$$\text{Variance}(M) = 4^2 \times \underbrace{(0{,}005 + .. + 0{,}005)}_{1000 \text{ fois}} + 2^2 \times \underbrace{(0{,}001 + .. + 0{,}001)}_{10000 \text{ fois}}$$

$$\text{Variance}(M) = 16 \times 1000 \times 0{,}005 + 4 \times 10000 \times 0{,}001 = \boxed{120}$$

$$\boxed{\text{écart type} = \sqrt{120}}$$

Etape 3

montant versé par assurance $\in [40 - 1{,}96\sqrt{120} ; 40 + 1{,}96\sqrt{120}]$

⚠ erreur classique : 1000 jeunes conducteurs $\neq$ 1000 × 1 jeune conducteur

ds le 1er cas, les comportements des uns sont compensés par celui des autres. ds le 2nd cas, on exagère le comportement d'un seul conducteur.

→ $\sum_{i=1}^{1000} X_i \neq 1000 \times X$ (m̂ moyenne mais variances ≠)

$$V(X_1 + \ldots + X_{1000}) = 1000 \times 0{,}005$$
$$\neq$$
$$V(1000 \times X) = 1000^2 \times 0{,}005$$

ex : calcul de variance et arbre de probabilité.

. Un vendeur de glace vend selon la loi Normale $\sim N(15 \text{ litres} ; 2)$ s'il fait beau et selon la loi Normale $\sim N(8 \text{ litres} ; 4)$ s'il ne fait pas beau

. La météo annonce qu'il y a 80% de chances qu'il fasse beau. Quelle est la probabilité de vendre au moins 10 litres de glace ?

réponses : si il y a plusieurs cas à envisager ⇒ faire un arbre de probabilité.

0,8 → beau = Ventes $\sim N(15 ; 2)$

0,2 → pas beau = Ventes $\sim N(8 ; 4)$

étape 1 : Vente $= 0{,}8 \times \text{Ventes}_{(\text{beau})} + 0{,}2 \times \text{Ventes}_{(\text{pas beau})}$

on a égalité entre les variables aléatoires étape 2 : Calcul de la moyenne et variance

moyenne / espérance $E(\text{Ventes}) = 0{,}8 \times 15 + 0{,}2 \times 8 = \boxed{13{,}6}$

Variance $\text{Var}(\text{Ventes}) = 0{,}8^2 \times 2^2 + 0{,}2^2 \times 4^2 = \sigma^2_{(\text{beau})} \times 0{,}8^2 + \sigma^2_{(\text{pas beau})} \times 0{,}2^2$

Théorème central limite (T^h CL) :

Z = Combinaison de variables indpdt $= \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$.

ou $\begin{cases} \text{si l'échantillon } \underline{n \text{ est grand}} \ (n \geq 30) \\ \text{si chaque } X_i \text{ suit déjà une } \underline{\text{loi normale}} \end{cases}$

alors $\Rightarrow Z$ suit une loi normale de moyenne $m = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X)$

et d'écart type $\sigma = \sqrt{\sum a_i^2 \sigma^2(X_i)}$

Ici Ventes $\sim N(13{,}6 ; \sqrt{0{,}80^2 \times 2^2 + 0{,}2^2 \times 4^2})$ (aucune simplification)

Ventes $\sim N(13{,}6 ; 1{,}8)$.

étape 3 : $p(\text{Ventes} \geq 10^2) = p\left(Z \geq \frac{10 - 13{,}6}{1{,}8}\right)$

$= 1 - p\left(Z \leq \frac{10 - 13{,}6}{1{,}8}\right)$

$= 1 - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{13{,}6 - 10}{1{,}8}\right)\right]$

$= P\left(Z \leq \frac{13{,}6 - 10}{1{,}8} = 2\right) = \boxed{97{,}72\,\%}$

IV - Calcul de variance et de moyenne pour des lois continues

(exercice de CC type économétrie ; concours niveau L3)

lois discrètes	lois continues
. Bernouilli	. Normale
. Poisson	. Exponentielle
. empiriques (observations)	. Uniforme
$X \in$ {nb finis de valeurs} ou {valeurs entières}	. Student, Khi 2
	$f(t)$ = fonction densité
$P_i = P(X = x_i)$	. $\{P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ fonction répartition probabilités cumulées
$\sum P_i = 1$ somme des probabilités	. somme probabilité $= 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,d(t)$
moyenne $= \sum P_i x_i$	. moyenne $= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x)}_{P_i} x\,dx$
Variance $= \underbrace{\sum p_i x_i^2}_{\text{moyenne des carrés}} - \underbrace{m^2}_{\text{moyenne}}$	. Variance $= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) x^2\,dx - m^2$

exo: exercice du prochain CC.

① $F(x) = \begin{cases} c \times \frac{1}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

X = Indemnité moyenne versée, par une assurance suit la loi de Pareto.

