MATHEMATIQUES - Série C - SESSION 2002

N.B. : Le candidat doit traiter les **DEUX** exercices et le problème.

EXERCICE 1 **(4 points)**

Dans le plan orienté (P), on considère le rectangle ABCD tel que AD = 2AB = 4 et mes $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

Soit I le milieu du segment [BC] et (**C**) le cercle de centre B passant par A.

1°- a)– Déterminer le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1), (C,1), (D, -1)\}$.

b)– On considère l'ensemble (E_k) des points M du plan (P) tels que $\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MC}\|^2 - \|\overrightarrow{MD}\|^2 = k$.

Calculer le réel k pour que (E_k) soit le cercle (**C**).

2°- Soit S la similitude plane directe qui transforme A en I et B en D et soit σ la symétrie orthogonale d'axe (BD).
On se propose dans cette question de déterminer géométriquement les éléments caractéristiques de S.

a) – Déterminer et construire l'image (**C'**) du cercle (**C**) par S.

b) – Soit Ω le point d'intersection de (**C**) et (**C** ') autre que I. Montrer que (DB) est la médiatrice du segment [ΩI] et que $\Omega = \sigma$ (I).

c) – En déduire que mes $(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega D})$ = mes $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{ID})$ et que $\frac{\|\overrightarrow{\Omega D}\|}{\|\overrightarrow{\Omega B}\|} = \frac{\|\overrightarrow{ID}\|}{\|\overrightarrow{IB}\|}$.

d) – En utilisant le triangle rectangle isocèle ICD et le point B, calculer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{ID})$ et le rapport $\frac{\|\overrightarrow{ID}\|}{\|\overrightarrow{IB}\|}$.

e) – En déduire le centre, le rapport et l'angle de S.

3° - On rapporte maintenant le plan (P) au repère orthonormé direct $(A,\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

a) – Déterminer les affixes des points A, B, D et I.

b) – Donner l'expression complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques.

c) – Donner l'expression complexe de σ et montrer que l'image par σ du point I est le centre Ω de S.

EXERCICE 2 **(4 points)**

1°- a) – Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation 11x – 8y = 1.

b) – Calculer PGCD (319, 232, 145) puis résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation 319x – 232y = 145.

2° - Une urne contient 81 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 81. L'épreuve E consiste à tirer au hasard et successivement deux boules de l'urne, sans remettre dans l'urne la boule tirée.

a) – Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Tirer deux boules portant deux numéros pairs ».

B : « Tirer deux boules portant deux numéros multiples de 3 ».

C : « Tirer deux boules portant deux numéros qui sont des nombres premiers ».

3° Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé. On donne les deux droites (D_1) d'équation 11x – 8y – 1 = 0 et (D_2) d'équation 319x – 232y – 145 = 0. (On ne demande pas de construire ces deux droites). A l'épreuve E décrit précédemment, on associe le point M(x, y) du plan où x est le numéro porté par la première boule tirée et y par la seconde. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

D : « Le point M appartient à la droite (D_1) ».

E : « Le point M n'appartient pas à la droite (D_2) ».

PROBLEME **(12 points)**

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x-1}{\ln |x|} & \text{si } x < 0 \\ (x+1)^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm.

Partie A

1° - Etudier la continuité et la dérivabilité de f en O.

2° - On considère la fonction g définie sur] – ∞ ; 0 [par g(x) = 1 – x + x ln |x|.

a) – Etudier les variations de g.

b) – Montrer qu'il existe un réel unique $\alpha \in]-4 ; -3[$ tel que g(α) = 0.

c) – En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

3° - a) – Montrer que pour tout x < 0, x ≠ – 1, f'(x) a le même signe que – g(x).

b) – Vérifier que f'(α) = 0 et que f(α) = 1 + α où α est défini dans 2°/b).

c) – Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4° - a) – Etudier les branches infinies de (C).

b) – Calculer à 10^{-1} près : f(– 8), f(– 6), f(–2) et f(– $\frac{1}{2}$).

c) – Prendre $\alpha = -3{,}6$ et construire la courbe (C).

On donne : ln 2 ≈ 0,7 ; ln 6 ≈ 1,8 ; e ≈ 2,7.

Partie B

1° - On considère l'équation différentielle (E) : y'' – y' – 2y = e^{-x} (– 6x – 4).

a) – Vérifier que la fonction φ définie sur $\mathbb{3}$ par $\varphi(x) = e^{-x}(x^2 + 2x)$ est solution de (E).

b) –Montrer qu'une fonction numérique f est solution de (E) si et seulement si f– φ est solution de l'équation différentielle (E') :y'' – y' – 2 y = 0.

c) – Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).

d) – Déterminer l'unique solution f de (E) telle que f(0) =1 et f'(0) = 1.

2° - On pose $I_\lambda = \int_0^\lambda (x+1)^2 e^{-x}\,dx$ où ⍰ > 0.

a) – Par deux intégrations par parties successives, exprimer $I_{⍰}$ en fonction de λ. Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} I_\lambda$.

b) – En déduire, en cm^2, l'aire du domaine plan (D) ensemble des points M(x,y) tels que $x \geq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Partie C

On se propose d'étudier la convergence de la suite $(U_n)_{n \in \angle^*}$ définie par :

$$\forall n \in IN^*,\quad U_n = \frac{1}{n^3}\left[(1+n)^2 e^{-\frac{1}{n}} + (2+n)^2 e^{-\frac{2}{n}} + \ldots + (n+n)^2 e^{-\frac{n}{n}}\right].$$

1° - Vérifier que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = U_n$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = U_n + \frac{e-4}{ne}$ (f étant définie dans la partie A], $x \geq 0$).

2° a) –Soit $n \in IN^*$ et k un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$. Vérifier que $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \subset [0,1]$.

b) – En utilisant le sens de variation de f sur [0 , 1], montrer que : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

c) – En déduire que $U_n + \frac{e-4}{ne} \leq \int_0^1 f(t)dt \leq u_n$ et que $I_1 \leq U_n \leq I_1 + \frac{4-e}{ne}$.

d) – Montrer que $(U_n)_{n \in IN^*}$ est convergente et donner sa limite.