+1}(x) - p_k(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$), donc $\frac{f_k(x)}{f_{n+1}(x)} = e^{p_k(x) - p_{n+1}(x)}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on en conclut alors que $a_{n+1} = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (f_k)_{1\leq k\leq q} \text{ est libre}}$$