

MATHEMATIQUES - Série D - SESSION 2000

Exercice 1 5 points

P est un plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

- Résoudre dans C l'équation : $z^2 - (6 - i)z + 11 - 3i = 0$.
 - Déterminer les nombres complexes z et z' tels que :
$$\begin{cases} 2z - z' = 6 - 5i \\ -z + z' = 3i \end{cases}$$

Dans tout ce qui suit, on note par A, B, C et D les points d'affixes respectives $a = 3 + i, b = 3 - 2i, c = 6 - 2i$ et $d = 6 + i$.

- Placer dans P les quatre points A, B, C et D .
 - Démontrer que le triangle (BAD) est isocèle et rectangle en A , et le triangle (BCD) est isocèle et rectangle en C .
 - En déduire que les quatre points A, B, C et D se trouvent sur un même cercle (Γ) dont on précisera le centre Ω et le rayon. Tracer (Γ) sur la figure précédente.
- Soit S la similitude plane directe de centre A et qui transforme B en C .
 - Préciser les éléments caractéristiques de S .
 - Construire sur la figure précédente le transformé de $ABCD$ par S .

Exercice 2 5 points

N.B. : On exprimera les résultats sous forme décimale à 10^{-2} près.

Le tableau suivant indique les variations du chiffre d'affaires y_i d'une entreprise selon les frais de publicité x_i (x_i et y_i sont exprimés en millions de francs malagasy) de 1992 à 1999.

Années	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
x_i	2	2,3	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1
y_i	52	59	60	65	70	72	73	75

On donne :

$$\sum_{i=1}^8 x_i = 24,40 ; \sum_{i=1}^8 y_i = 526 ; \sum_{i=1}^8 x_i^2 = 78,20 ; \sum_{i=1}^8 y_i^2 = 35048 ; \sum_{i=1}^8 x_i y_i = 1645,10.$$

- Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$.
(Unité graphiques :
 - 2 cm représente 1 million de francs malagasy sur l'axe des abscisses.
 - 1 cm représente 10 millions de francs malagasy sur l'axe des ordonnées).
 - Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point.
- Montrer que le coefficient de corrélation linéaire associé à cette série statistique est : $r \approx 0,98$.
 - Interpréter ce résultat.
 - Par la méthode des moindres carrés, donner l'équation de la droite de régression de y en x et tracer cette droite.
- Montrer que x_1, x_2, \dots, x_8 constituent les 8 premiers termes d'une suite arithmétique (x_n) dont on précisera la raison.
 - Donner une estimation du chiffre d'affaires de cette entreprise en 2002.

Exercice 3 5 points

N.B. :

- Les questions 1. et 2. sont indépendantes.
- On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Une urne contient des boules indiscernables au toucher : rouges, vertes et noires.

- On suppose qu'il y ait 12 boules dans l'urne dont : 3 rouges, 4 noires et 5 vertes. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.
 - Déterminer le nombre de tirages possibles.
 - Déterminer les probabilités des événements suivants :

- A : « Avoir 3 boules noires ».
- B : « Avoir 3 boules de même couleur ».
- C : « Avoir au moins deux boules noires ».
- D : « Avoir au plus deux boules rouges ».

2. On suppose qu'il y ait 25% de boules rouges dans l'urne. On appelle « gain » l'obtention d'une boule rouge lors d'un tirage d'une boule de l'urne. L'expérience consiste à tirer au hasard et successivement 4 boules de l'urne en remettant dans l'urne chaque boule tirée avant de tirer une autre. Soit X la variable aléatoire qui à chaque expérience associe le nombre de gains.
- a. Vérifier que l'univers image de X est $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
 - b. Montrer que la probabilité d'avoir 3 gains est égale à $\frac{3}{64}$.
 - c. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - d. Définir la fonction de répartition F de X .
 - e. Si n est le nombre de boules rouges, $3n - 7$ le nombre de boules vertes et $2n - 1$ le nombre de boules noires dans l'urne, calculer n .

Exercice 4 5 points

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

On note par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'unité 2 cm.

1. Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = (-x + 2)e^x - 1$.
 - a. Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation. (On ne demande pas de tracer la courbe représentative de h).
 - b. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0; +\infty[$. Vérifier que α est compris entre $\frac{3}{2}$ et 2.
 - c. En déduire, suivant les valeurs de x , le signe de $h(x)$.
2.
 - a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
 - b. Etudier, suivant les valeurs de x , la position relative de (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y = 1$. (On admet que $e^x - x > 0$ sur $[0; +\infty[$).
3.
 - a. Montrer que pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$.
 - b. Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ et donner le tableau de variation de f .
 - c. Tracer (D) et (C) dans un même repère. (On prendra $\alpha \approx 1,84$ et $f(\alpha) \approx 1,20$).
4. Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = \ln(e^x - x)$.
 - a. Calculer $F'(x)$.
 - b. On note par $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe $(x'Ox)$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$. Utiliser l'égalité $h(\alpha) = 0$ pour montrer que

$$A(\alpha) = 4 \ln \left[\frac{(1 - \alpha)^2}{2 - \alpha} \right] \text{cm}^2.$$