MATHEMATIQUES - Série C - SESSION 1999

\- -

N.B. : Les **DEUX Exercices** et le **Problème** sont obligatoires.

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

EXERCICE - I (20 points)

Une urne contient 3 jetons blancs et n jetons rouges ($n \in IN^*$) indiscernables au toucher.
On choisit simultanément, au hasard, deux jetons de l'urne.

1° - On appelle « succès » l'obtention de deux jetons blancs.
Calculer, en fonction de n, la probabilité p_n d'un succès et déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$

2° - On appelle « gain » l'obtention de deux jetons de même couleur.
Calculer, en fonction de n, la probabilité q_n d'un gain et déterminer $\lim_{n\to+\infty} q_n$

3° - a) Trouver une solution particulière (u, v) de Z x Z, de l'équation entière d'inconnues (x , y) définie par : $5x - 4y = 1$.

b) En déduire une solution particulière (x_0 , y_0) de Z x Z de l'équation :
$5x - 4y = 6$ (1).

c) Montrer alors que $5(x - x_0) - 4(y - y_0) = 0$.
En déduire que $x - x_0$ et $y - y_0$ sont divisibles par 4 et 5 respectivement.

4° - a) Donner les solutions générales de l'équation (1).

b) Trouver dans ZxZ les solutions (x, y) de (1) vérifiant : $-18 \leq x \leq 0$ et $-24 \leq y \leq 0$.

EXERCICE - II (20 points)

ABC est un triangle rectangle isocèle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].
r est la rotation de centre I et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.t est la translation de vecteur $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
f = rot et g = tor.

1°- a) Montrer que $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Montrer que AKIJ est un carré.
En déduire l'image de K par t et celle de J par r.

b) Déterminer l'image de K par f et celle de J par g.
En déduire la nature et le éléments caractéristiques de f et g.

c) Déterminer l'image de A par go(f^{-1}). Caractériser alors cette transformation.

2°- Utiliser les méthodes de décomposition de r et t en deux symétries orthogonales pour retrouver go(f^{-1}).

3°- a) Tracer les cercles C et C**'** de diamètres respectifs [A B] et [A C].

b) Soit **r'** la rotation de centre I et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.
Soit M un point de C et on pose M**'** = r **'**(M). Montrer que C **'** est l'image de C par r **'.**
Construire M**'**.

c) M étant distinct de I, les droites (IM) et (IM**'**) recoupent respectivement C**'** en N**'** et C en N. Montrer que N**'** est l'image de N par r **'**.

d) On construit les carrés MIM**'**P et NIN**'**Q. Montrer que les points P et Q sont respectivement les images des points M et N par une similitude directe S dont on précisera centre, rapport et angle.

e) En déduire les ensembles décrits par les points P et Q lorsque M décrit C.

PROBLEME (60 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt$, pour tout $x \in IR$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

Les parties A et B sont largement indépendantes.

PARTIE A

1°- a) Montrer que f et dérivable sur IR et calculer f **'** fonction dérivée de f.

b) En effectuant le changement de variable $t = -u$, montrer que f est une fonction impaire. Etudier les variations de f sur le domaine d'étude $[0, +\infty[$.

2°- a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a : $\dfrac{e^t}{1+e^{2t}} \leq e^{-t}$.

b) En déduire que pour tout $x \geq 0$: $f(x) \leq 1$.

c) Montrer que f admet une limite finie ℓ, en $+\infty$, avec $\ell \leq 1$. (On ne cherchera pas à calculer ℓ).

d) Tracer (C), (on prendra $\ell = \frac{\pi}{4}$ pour la construction).

3°- Soit g la fonction définie sur $]0\,;\frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = \ell n\,(\tan x)$, pour tout $x \in\,]0\,;\frac{\pi}{2}[$ où ℓn désigne la fonction logarithme népérien.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$, calculer g' fonction dérivée de g et dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que g réalise une bijection de $]0\,;\frac{\pi}{2}[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
On note g^{-1} la réciproque de g.

c) Tracer les courbes représentatives de g et g^{-1} sur le même repère que (C).

4°- Soit H une fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ par $H(x) = (f\circ g)(x)$, pour tout $x \in\,]0\,;\frac{\pi}{2}[$.

a) Montrer que H est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et que sa dérivée H' est une fonction constante.

b) Montrer alors que pour tout $x \in\,]0\,;\frac{\pi}{2}[$: $H(x) = x - \frac{\pi}{4}$.

c) En déduire que : $\displaystyle\int_0^{\ln\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt = -\frac{\pi}{12}$. (On remarquera que $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan\dfrac{\pi}{6}$).

PARTIE B

Soit la suite $(U_n)_{n\in IN}$ définie par $\displaystyle u_n = \int_0^{\ln\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,e^{nt}\,dt$, pour tout $n\in IN$.

1°- a) Utiliser la définition du terme U_n pour montrer que : pour tout $p\in IN$, $U_{2p} + U_{2p+2} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^P - 1}{2p+1}$.

b) Calculer U_0 et U_2.

c) Montrer que pour tout $n\in IN$: $U_n \geq 0$. En déduire que pour tout $n\in IN$: $0 \leq U_{2n} \leq \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{2n+1}$.

Calculer alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_{2n}$.

2°- a) Vérifier que pour tout $p\in IN$: $(-1)^P U_{2p} + (-1)^P U_{2p+2} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^P - (-1)^P}{2p+1}$.

d) En déduire que :

$$(-1)^{n-1}U_{2n} - \frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - 1}{1} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^1 - (-1)^1}{3} + \dots + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} - (-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

c) Soit $S_n = \left[\dfrac{\left(\frac{-1}{3}\right)^1 - (-1)^1\frac{\sqrt{3}}{3}}{1} + \dfrac{\left(\frac{-1}{3}\right)^2 - (-1)^2\frac{\sqrt{3}}{3}}{3} + \dots + \dfrac{\left(\frac{-1}{3}\right)^n - (-1)^n\frac{\sqrt{3}}{3}}{2n-1}\right]$

que l'on écrit $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^p - (-1)^p\frac{\sqrt{3}}{3}}{2p-1}$, $n\in IN^*$.

Montrer, en utilisant 2°-b), que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi\sqrt{3}}{36}$.