

MATHEMATIQUES - Série D - SESSION 2005

- N. B : - Le candidat doit traiter les DEUX Exercices et le Problème.
- Machine à calculer autorisée.

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On note A le point d'affixe i .

1°) Résoudre dans C l'équation à une inconnue z suivante : $\frac{iz - 2 + 4i}{z - i} = z$.

2°) A tout point M d'affixe z , avec $z \neq i$, on associe le point M' d'affixe z'

$$\text{tel que : } z' = \frac{iz - 2 + 4i}{z - i}.$$

a/ Exprimer $z' - i$ en fonction de z .

b/ Montrer que $(z' - i)(z - i) = -3 + 4i$.

c/ En déduire la valeur de $|z' - i| \cdot |z - i|$.

d/ Déterminer l'ensemble (C) des points M tels que $|z - i| = \sqrt{10}$.

e/ En utilisant les résultats précédents, montrer que si M appartient au cercle de centre A et de rayon $\sqrt{10}$.

Alors M' appartient à un cercle (C') de centre A dont on déterminera le rayon.

3°) Soit S la similitude plane directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\frac{5}{4}$.

a/ Ecrire l'expression complexe de S.

b/ Soit B le point d'affixe $1 + 3i$ et $B' = S(B)$. Déterminer l'affixe de B'.

Montrer que B' appartient au cercle (C).

EXERCICE 2 (5 points)

On dispose de deux dés cubiques parfaits et identiques D_1 et D_2 .

Chaque dé comporte :- trois faces numérotées 1

- deux faces numérotées 2

- une face numérotée 5.

1°/ On lance une fois le dé D_1 et on note le numéro apparu sur la face supérieure du dé.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Le numéro apparu est impair ».

B : « Le dé donne le numéro 1 ».

2°/ On lance simultanément les deux dés D_1 et D_2 et on note les numéros apparus sur les faces supérieures des deux dés. On dit qu'on a effectué ainsi "une épreuve".

a) Soit l'événement C : « La somme des numéros notés est égale à 4 ».

Montrer que la probabilité de l'événement C : $P(C) = \frac{1}{9}$.

b) Calculer la probabilité de l'événement :

E : « Les deux dés donnent le même numéro ».

c) Soit X la variable aléatoire réelle qui, à chaque éventualité, associe la somme des numéros apparus sur les faces supérieures des deux dés.

Préciser l'univers image de X puis déterminer la loi de probabilité de X.

3°/ Une partie consiste à effectuer 4 épreuves successives d'une manière indépendante.

A chaque épreuve, on note les numéros obtenus. On fait une partie. Soit Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois de réalisation de l'événement C lors d'une partie.

a) Préciser l'univers image de Y.

b) Calculer l'espérance $E(Y)$ et la variance $V(Y)$ de Y.

c) Calculer $P(Y = 3)$.

PROBLEME**(10 points)**

Soit la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 \ln(x+1) & \text{si } x \in]-1, 0[\\ x - 1 + e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}.$$

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité : 2cm).

1°) a/ Montrer que f est continue en $x_0 = 0$.

b/ Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

Que peut-on en conclure sur f ?

2°) a / Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b/ si $x \in]-1, 0[$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

c/ si $x \in]0, +\infty[$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

d/ Dresser le tableau de variation de f .

3°) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

4°) Tracer (C) et (D) dans un même repère (préciser les demi-tangentes à l'origine 0 du repère).

5°) Soit α un nombre réel tel que $\alpha > 1$.

On note $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \alpha$.

a/ Exprimer, en cm^2 , $A(\alpha)$ en fonction de α .

b/ Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$.

6°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \int_n^{n+1} [f(x) - (x - 1)] dx$.

(En remarquant que si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [n, n+1]$ on a : $f(x) = x - 1 + e^{-x}$).

a/ Exprimer U_n en fonction de n .

b/ Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

7°) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [0, +\infty[$.

a/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} .

b/ Représenter graphiquement g^{-1} dans le même repère que (C).