Devoir n$^\circ$ 23

Exercice. Réduction des endomorphismes nilpotents

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{R}$-ev est dit *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$. Dans ce cas, *l'indice* de u est le plus petit entier p tel que $u^p = 0$, on le note $ind(u)$ On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1. Soit $x_0 \in E \setminus \mathrm{Ker} u^{p-1}$. Montrer que la famille $\left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0)\right)$ est libre.

2. En déduire que si E est de dimension finie n, alors $u^n = 0$.

3. On suppose désormais que $ind(u) = n$. Montrer que : $\ker(u) \subset \ker(u^2) \subset ... \subset \ker(u^n) = E$ en justifiant que chaque inclusion est stricte.

4. Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ est une base de E si $x_0 \notin \ker(u^{n-1})$. Une telle base sera appelé base réduite de E associée à l'endomorphisme f.

5. Montrer que $Vect(u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0)) \subset \ker(u^{n-1})$. En déduire que l'on a $\dim(\ker(u^{n-1})) = n - 1$.

6. Soit $0 \leq p \leq n$. Montrer que $\dim(\ker(u^{n-p})) = n - p$.

7. En déduire la dimension de $\mathrm{im}(u)$.

Exercice 2. On se propose de déterminer la décomposition en élément simple de $F_n(X) = \dfrac{1}{X^n(X^2+1)}$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, de $F_1(X)$ et $F_2(X)$.

2. On se propose de déterminer dans le cas général la partie polaire de 0.

   (a) Déterminer le DL en 0 à l'ordre n de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$.

   (b) En déduire l'existence de réels $a_1, \ldots, a_n$ que l'on déterminera tels que

$$F_n(x) - \frac{a_1}{x} - \ldots - \frac{a_n}{x^n}$$

   a une limite finie en 0.

   (c) Montrer que la fraction rationnelle $F_n(X) - \dfrac{a_1}{X} - \ldots - \dfrac{a_n}{X^n}$ n'a pas de pole en 0. En déduire la partie polaire de 0 pour $F_n(X)$

3. Déterminer la décomposition en élément simple de $F_n(X)$ sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3(x^2+1)}$.

Problème

On note $\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}$-algèbre des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On notera P' le polynôme dérivé d'un polynôme P.

Partie A. La formule d'Euler-Mac Laurin

I. Polynômes et nombres de Bernoulli

On dit qu'une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes de Bernoulli si elle vérifie les propriétés suivantes notées (P_1)

- $B_0 = 1$
- pour tout $n \geq 0$, $B'_{n+1} = (n+1)B_n$.
- Pour tout $n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0)$.

1. Soit (B_n) une suite de polynômes de Bernoulli.

(a) Montrer que nécessairement $B_1(X) = X - \dfrac{1}{2}$ et $B_2(X) = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$.

(b) Déterminer B_3 et B_4.

2. On se proprose de montrer qu'il existe une unique suite de polynômes qui vérifie les propriétés (P_1).

(a) Si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, montrer qu'il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$ et $\displaystyle\int_0^1 Q(t)\,dt = 0$.
On note alors L l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ qui à P associe Q.

(b) Montrer qu'une suite de polynômes (B_n) vérifie (P_1) si et seulement si elle vérifie la propriété suivante noté (P_2)

- $B_0 = 1$
- pour tout $n \geq 0$, $B_{n+1} = (n+1)L(B_n)$.

(c) En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes vérifiant les propriétés (P_1). On notera cette suite (B_n) et on l'appelera **la** suite de polynômes de Bernoulli.

3. Déduire de la question **2.** que pour tout entier naturel n, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.

4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)dx$ s'exprime de manière simple en fonction de n, $B_{n+1}(1)$ et $B_{n+1}(0)$.

5. On pose, $b_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $b_n = B_n(0)$. b_n est par définition le $(n+1)$-ième nombre de Bernoulli.

(a) Calculer b_0, b_1, b_2, b_3, b_4.

(b) Montrer que pour tout entier impair $n \geq 3$, $b_n = 0$.

II. Application au calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$

6. Soit p un entier naturel, on définit l'application Δ de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ vers $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

(a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$.

(b) Déterminer $\ker(\Delta)$.

(c) Montrer que $\operatorname{im}(\Delta) = \mathbb{R}_p[X]$.

7. En déduire que pour tout entier naturel p, il existe un et un seul polynôme Q de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ tel que $\Delta(Q) = (p+1)X^p$ et $\displaystyle\int_0^1 Q(t)\,dt = 0$.

8. Montrer que ce polynôme Q est en fait B_{p+1}. (On pourra raisonner par récurrence)

9. En déduire que pour tout entier $p \geq 1$ et tout entier $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} B_{p+1}(n+1) - \frac{1}{(p+1)} b_{p+1}$.

10. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

La suite est facultative sauf pour Caudroit, Cosse, Delrue et Deroullers

III. Calculs des nombres de Bernoulli

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $deg(B_n) = n$.

12. On se proprose de déterminer une relation sur les nombres de Bernoulli.

(a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$, $B_n^{(k)}(0) = \dfrac{n!}{(n-k)!} b_{n-k}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$.

13. En déduire que pour $p \in \mathbb{N}$, $b_{2p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} b_k$.

14. Montrer enfin pour $p \geq 2$, que $b_{2p} = -\dfrac{1}{(2p+2)(2p+1)} \displaystyle\sum_{k=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{k} b_k$

15. Calculer b_6.

IV. La formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin (facultatif)

On note f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0,1]$ et on pose pour $k \geq 1$, $R_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k!} \displaystyle\int_0^1 B_k(x) f^{(k)}(x)\,dx$.

16. Montrer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1,

$$R_k = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} b_{k+1}(f^{(k)}(1) - f^{(k)}(0)) + R_{k+1}$$

17. (a) Etablir que $\dfrac{1}{2}(f(0)+f(1)) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx + R_1$

(b) En déduire que pour tout entier $k \geq 1$,

$$\frac{1}{2}(f(0)+f(1)) = \int_0^1 f(x)\,dx + \sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} b_j(f^{(j-1)}(1) - f^{(j-1)}(0)) + R_k$$

18. On note g une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$. On note $\tilde{B}_n$ l'unique fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec B_n sur l'intervalle $[0,1[$.

(a) Montrer que pour tout $i \geq 1$ et $k \geq 2$,

$$\int_0^1 B_k(x) g^{(k)}(x+i-1)\,dx = \int_{i-1}^{i} \tilde{B}_k(x) g^{(k)}(x)\,dx$$

(b) En déduire que pour tout $i \geq 1$ et $k \geq 2$,

$$\frac{1}{2}(g(i)+g(i-1)) = \int_{i-1}^{i} g(x)\,dx + \sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} b_j(g^{(j-1)}(i) - g^{(j-1)}(i-1)) + \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_{i-1}^{i} \tilde{B}_k(x) g^{(k)}(x)\,dx$$

(c) En déduire pour $k \geq 2$ et $n \geq 1$, la formule dîte d'Euler-Mac Laurin

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} g(i) = \int_0^n g(x)\,dx + \frac{1}{2}(g(n)-g(0)) + \sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} b_j(g^{(j-1)}(n) - g^{(j-1)}(0)) + \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \tilde{B}_k(x) g^{(k)}(x)\,dx}$$

19. Appliquer la formule d'Euler-MacLaurin pour trouver une expression de $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$ comme un polynôme en n.