

# MODELISATION DE LA DYNAMIQUE GRAVITAIRE DANS UN CHAMP DE PERCEPTION : L'EXEMPLE DE L'ILE DE FRANCE

## Résumé

L'exploration de l'étalement urbain est au cœur de la Géographie comme de l'Economie géographique depuis le début des années 80, période à laquelle se sont amorcées les grandes évolutions du périurbain. De l'ensemble de ces travaux, on ne retient que très peu d'articles spécifiquement réservés à l'étude des facteurs de l'étalement voire des mécanismes qui le sous tendent.

Ce travail intervient dans la lignée des études anglo-saxonnes ou françaises portant sur la dynamique urbaine.

Il prend essentiellement comme appui l'outil mathématique comme support des dynamiques et en étudie les formes en terme de cartographie dans un système d'information géographique. La construction du système repose alors sur le calcul et l'introduction progressive de divers hypothèses urbaines : gravitation des populations, mécanique des fluides (modèle de trafic), mécanique générale du mouvement et perception de l'espace.

Par la simulation, il met alors en évidence, les grandes tendances de l'étalement urbain au sein de la région Ile de France.

**Mots clés :** gravitation, densité de population, dynamique urbaine, théorie du trafic, vitesse

## Abstract

The exploration of the urban sprawl is in the heart of the geography as the geographical Economy since the beginning of the 80s, period in which began the big evolutions of the outer-urban. Of all these works, we hold only very few articles specifically reserved for the study of the factors of the sprawl even mechanisms which stretch out.

This work intervenes in the lineage of the Anglo-Saxon or French studies concerning the urban dynamics.

It sets essentially as support the tool mathematical as support of the dynamics and studies the forms in term of mapping in a geographical information system. The construction of the system bases then on the calculation and the progressive introduction of miscellaneous urban hypotheses: gravitation of the population, the fluid mechanics (model of traffic), general mechanics of the movement and the perception of the space.

By the simulation, it brings to light then, the big tendencies of the urban sprawl

**Keywords :** gravitation, density of population, urban dynamic, traffic theory, speed

## Introduction

La question de l'étalement urbain est souvent envisagée de manière plus pratique que théorique comme le montre la plupart des travaux actuels. Souvent, ces études visent donc avant tout à explorer les formes de l'étalement à travers l'espace.

D'autres en revanche, préfèrent explorer la question d'un point de vue plus théorique. Ainsi, abordant les facteurs, Margo (1992) et Mills (1992) montrent qu'une partie de l'extension des banlieues serait imputable à la hausse du revenu des ménages (40% pour les USA). Brueckner ou Fansler (1983), quant à eux, supposent que la croissance de la population serait principalement à l'origine de l'étalement urbain. Enfin Leroy et Sonstelie (1983) émettent l'hypothèse que les innovations techniques, en matière de transport, auraient pour

conséquence un arbitrage entre une relocalisation en périphérie ou au centre ville (concentration).

Les formes d'étalement varient en fonction des territoires, comme le montrent les travaux de Newman et Kenworthy (1989, 1992, 1998). Les auteurs analysent la liaison entre forme urbaine et type de mobilité. La théorie des 3 âges de la ville<sup>1</sup> explore ainsi la question de la voiture face à l'urbanisme des villes :

Trois modèles se dessinent à l'échelle des continents : la ville dite californienne, largement dépendante de l'automobile et très étendue, peu dense, la ville européenne, construite principalement à partir des transports en commun (dont les évolutions sont encadrées par les pouvoirs publics) et enfin la ville asiatique (très dense et très congestionnée).

Si le modèle californien semble dominer à l'échelle mondiale, on observe depuis les années 1970, en Europe, une nouvelle forme d'urbanisation sous forme éparpillée dans les villages autour des grandes agglomérations. Pour Ewing (1997), ce style de croissance en *leapfrog*, avec des discontinuités, est aussi pleinement d'actualité aux Etats Unis. Ce phénomène de périurbanisation touche actuellement la plus grande partie du territoire français.

Aujourd'hui relativement connue dans ses formes, la périurbanisation peut être modélisée. Plusieurs types d'études sont cet esprit.

