

## SESSION 2004 – MATHÉMATIQUES - Série A

### EXERCICE 1 (5 points)

Soit la suite arithmétique  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par la donnée des deux termes  $U_1 = -2$  et  $U_{20} = 55$ .

- 1°) Calculer la somme  $S = U_1 + \dots + U_{20}$
- 2°) Déterminer la raison  $r$  de cette suite.
- 3°) Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- 4°) Pour tout  $n$  élément de  $\mathbb{N}^*$ . On pose  $V_n = e^{3n-5}$ 
  - a/ Calculer  $V_1$  et  $V_2$ .
  - b/ Montrer que  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite géométrique dont on précisera la raison  $q$ .
  - c/ Exprimer la somme  $T_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$  en fonction de  $n$ .

### EXERCICE 2 (5 points)

**N.B :** On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Une trousse contient douze stylos de même marque, indiscernables au toucher : 3 rouges, 4 verts, 3 bleus et 2 noirs.

- 1°) Un élève prend au hasard un stylo de la trousse. Chaque stylo a la même probabilité d'être tiré. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
  - A : « Obtenir un stylo rouge »
  - B : « Obtenir un stylo vert ou un stylo noir ».
- 2°) On remet la trousse à sa condition initiale. Un autre élève tire au hasard et simultanément deux stylos de la trousse. On suppose que les tirages sont équiprobables.  
Evaluer la probabilité de chacun des événements suivants :
  - C : « Les deux stylos tirés sont de même couleur »
  - D : « Obtenir deux stylos de couleurs différentes ».
- 3°) On remet la trousse à sa condition initiale. Un troisième élève tire successivement et sans remise trois stylos de la trousse. On suppose que les événements élémentaires sont équiprobables.
  - a/ Déterminer le nombre de cas possibles.
  - b/ Déterminer les probabilités des événements suivants :
    - E : « Obtenir trois stylos de même couleur »
    - F : « Obtenir aucun stylo vert ».

### PROBLEME (10 points)

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x} - 1 + \ln x$

On note par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2 cm).

- 1°)
  - a/ Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ .
  - b/ Étudier le signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
- 2°) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 3°)
  - a/ Montrer que  $f(x)$  peut s'écrire :  $f(x) = \frac{1-x+\ln x}{x}$  pour  $x \in ]0, +\infty[$ .
  - b/ En admettant que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .
- 4°) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 5°) Compléter le tableau des valeurs ci-dessous :

$x$	$\frac{1}{e}$	1	2	$e$
$f(x)$				

- 6°)
  - a/ Calculer  $f''(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  et étudier son signe sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
  - b/ En déduire que le point  $I$  d'abscisse 2 est un point d'inflexion de  $(C)$ .
  - c/ Trouver une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  en  $I$ .
- 7°)
  - a/ On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Quelle conclusion peut-on en tirer sur la courbe  $(C)$ ?
  - b/ Tracer  $(C)$  et  $(T)$ .

**Pour A2 seulement**

8°) Soit la fonction  $G$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par  $G(x) = x \ln x - x$

a/ Calculer  $G'(x)$  pour tout  $x$  élément de l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

Et en déduire une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

b/ Calculer, en  $\text{cm}^2$ , l'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses  $(x'Ox)$  et les droites d'équations respectives  $x=1$  et  $x=e$ .

On donne :  $\frac{1}{e} = 0,36$  ;  $\ln 2 = 0,7$  ;  $e=2,7$ .