$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

a) Calculer l'indemnité minimum

b) préciser c pour que $f(x)$ définisse une loi de probabilité

c) Calculer la fonction de répartition.

d) Calculer l'indemnité moyenne

réponses: a) $f(x) = 0$ si $x < 1$ = Indemnité minimum.

b) $f(x) \geq 0$ et loi de probabilité ⇔ Somme des probabilités = 1 soit 100 %.

c) On veut c tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

répartition (proba cumulées) $= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = P(X \leq x)$

$= \int_{1}^{x} c \times t^{-4}\,dt$

$= \left[c \times \frac{t^{-4+1}}{-4+1} \right]_1^x$

$= \left[c \times \frac{t^{-3}}{(-3)} \right]_1^x$

$P(X \leq x) = \frac{c}{-3} \times \frac{1}{x^3} - \frac{c}{-3}$

$P(X \leq x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} + \frac{c}{3} = 1$

• donc $\boxed{c = 3}$ pour que $f(x)$ définisse une loi de probabilité

• $P(X \leq x) = 1 - 1/x^3$

d) loi discrète $\underset{\text{moyenne}}{E(X)} = \sum p_i x_i$

loi continue $\underset{\text{moyenne}}{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

Indemnité moyenne $= \int_{1}^{+\infty} 3 \times x^{-4} \times x\,dx$

Indemnité moyenne $= \int_{1}^{+\infty} 3 \times x^{-3}\,dx$

$= \left[3 \times \frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^{+\infty}$

Indemnité moyenne $= \frac{3x^{-2}}{-2} - \frac{3}{-2}$ • $\lim_{+\infty} = +3/2$

exo (suite) :

② Soit $T \sim exp_{m=2}$

a) Calculer la fonction de répartition et la fonction densité.

b) Calculer $E(T)$ et $V(T)$

réponses : a) répartition $\quad \bullet P(T \leq x) = 1 - e^{-x/2}$

d'après la définition : f° répartition $\xrightarrow{\text{dérivation}}$ f° densité

$P(T \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \xleftarrow[\text{primitive}]{} f(x)$

densité

$f(x) = \left[1 - e^{-x/2}\right]'$

$f(x) = -\left(-\frac{x}{2}\right)' e^{-x/2}$

$\quad = -\frac{1}{2} e^{-x/2}$

$P(T \leq x) = \int_0^x \frac{1}{2} e^{-t/2}\,dt = 1 - e^{-x/2}$

b) Il s'agit d'une loi discrète

moyenne = espérance = $\sum p_i x_i$

$E(T) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{2} e^{-x/2}}_{\text{densité}} x\,dx$

Le paramètre d'intégration x intervient 2 fois

$\Rightarrow$ IPP (Intégration par parties).

$U = \frac{1}{2}x \rightarrow U' = \frac{1}{2} \qquad V' = e^{-1/2 x} \longrightarrow V = \frac{e^{-1/2 x}}{-1/2} = -2e^{-1/2 x}$

$E(T) = \left[\frac{1}{2}x \times -2e^{-1/2 x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-1/2 x}\,dx$

Produit transformé $U' \times V$

$\underline{E(T) = +2}$

$\text{Variance}(T) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{2} e^{-x/2} \times x^2\,dx}_{} - 2^2 \quad m^2$

paramètre d'intégration $\Rightarrow$ IPP

$U = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow U' = x \qquad V' = e^{-1/2 x} \longrightarrow V = -2e^{-1/2 x}$

$I = \left[\frac{1}{2}x^2 \times -2e^{-1/2 x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x \times -2e^{-0,5 x}\,dx$

$I = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x/2}\,dx \qquad$ encore une IPP.

NB : A titre d'exemple $\int_0^{+\infty} x e^{-x/2}\,dx = 4$

$V(T) = I - 2^2 = 2 \times 4 - 4 = 4$

$\sigma(T) = \text{moyenne} = 2$

exo : économétrie

X_i : Dépense en loisir d'un français $\sim N(m;\sigma)$

D_i : Dépense en loisir d'un allemand $\sim N(m;\sigma)$

Echantillons de n Français et K Allemands

1. Quelle est la loi suivie par $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$ (Total des dépenses)
2. Quelle est la loi suivie par $\hat{X} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)/n$ (moyenne du groupe)
3. Quelle est la loi suivie par $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i/n - \sum_{i=1}^{K} D_i/K$

réponses : ① $E(X_i)=m$; $V(X_i)=\sigma^2$

$E(T) = \underbrace{E(X_1)}_{m} + \underbrace{E(X_2)}_{m} + \dots + \underbrace{E(X_n)}_{m} = n \times m$

$V(T) = \underbrace{Var(X_1)}_{\sigma^2} + \underbrace{Var(X_2)}_{\sigma^2} + \dots + \underbrace{Var(X_n)}_{\sigma^2} = n \times \sigma^2$

$T \sim N(n \times m ; \sqrt{n \times \sigma^2} = \sqrt{n} \times \sigma)$

② $E(\hat{X}) = m$

$V(\hat{X}) = V(1/n \times (X_1 + \dots + X_n)) = 1/n^2 (\underbrace{\sigma^2}_{Var X_1} + \sigma^2 + \dots + \underbrace{\sigma^2}_{Var X_n})$

$V(\hat{X}) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$

$\underbrace{\hat{X}}_{\text{moy des échantillons}} \sim N(\underbrace{m}_{E(\hat{X})} ; \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

NB : $T = \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\times 1/n} \hat{X} = \frac{\sum X_i}{n}$

$N(n \times m ; \sqrt{n}\sigma)$ $\qquad$ $N(m ; \sigma/\sqrt{n})$

Quand on divise une variable par un chiffre >0, les paramètres de la loi sont divisés par ce chiffre

③ $Z = \underbrace{\frac{\sum X_i}{n}}_{\text{moy français}} - \underbrace{\frac{\sum D_i}{K}}_{\text{moy allemands}}$ $\qquad$ $E(Z) = m - n$

$Z = \frac{(X_1 + \dots + X_n)}{n} + (-1)\frac{(D_1 + \dots + D_K)}{K}$

$V(Z) = \frac{\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2}{n^2} + (-1)^2 \times \frac{\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2}{K^2}$

(Variance d'une différence) $= \sum$ des variances

⚠ Il n'y a pas de signe négatif dans l'expression d'une variance

$V(Z) = \frac{n\sigma^2}{n^2} + \frac{K\sigma^2}{K^2}$