SESSION 2001 - MATHEMATIQUES - SERIE A

Exercice – 1 **(4 points)**

N.B. : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont :

- 4 rouges numérotées 2, 3, 3, 4
- 4 vertes numérotées 1, 3, 3, 4
- 2 jaunes numérotées 1, 1.

1. On tire au hasard et simultanément 2 boules de l'urne.
   Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « la somme des numéros des 2 boules tirées est égale à 6 »
   B : « le produit des numéros des 2 boules tirées est égal à 4 »
   On effectue 3 tirages successifs d'une boule, en remettant dans l'urne, avant chaque tirage, la boule précédemment tirée.
   Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   C : « Tirer 3 boules de même couleur »
   D : « Tirer 2 boules rouges et une jaune dans cet ordre ».

Exercice – 2 **(4 points)**

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in IN}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall\, n \in IN,\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - 1 \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Soit la suite numérique $(v_n)_{n\in IN}$ définie pour tout $n\in IN$ par $v_n = u_n + 3$.
   a- Montrer que $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c- Calculer $\lim_{x\to+\infty} u_n$.
3. On pose $w_n = ln\left[2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$, $n\in IN$ (ln désigne le logarithme népérien).
   Montrer que $(w_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

Problème **(12 points)**

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = (1 – x)e^x – 1$.

On note par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\ \vec{i},\ \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   a- Calculer la limite de f en $+\infty$.
   b- Sachant que $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$, montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.
   Donner une interprétation graphique de ce résultat.
   a- Calculer la fonction dérivée f'(x) et étudier son signe.
   b- Dresser le tableau de variation de f.
2. a- Calculer les coordonnées du point d'intersection A de la courbe (C) avec la droite (D) d'équation $y = –1$.
   b- Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
3. a- Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ (on pourra écrire $\frac{f(x)}{x} = \frac{1-x}{x}e^x - \frac{1}{x}$).
   Que peut-on en conclure ?
   b- Reproduire le tableau suivant et donner pour chaque valeur de x, une valeur approchée de f(x) à 10^{-2} près.

x	–3	–1	ln 5
f(x)			

   c- Tracer (T), (D) et (C).
4. Soit F la fonction définie sur 3 par : $F(x) = (2 – x)e^x – x$.
   a- Montrer que F est une primitive de f sur 3.
   b- Calculer, en cm^2, l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe (x'Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

On donne : $e^{-1} = 0,37$; $e^{-3} = 0,05$; $\ln 5 = 1,61$.