On distinguera tout d'abord l'étude par les densités de population, qui est la pionnière dans l'analyse des formes urbaines. Sur la base des travaux fondateurs d'Alonso (1964), cette question fut d'abord rattachée au modèle concentrique (Clark 1951, Newling 1969, Mills 1970, Bussière 1975) avant de trouver une nouvelle issue polycentrique avec le développement de l'Economie Géographique dans les années 1980 et 1990 (Wang, Zhou 1999, Small, Song 1994, Song 1994, Mc Donald, Prather 1994, Mc Donald 1987, Mahmassani, Baaj, Tong 1988).

D'autres voies ont, depuis, été explorées comme celles des fractals (Batty et al. 1986, 1995, Frankhauser 1997) permettant alors d'intégrer la notion d'échelle au sein même de la description des formes.

Plus récentes, les études systémiques ont sans doute encore plus contribuées à améliorer la connaissance de l'urbain. Elles comprennent les études par équations différentielles et les automates cellulaires. Ces derniers permettent de suivre les évolutions à l'échelle d'une ville (Lajoie et al. 2008) voire de simuler la dynamique de l'occupation du sol à des échelles très fines (Dubos Paillard, Germond, Langlois 2003, Antoni 2003).

Notre approche intervient non pas dans ces logiciels mais se positionne d'un point de vue plus théorique. Quatre hypothèses ont été retenues.

- La première suppose que les masses de population sont sources de flux. Dans sa forme la plus simple, le modèle gravitaire fonctionne selon une analogie avec la loi de la gravitation universelle. Le modèle employé ici en est une généralisation.
- La seconde hypothèse ajoute la mécanique du flux (modèle macroscopique du trafic). Là encore, il est question d'une analogie avec la physique. Ce modèle introduit la fluidité et la congestion au sein des réseaux.
- La troisième hypothèse est encore une analogie avec les lois de la physique. Elle apporte une réponse simple à la dynamique des populations en supposant que les déplacements sont, dans le temps, la résultante du jeu des forces d'attraction en présence dans notre espace.

---

<sup>1</sup> la ville à 5 km ou ville pedestre, la traked city ou ville du rail (transport en commun métro) et enfin la rubber city ou ville caoutchouc dont les formes sont dessinées par la voiture.

- Enfin, la dernière hypothèse envisage un espace non euclidien sur lequel repose nos dynamiques. Il est construit sur la psychologie de l'espace et principalement les questions de proxémique.

De ces quatre hypothèses, la plus importante est sans doute celle de l'espace psychologique. Quelles sont aujourd'hui les voies adoptées dans la littérature pour envisager la question de la perception urbaine ?

Commençons tout d'abord, d'un point de vue général, par les premières études de la psychologie de l'espace. Ces dernières remontent aux années 60 (Lynch 1960, Piaget 1960, 1967). Pour ces auteurs, les individus distordent les espaces en fonction de leur âge. Pour Piaget et *al.* (1967), la perception est avant tout égocentrée (le corps en est la majeure référence) et les objets peuvent être définis par la distance au corps. Les individus ont une « cognition spatiale » ou une spécifique « taille des espaces ». Beaucoup d'études ont étudié cette distorsion de l'espace en fonction de la classe d'âge. On expérimente généralement cela à partir d'un espace partitionné en quatre secteurs séparés chacun par une barrière parfois opaque. Les individus évaluent alors la distance entre deux points. Les effets de barrières sont plus importants pour les enfants que pour les adultes (White and Siegel 1984). Les mesures ont montré qu'il existait des lois de la proxémique. Cohen et Weatherford (1980) observent que l'individu exagère les distances de moins de trois pieds. Après 5 pieds, nous avons une sous-estimation de la distance. Diverses études des années 70 analysent la perception dans les villes (Comber Tagg 1975, Beck et Wood 1976). En France, Moles et Rohmer (1978) ont observé que le monde était la conséquence d'une boucle phénoménologique de la perception. Ces auteurs ont été les premiers à expliciter un graphique donnant en abscisse la distance au corps et en ordonnée la perception que nous avons de la métrique.

Ces travaux encore peu diffusés en dehors de la France restent une véritable référence pour les géographes et psychologues de l'espace. Plus que de donner de véritables solutions techniques, Moles, préfère suggérer des hypothèses.

