MATHEMATIQUES - Série D - SESSION 2003

N.B. : Le candidat doit traiter les *DEUX Exercices* et le *Problème*.

Exercice 1 (5 points)

On considère deux dés cubiques D et D'. Le dé D numéroté de 1 à 6 est ***pipé*** de telle sorte que les probabilités p_i, $1 \le i \le 6$ d'apparition de la face numérotée i vérifient les conditions suivantes :

- $p_1 = p_2 = p_3$
- $p_4 = 3p_1$
- $p_6 = 2p_5 = 4p_4$

Le dé D' est ***non pipé***, numéroté : 1, 1, 1, 2, 2, 4. On note p'_1, p'_2 et p'_4 les probabilités d'apparitions respectives des faces numérotées 1, 2 et 4.

1. Montrer que $p_1 = \frac{1}{24}$. En déduire p_i, $2 \le i \le 6$.
2. On lance quatre fois de suite le dé D d'une façon indépendante. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la face numérotée 5.
   a) Donner la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance et la variance de X.
3. On lance simultanément les dés D et D'. Calculer les probabilités des événements suivants :
   A. « la somme des numéros obtenus est égale à 5 ».
   B. « la somme des numéros obtenus est inférieure ou égale à 7 ».
   C. « les numéros obtenus sont identiques ».

Exercice 2 (5 points)

Soit le polynôme complexe P défini par : $P(z) = z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i$.

1. Résoudre dans $\forall$ l'équation $P(z) = 0$.
2. Dans le plan complexe **P** muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M d'affixe $z = x + iy$ et M' d'affixe $z' = x' + iy'$. x, y, x', y' sont des réels.

   Soit S la similitude plane directe qui à tout point M associe le point M' telle que :

   $$\begin{cases} x' = -x - y + 3 \\ y' = \ \ x - y + 1 \end{cases}$$

   a) Ecrire l'expression complexe de S.
   b) Donner ses éléments caractéristiques.
   c) Donner l'image par S des points A(0, 2) et I(1, 2).
3. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donner la nature et les éléments géométriques de S' = R o S où o est la composition des applications.
4. Quel est l'ensemble (E) des points M d'affixe z vérifiant $|(-1 + i)z + 3 + i| = \sqrt{2}$?

Problème (10 points)

Soit f la fonction telle que $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{\ln x}{x}$. On note (**C**) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 1 cm.

1. Calculer f ' et f '' dérivées première et seconde de f.
2. a) Etudier la variation de f '.
   b) En déduire le signe de f '(x) suivant les valeurs de x.
3. Etudier la variation de f.
4. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote oblique à (**C**) et étudier la position de (**C**) par rapport à (D) sur $]0, +\infty[$.
5. Montrer qu'il existe un point unique A de (**C**) où la tangente (T) à (**C**) est parallèle à (D).

6. Tracer (D), (T) et (**C**).
7. Calculer en cm^2, l'aire géométrique du domaine plan, limité par la courbe (**C**), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.
8. On considère la fonction g définie sur $[\, 3, +\infty[$ par : $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1 - f(x)$.

   a) Montrer que g est décroissante.

   b) En déduire que si $n \leq x \leq n + 1$ alors $0 < g(x) \leq g(n)$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

   c) On définit la suite $(U_n)_{n \geq 3}$ par $U_n = \int_n^{n+1} g(x)\, dx$.

   Donner un encadrement de U_n, puis en déduire $\lim U_n$.

   On donne : $e^{-3} \approx 0,05$ $e^{-1} \approx 0,37$