MATHEMATIQUES - Série D - SESSION 1999

- - - - - - - - - -
N.B. : Les **Quatre Exercices** sont obligatoires.
- - - - - - - - -

EXERCICE I (20 points)

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 2cm, on donne le point A d'affixe –2.

Soit Z le nombre complexe défini par : $Z = \frac{iz+3}{z+2}$, avec $z \neq -2$ et $z \in \mathbb{C}$.

On pose $Z = X + iY$ et $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathrm{IR}^2$ et $(X,Y) \in \mathrm{IR}^2$.

1 - Déterminer X et Y en fonction de x et y.

2 - Déterminer et construire dans P les deux ensembles (C) et (D) définis par :

(C) = { M(x, y) / Z soit réel }.

(D) = { M(x, y) / Z soit imaginaire pur }.

3 - Soient B, C et D les points d'affixes respectives : i, 2 + 2i, 1 - i.

On note par S la similitude plane directe qui transforme B en C et C en D.

a - Donner l'expression complexe de S.

b - Préciser ces éléments géométriques.

c - Construire l'image du cercle d'équation : $x^2 + y^2 + 2x - 3y = 0$ par S, dans le repère précédent.

EXERCICE II (20 points)

Le tableau ci-dessous donne en milliards de francs malgache (FMG) les importations d'une société, de 1993 à 1998.

Année	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6
Importations : y_i	5	6,5	7	6,5	10	12

1- Représenter le nuage de points associé à cette série statistique (x_i, y_i) dans un repère orthogonal. L'unité graphique sera prise égale à 1cm sur l'axe des abscisses x, et 1cm pour 1 milliards sur l'axe des ordonnées y.

2- Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

3- Par la méthode des moindres carrés, déterminer une équation de la droite de régression de y en x et représenter cette droite dans le même repère défini ci-dessus.

4- A l'aide de cette droite de régression de y en x, quelle estimation peut-on faire du montant des importations en l'an 2004 ?

On exprimera les résultats sous forme décimaux, deux chiffres après virgule.

EXERCICE III (20 points)

Soit f la fonction définie sur $D_f = [0\,;1[\, \cup\,]1\,;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln x} & si\ x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note par (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1cm.

1- a) Montrer que f est continue et dérivable au point 0.

b) Calculer les limites aux bornes de D_f.

2- a) Soit $x \in D_f$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur D_f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Etudier les branches infinies de la courbe (C).

Tracer (C) et la droite (T) tangente à (C) au point d'abscisse e^2.

3- Soit g la fonction définie sur $D =]1\,;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{x+\ln x}{\ln x}$, pour tout $x \in D$.

On note par (Γ) la courbe représentative de g dans le repère précédent.

a) Etudier la position relative de (Γ) et (C).

b) Dresser le tableau de variation de g
et tracer (Γ) dans le même repère que (C).

c) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par les deux courbes (Γ), (C) et les droites d'équations respectives x = 2, x = e.
On donne $\ln 2 \approx 0{,}7$; $e \approx 2{,}71$; $e^2 \approx 7{,}4$.

EXERCICE IV (20 points)

Soit D_1 un dé cubique truqué numéroté de 1 à 6.
On note p_i la probabilité d'apparition de la face numérotée i lors d'un lancer du dé D_1 ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).
On suppose que p_1, p_3, p_5 forment, dans cet ordre, les trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$; puis p_2, p_4, p_6 forment, dans cet ordre, les trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et que $p_2 = 4p_1$.
Soit D_2 un dé cubique non truqué numéroté de 1 à 6.
Chaque face de D_2 a donc la même probabilité d'apparition lors d'un lancer de ce dé.

1- a) Montrer que les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 vérifient le système :

$$\begin{cases} p2 = 4p1 \; ; \; p4 = p1 \\ p3 = \frac{1}{2}p1 \; ; \; p5 = p6 = \frac{1}{4}p1 \\ p1 + p2 + p3 + p4 + p5 + p6 = 1 \end{cases}$$

b) Calculer p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6.

2- On lance les deux dés D_1 et D_2 simultanément. On note par X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres obtenus de D_1 et D_2 après lancement.
a) Donner l'univers image de X, (ensemble des valeurs prise par X).
b) Calculer la probabilité des événements suivants :
[X = 2] , [X = 3], [X = 4] et [X $\geq$ 5].
On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.