Récemment, les travaux de M. Tillous (2009) reprennent pour une grande part l'argumentaire de Moles en s'appuyant toutefois sur des travaux plus anciens :

« Le phénoménologue Heidegger a formulé une pensée de l'espace fondée sur l'opposition entre une perception égocentrée, concrète de l'environnement, et une conception au contraire allocentrée, qui dérive de la première par un processus d'abstraction. Moles a montré que les deux systèmes philosophiques sous-tendaient effectivement nos actions. Ces prémisses philosophiques ont permis aux sciences cognitives de redéfinir ces deux systèmes de perception pour en préciser les mécanismes. »

Pour Moles comme pour d'autres auteurs, s'opposent deux visions du monde :

- Une vision dite égocentrée qui repose sur un monde qui tourne autour de l'individu ; « Je suis le centre du monde ».
- Une vision dite allocentrique qui vient en porte à faux de l'approche précédente. Elle suppose que le monde est perçu non plus à partir de l'individu lui-même mais de l'autre. Cela suggère que la référence de notre système psychologique n'est plus l'individu mais les autres individus. On évolue vers une logique multicentrique.

Pour établir la synthèse de ces deux approches, on peut considérer au final que les territoires égocentrés et allocentriques ne s'opposent pas mais se complètent. Il ne s'agit a priori que d'une question d'échelle de visualisation. Alors que pour un espace que l'on analyse selon un unique individu, on décèle un territoire clairement égocentré, il en est différemment des lors que l'on raisonne sur un groupe d'individus ou une société plus généralement. Le territoire perçu peut alors s'apparenter à une somme de perception de l'ensemble des individus. La vision de l'allocentrisme s'opposant au territoire égocentré n'est donc qu'une illusion puisque l'un est inclus dans l'autre.

A coté de cela s'impose la notion de proxémique. Elle a été fixée par E.T. Hall (1963) et représente la distance physique séparant deux individus pris dans une interaction. En somme, elle découle directement de l'espace allocentrique. Elle mesure principalement les distances entre les individus. Cette notion est également au cœur des théories de A.Moles et E.Rohmer. L'auteur montre ainsi qu'il existe des « coquilles » emboîtées autour des individus. Ces dernières représentent des sphères de perception correspondant à la distance au corps : le moi, le domicile, le quartier, la ville et le reste du monde.

Quel pourrait être l'apport de cette perception dans une approche formelle systémique ? En réalité, nous émettons l'idée que le processus de construction urbaine et le fonctionnement des villes, tant sur le temps long que court, obéit à des lois dont la géométrie n'est pas celle de l'eulidien. Ainsi, on observera que les déplacements domicile-travail se fondent largement sur des effets psychologiques de type « tunnel. En ce qui concerne le temps long, l'installation des urbains semble, comme l'observe classiquement A.Moles et d'autres phénoménologues, répondre à des logiques la encore non euclidiennes (un monde construit à l'image de nos perceptions). En cela, la géométrie fractale employée pour décrire la forme urbaine pourrait être l'expression de ces homothéties successives de l'espace-temps. Dans ces conditions, comment appréhender correctement la dynamique urbaine dès lors que l'on reste sur des fonctionnements basés sur la géométrie euclidienne ?

Mais concrètement, quel apport peut on espérer pour notre modélisation ? La question se pose alors en termes de limite ou de frontière. Toute la nuance entre l'approche euclidienne classique et cet espace que nous avons défini comme égocentré réside en une solution continue pour des problèmes de rupture d'espaces intermédiaires. En cela, la nouvelle approche, au regard d'une précédente version, envisage des variations importantes des dynamiques (non linéaires) entre la grande périphérie et l'hypercentre de la ville. Quand l'on définit une rupture entre l'urbain et le périurbain au niveau des densités de population, ne pourrait-on pas y voir une expression d'un changement graduel des métriques de type psychologique qui serait sous jacent dans la fonction de densité. La justification théorique d'une telle affirmation proviendrait de notre propension à ne pas percevoir de la même manière la ville et la campagne. La densité serait une des clés de cette différenciation.

Sur la base de ces principes généraux, est-il possible d'aller plus loin que l'unidimensionnel et poursuivre ainsi par une véritable géométrie des espaces-temps perçus ? L'enjeu le plus important serait alors d'introduire cette métrique au sein de notre système différentiel de base. La justification théorique d'une nouvelle géométrie pourrait-elle alors se voir confirmée au regard d'une approche plus classique euclidienne ? Y verrait-on un certain avantage ? Quels enseignements pourrait-on en tirer quand à la forme urbaine future ?

Pour répondre à ces question, cet article propose trois parties ; une première où nous évoquerons les hypothèses retenues, la seconde où il sera question a proprement parlé de la démonstration de notre système et enfin une dernière partie, où nous adopterons un point de vue plus régionaliste où nous procéderons à une comparaison entre le modèle initial et le modèle raffiné non euclidien.

