

Programme de colle pour la semaine 24 du 08/04 au 12/04

Polynômes

- Racines des polynômes, déf. racine multiple par les dérivées. Exemple multiplicité de 1 dans $P_n(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.
 1. Caractérisation des racines multiples par division.
 2. Le nombre de racines d'un polynôme de degré n est majoré par n , cas d'un polynôme avec trop de racines. Application à l'indépendance linéaire des $(\cos^k(x))_{0 \leq k \leq n}$.
 3. recherche des racines rationnelles d'un polynôme à coeff. rationnels (en remarque).
 4. Exemple des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(X)P(X+2) + P(X^2) = 0$ non exigible.
- Déf. polynômes associés, polynômes irréductibles.
 1. Tout polynôme non constant a au moins un diviseur irréductible.
 2. pour P irréductible unitaire $PGCD(P, A) = 1$ ou P , et $P|AB$ implique $P|A$ ou $P|B$.
 3. Théorème de décomposition en facteur irréductible (admis mais l'existence a été démontrée).
 4. Théorème de d'Alembert-Gauss (admis). Identification des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$, expressions de la décomposition en facteurs irréductibles dans ce cas, les preuves ne sont pas exigibles. En exercice, $P(x) \geq 0 \iff P = A^2 + B^2$.
 5. Fonctions symétriques élémentaires, lien entre coefficients et racines. Moyenne des racines de P et des racines de P' . Calcul de $\prod_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n} + \alpha)$, un exemple de somme de Newton avec un polynôme de degré 3.
 6. Polynômes d'interpolation de Lagrange. Interprétation géométrique.

Fractions rationnelles :

- Corps des fractions $K(X)$, propriétés usuelles de calculs sur les fractions (admis), identification des polynômes.
- Degré d'une fraction rationnelle, propriétés du degré.
- Forme irréductible d'une fraction rationnelle.
- Poles d'une fraction rationnelle.
- Décomposition en élément simple de $\frac{U}{(X-a)^n}$ avec expression des coefficients, décomposition de $\frac{U}{(X-a)^n V}$, partie polaire de a .

Exercices : Espaces vectoriels de dimensions finies et polynômes (peu d'exercices fait).

Prochain chapitre : les fractions rationnelles, les matrices.