

N.B. : - Les DEUX exercices et le PROBLEME sont obligatoires.
 - Machine à calculer autorisée.

EXERCICE 1 (5 points)

1°) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue Z .

$$Z^2 - (4 + 5i)Z - 1 + 7i = 0.$$

2°) Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité 1cm). On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $Z_A = 1+i$; $Z_B = 3+4i$ et $Z_C = 4-i$.

a/ Déterminer l'expression complexe associée à la similitude plane directe S telle que : $S(A) = B$ et $S(B) = C$.

b/ Préciser les éléments caractéristiques de S .

3°) On note par I le milieu du segment $[BC]$.

a/ Calculer l'affixe Z_I de I .

b/ Placer les points A, B, C et I dans le plan complexe (P)

c/ Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe Z vérifiant : $\left| Z - \frac{7+3i}{2} \right| = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

d/ Déterminer et construire l'ensemble (Γ') image de (Γ) par S .

EXERCICE 2 (5 points)

Une urne U_1 contient six boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et trois boules numérotées 2.

Une autre urne U_2 contient cinq boules : deux boules numérotées 0, une boule numérotée 1 et deux boules numérotées 2.

Les boules sont indiscernables au toucher.

1°) On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne U_1 .

Calculer les probabilités des événements suivants :

A: << La somme des numéros notés est égale à 4 >>

B: << Parmi les trois boules tirées, deux boules exactement sont numérotées par 2 >>

C: << Le produit des numéros notés sur les trois boules tirées, est différent de 0 >>

D: << Les trois boules obtenues portent le même numéro >>

2°) On remet l'urne U_1 à sa condition initiale. On tire une boule de l'urne U_1 , puis on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne U_2 . On suppose que les événements élémentaires sont équiprobables. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque éventualité, associe le produit des numéros notés sur les trois boules obtenues.

a/ Vérifier que l'univers image de X est égal à l'ensemble $\{0, 2, 4, 8\}$.

b/ Montrer que $P(X = 0) = \frac{3}{4}$ et $P(X \geq 4) = \frac{11}{60}$.

c/ Calculer la probabilité de l'événement : $(X = 2)$.

d/ Compléter le tableau des valeurs ci-dessous :

k	0	2	4	8
P(X=k)	$\frac{3}{4}$			

e/ Montrer que $E(X) = \frac{16}{15}$, $E(X)$ étant l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

f/ Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition F de X .

On utilisera pour la représentation graphique de F un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j})

(On prendra comme unités : 1cm sur l'axe des abscisses et 6cm sur l'axe des ordonnées)

(N.B. : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible).

PROBLEME (10 points)

Soit la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$

On note par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 2cm).

1°) On donne la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$

a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

b/ Pour tout $x > 0$, calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

c/ Dresser le tableau de variation de g .

d/ Montrer qu'il existe un et un seul nombre réel α vérifiant $g(\alpha) = 0$ avec $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

2°) a/ Pour tout $x > 0$, calculer $f'(x)$.

b/ Pour tout $x > 0$, montrer l'égalité $f'(x) = e^x g(x)$.

c/ Calculer $f'(\alpha)$.

d/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (On pourra utiliser l'égalité $f(x) = \frac{e^x}{x}(x \ln x + 1)$).

e/ Dresser le tableau de variation de la fonction f .

3°) a/ Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

b/ Construire (C) et (T) dans un même repère.

4°) On pose pour tout $x > 0$, $h(x) = e^x \ln x$

Montrer que h est une primitive de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

5°) Soit $I = \int_{\alpha}^1 f(x) dx$ où α est le réel défini à la question 1°) d/

a/ Montrer que $I = e^{\alpha} \left(\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right)$.

b/ Interpréter géométriquement l'intégral I .

On donne $\ln 2 \approx 0,7$ $\alpha \approx 0,6$ $f(\alpha) \approx 2,1$ $e \approx 2,7$