## 1. Hypothèses principales et secondaires de la modélisation non euclidienne

### **1.1. Hypothèses générales sur l'espace**

- A) **Choix d'un espace euclidien ou non euclidien** basé sur la perception de n individus
- B) **Chaque portion du territoire i se caractérise par une masse de population  $g_i$**  (que l'on envisagera par la densité) indépendante de la position géographique.
- C) On supposera également que la ville se compose de i centres urbains : **ville polycentrique**
- D) La vitesse routière  $V_i$  envisagée constitue une moyenne au point i, ce qui pour un espace vide conduit à un plan

## 1.2. Du territoire égocentré à une géométrie non euclidienne des espaces psychologiques

Pourquoi définir un territoire psychologique plutôt que de partir sur une approche traditionnelle euclidienne ? Une recherche rapide portant sur les précurseurs de la Phénoménologie nous en donne les clés. Mais si cette idée est valide, comment parvenir à une modélisation de l'espace ? Ce paragraphe tente de répondre à cette question.

### 1.2.1. La Phénoménologie et la proxémique, des justifications en soit d'une modélisation de la perception

Les notions d'espace et temps ont largement été abordées par les précurseurs de la phénoménologie. Le premier auteur qui en définit les plus grands traits est E.Kant (1762) avec son esthétique transcendantale. Pour l'auteur de Critique de la Raison Pure, dont le titre aurait dû être Phénoménologie, l'expérience du monde sensible se réalise à la fois par l'espace et le temps qui sont des intuitions pures. Elles sont les formes a priori de la sensibilité. Par définition, comme la conscience passe par une étape suivante qui est la perception, l'espace et le temps ne peuvent pas être absolus.

Cette idée sera reprise par l'un des pères de la Phénoménologie moderne, Hegel (1807). Selon ce dernier la phénoménologie est par définition la « science de l'expérience de la conscience ». Tout comme E.Kant, il définit la connaissance sensible par le « ceci » qui est encore le « ici » et « maintenant », espace et temps.

La base de l'approche phénoménologique est l'intentionnalité ou encore « le caractère propre de la conscience d'être tendu vers un but ».

On dégage ainsi le schéma suivant.

