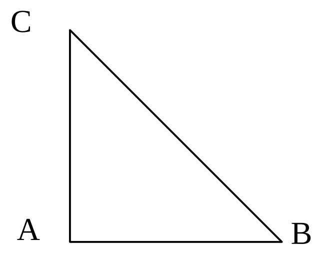
MATHEMATIQUES - Série C - SESSION 2000

Exercice 1 (4 points)

Dans un plan orienté **P**, on considère le triangle direct ABC isocèle et rectangle en A. (Voir figure). On note par :

- I le milieu du segment [BC] ;
- r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$;
- $g = t \circ r_B$ et $f = r_C \circ g$.



1. **<u>Méthode complexe :</u>** **P** étant muni du repère orthonormé **R** $=(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

a. Déterminer z_A , z_B , z_C et z_I affixes respectives des points A, B, C et I.

b. Donner l'expression complexe de f.

c. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. **<u>Méthode géométrique</u>** :

a. Caractériser g en décomposant t et r_B en deux symétries orthogonales.

b. Caractériser f en décomposant r_C et g en deux symétries orthogonales.

3. Soit S la similitude plane indirecte de centre A et qui transforme B en I.

a. Déterminer le rapport de S.

b. Soit (**C**) le cercle de centre A et passant par B. La demi-droite [AI), d'origine A et contenant I, coupe (**C**) au point B**'**. Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale d'axe (Δ) qui transforme B en B**'**. Déterminer alors l'axe de S.

Exercice 2 (4 points)

Un sac contient dix boules indiscernables au toucher. Cinq boules sont blanches dont une porte le numéro 0, une le numéro 1 et trois le numéro 2. Cinq boules sont noires dont quatre portent le numéro 2 et une le numéro 3.

1. On tire au hasard, simultanément trois boules du sac. Calculer les probabilités des événements suivants :

A : « Toutes les boules sont blanches ».

B : « Les boules sont de couleurs différentes ».

C : « On obtient la boule numérotée 0 ».

D : « Les numéros des boules sont pairs ».

2. Dans cette partie, on enlève du sac la boule numérotée 0. L'épreuve est maintenant la suivante : du sac contenant les neuf boules restantes, on tire au hasard, successivement et avec remise deux boules. On note par **a** le numéro apparu sur la première boule, **b** le numéro apparu sur la deuxième et **d** = PGCD(**a**, **b**) le plus grand commun diviseur de **a** et **b**.

a. Démontrer que l'ensemble des valeurs prises par **d** est D ={ 1, 2, 3 }.

b. Pour tout $k \in D$, on désigne par E_k l'ensemble des couples (**a**, **b**) tels que **d** = k , c'est–à–dire : E_k = {(**a**, **b**)/PGCD (**a**, **b**) = k }. On note par p_k la probabilité de E_k .

Montrer que $p_1 = \dfrac{31}{81}$, puis déterminer p_2 et p_3.

c. Calculer la probabilité de l'événement E : « l'équation **a**x + **b**y = 2, d'inconnues (x, y) de **Z x Z** admet des solutions ».

d. Résoudre dans **Z x Z** l'équation : 3x + 2y = 2.

Problème (12 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; + ∞[par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x \ln x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x \in]0,1[\\ f(x) = \dfrac{x-1}{e^x - x - 1} & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

On note par (**C**) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 5 cm.

Partie A

1. Soit g la fonction définie sur] 0 ; 1 [par : $g(x) = \ln x - \ln(1-x)$.
   a. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.
   b. En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.
   c. Montrer que pour tout $x \in]\,0\,;1\,[$, $f'(x) = g(x)$.
2. Soit h la fonction définie sur [1 ; + ∞ [par : $h(x) = (2-x)\,e^x - 2$.
   a. Montrer que h est strictement décroissante sur [1 ; + ∞ [.
   b. Montrer que l'équation h (x) = 0 admet une solution unique $\alpha \in \left]\frac{3}{2}\,;2\right[$
   c. En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de h (x).
   d. Montrer que pour tout $x \in]\,1\,;+\infty\,[$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(e^x - x - 1)^2}$.
3. a. Montrer que f est continue en 0 et en 1.
   b. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)}{x-1} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)}{x-1} = \dfrac{1}{e-2}$.
   Interpréter graphiquement ces résultats.
   c. Montrer que (**C**) admet une asymptote horizontale que l'on précisera.
4. a. Utiliser l'égalité $h(\alpha) = 0$ pour montrer que $f(\alpha) = -1 + \dfrac{2}{\alpha}$ et dresser le tableau de variation de f sur [0 ; + ∞ [.
   b. Tracer (**C**) sur l'intervalle [0 ; 3] en précisant les demi–tangentes en 0 et en 1.

On donne pour la construction :

x	0,5	1	α = 1,6	2	3
f(x)	– 0,69	0	0,25	0,22	0,12

Partie B

Soit $\alpha \in \left]\frac{3}{2}\,;2\right[$, le réel déterminé dans la question 2.b. de la partie A.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_1^{\alpha} \frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1}\,dt$.
   a. Utiliser la monotonie de f sur $[1;\alpha]$ pour montrer que : $0 \leq I_1(\alpha) \leq \dfrac{(2-\alpha)(\alpha-1)}{\alpha}$.
   b. Etudier le sens de variation de la fonction $t \mapsto e^t - t - 1$ sur [1;+∞ [. En déduire que pour tout $t \geq 1$, $e^t - t - 1 \geq e - 2$.
   c. Montrer alors que $0 \leq I_n(\alpha) \leq \dfrac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)-(e-2)}$.
   d. Montrer que la suite $(I_n(\alpha))$ est convergente. Préciser sa limite.
2. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que a + b = 1.
   a. En remarquant que $f(x) \geq -\ln 2$, pour tout $x \in]\,0\,;1\,[$, montrer que : $a \ln \frac{1}{a} + b \ln \frac{1}{b} \leq \ln 2$.
   b. Pour quelles valeurs de a et b, la dernière inégalité est–elle une égalité ?