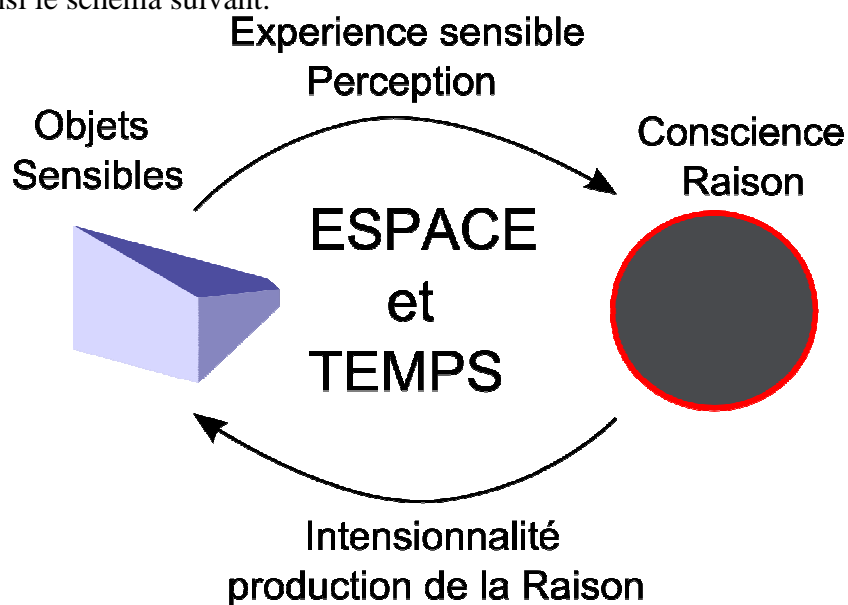


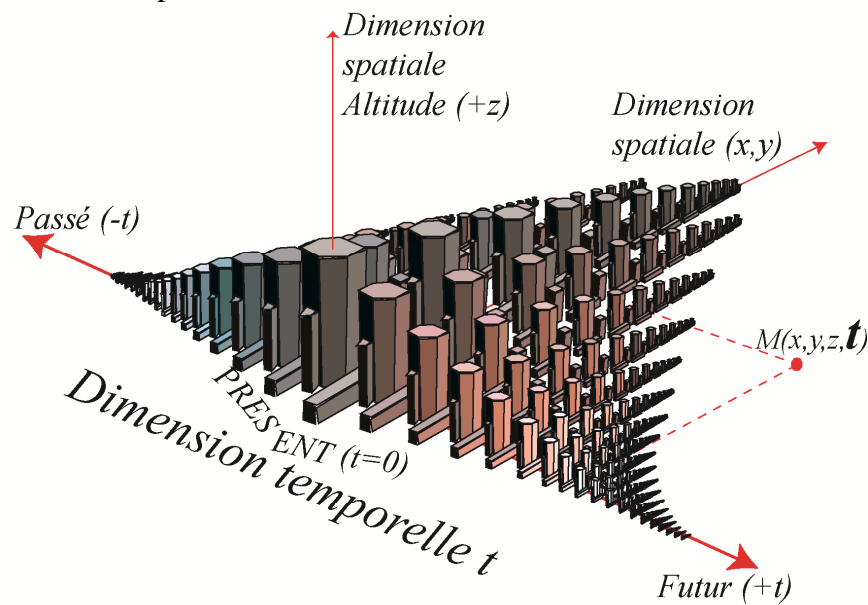
Figure 1. Boucle de la Phénoménologie

Plus proche de nous, A.Moles (1972) reprend pour la psychologie de l'espace cette idée de phénoménologie en l'adaptant pour la psycho-géographie. Guy Debord (1955) définira cette discipline comme « l'étude des lois exactes et des effets précis du milieu géographique, consciemment aménagé ou non agissant sur le comportement affectif des individus ».

A.Moles propose alors de définir l'espace comme « égocentré », c'est-à-dire centré sur le corps de l'individu. La notion de proxémique est alors fortement développée pour montrer comment l'individu distord les espaces en fonction de la distance au corps.

Deux éléments distincts vont alors définir la taille de l'objet dans l'esprit de l'individu : la distance au présent et la distance au corps.

En conséquence, le même objet n'apparaîtra pas de la même manière à l'esprit en fonction de sa position spatiale et temporelle.



**Figure 2.** Taille de l'objet en fonction de la distance au corps et de l'éloignement au présent

### 1.2.2. Quantifier la proxémique pour un individu

Il devient donc évident que le territoire est fondamentalement distordu en fonction de la distance au corps. Cela concrètement se traduit dans le paysage par l'image suivante :

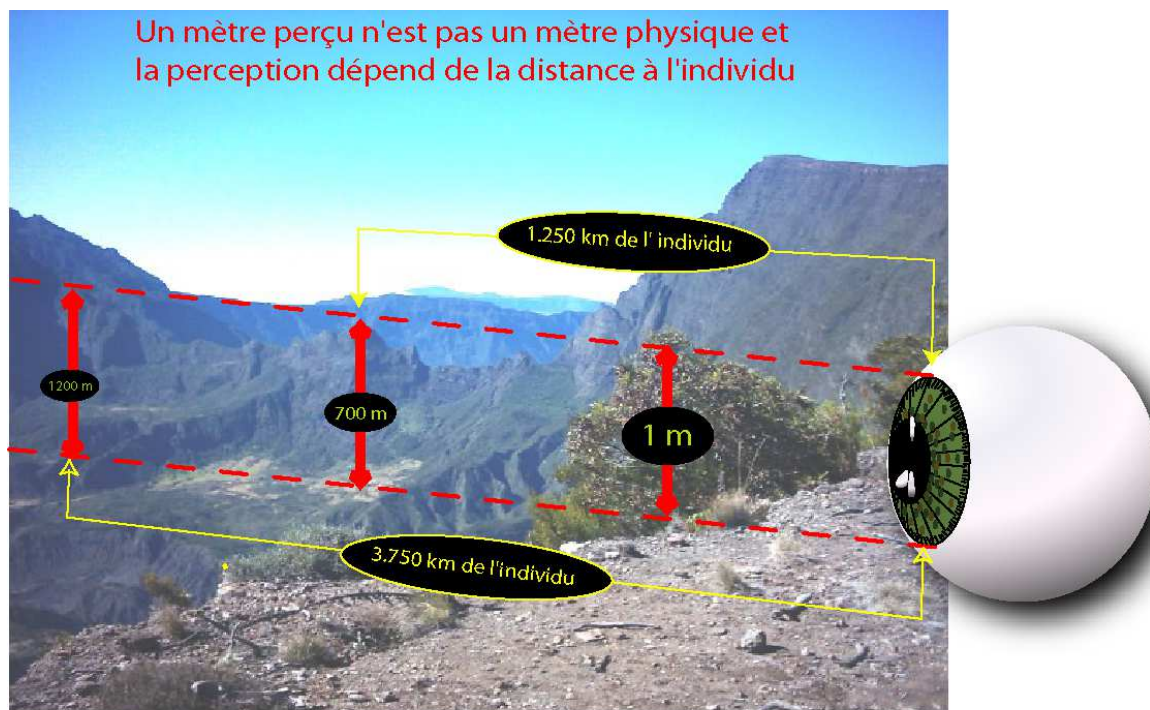


Photo : Ile de la Réunion Col du Taibit -Grand Benares

**Figure 3.** La contraction des distances physiques dans le cerveau, cliché Ile de la Réunion cirque de Mafate

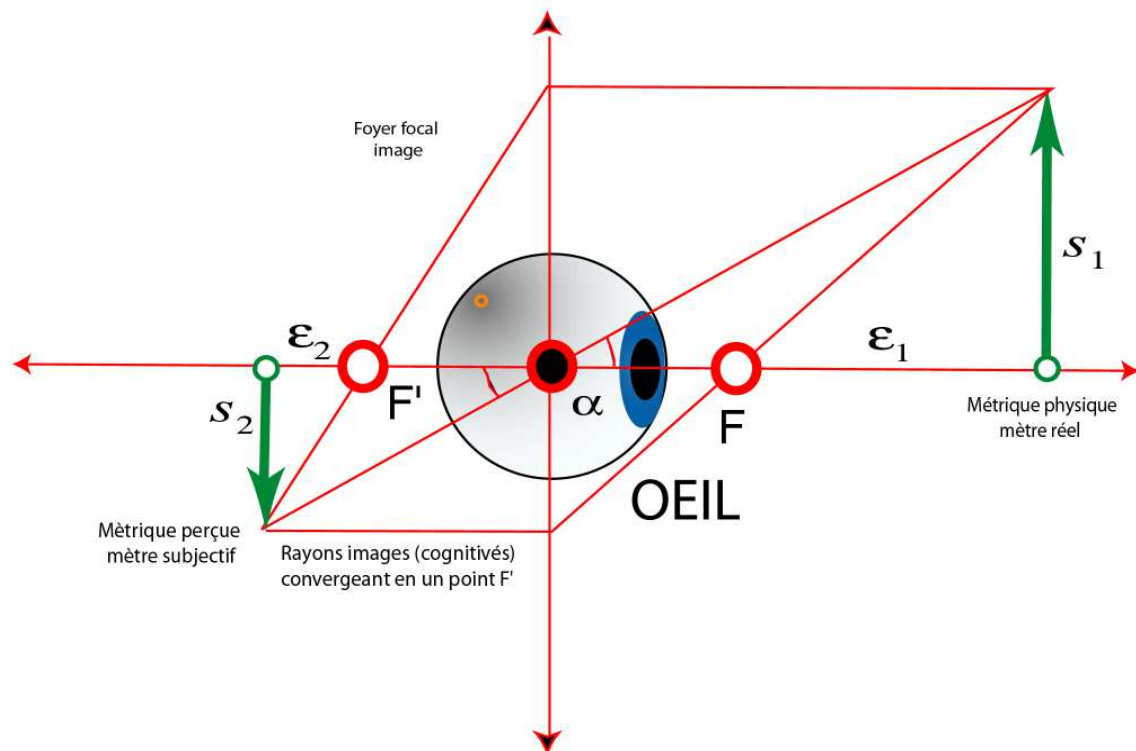
On le voit bien, la vue est bien à l'origine de cette déformation ; mais alors comment quantifier les différences de perception dans le paysage et plus généralement dans le territoire ? Nous proposons de partir des lois de l'optique générale pour parvenir à démontrer une relation stricte entre d'une part la métrique perçue (la valeur du mètre que le cerveau va assimiler pour un lieu donné) et d'autre part la distance physique au corps.

Posons une distance  $\varepsilon_1$  et une taille d'objet  $s_1$ . On déduit par l'optique l'image  $M'$  ( $\varepsilon_2, s_2$ ) de l'objet  $M$  dans l'esprit de l'individu. Cette dernière est bien plus petite. L'objectif est alors de mettre en relation l'objet  $M$  avec son image  $M'$  et cela en les mettant en lien avec la distance entre l'observateur et l'objet.

La figure 3 explicite cela.

Observons que dans ce schéma nous généralisons le principe de l'optique d'un objet géographique pour l'infini (rayons lumineux parallèles). A l'infini, les objets ne sont donc plus visibles en tant que tel mais simplement distordus dans l'image que l'on peut en avoir dans l'esprit. Aussi, physiquement cela se traduit par une convergence du foyer en deçà de notre objet<sup>11</sup>. De fait l'image virtuelle ( $s_2$ ) est plus petite que l'objet initial. L'autre éventualité consiste à évaluer l'image de l'objet si le foyer se situe au-delà. Alors, l'image apparaîtra plus grande. Cela signifie que dans un champ de perception de type non plus imaginaire mais visuel, l'objet est grossi. L'ensemble du raisonnement que nous produirons par la suite reste néanmoins parfaitement valide.

<sup>11</sup> La position du foyer  $F$  et de son image  $F'$  définit le champ de perception visuel (si  $F$  se situe au-delà de  $s_1$ ) et du domaine de la représentation si  $F$  est en deçà de  $s_1$  (l'objet est à l'infini donc non visible par l'individu mais perçu d'une manière intuitive).



**Figure 2.** Objet et image de l'objet par l'œil.

$$\tan \alpha = \frac{s_1}{\epsilon_1} = \frac{s_2}{\epsilon_2} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

D'où l'expression suivante  $s_1 = \tan \alpha s_2$

Calculons à présent la dérivée de  $\frac{ds}{dx} = s_2 - s_1 = \frac{s_1}{\tan \alpha} - s_1 = s_1 \left( \frac{1}{\tan \alpha} - 1 \right)$

Soit  $\frac{ds}{s_1} = \frac{1}{\tan \alpha} - 1$  d'où  $\ln(s) = \left( \frac{1}{\tan \alpha} - 1 \right) x + K$

En posant  $e^K = L$  et  $r = e^{\frac{1}{\tan \alpha} - 1}$ , on obtient la formule suivante

$$s(x) = Lr^x \quad [1]$$

$L$  est la métrique physique dans le réel,  $r$  est un paramètre de contraction de perception et  $x$  est la distance physique à l'utilisateur, enfin  $s(x)$  est la valeur de la distance perçue par l'observateur, nous la noterons par la suite  $L(x)$ .

Passons à présent à l'étape suivante : passer de la métrique perçue à la distance perçue

### 2.1.2. De la métrique perçue à la distance perçue

La différence entre les deux réside dans le fait que la métrique perçue mesure la perception du mètre étalon physique pour un lieu donné dans le cerveau alors que la distance perçue évalue la perception des distances entre les lieux.



Pour comprendre, il convient d'expliquer que dans un espace euclidien, toutes les unités d'espace sont équivalentes en tout lieu du plan. La distance représente donc la somme de l'ensemble des unités physiques (1mètre + 1 mètre + ... = D)

En admettant à présent que l'espace ne soit plus physique, mais psychologique alors le territoire devient par nature non euclidien ; les unités d'espace psychologique diffèrent en fonction de la distance au corps du sujet.

Reprenons notre expression [13], la distance  $X(x)$  est donc la somme de ces unités ou métriques de l'espace psychologique soit :

$$X(x) = \int_0^x Lr^x dx$$

En résolvant, on obtient :

$$X(x) = -\frac{L}{Lnr} (1 - r^x) \quad [2]$$

Où  $X(x)$  représente la distance perçue au corps,  $L$  est la métrique physique dans le réel,  $r$  un paramètre de réduction et  $x$  la distance physique au corps.

Passons à présent à la troisième étape :

### 2.2.3. du territoire égocentré au territoire multi-égocentré

L'espace défini par la métrique [2] est égocentré. Aussi, pour compléter ce tableau, il convient d'employer ou de définir des logiques allocentriques considérant que la référence majeure des espaces est l'autre. Reste à savoir quelle serait les modalités d'un tel procédé. Pour cela, il est nécessaire d'envisager l'hypothèse suivante.

Le territoire identitaire fonctionne plus en coopération qu'en compétition<sup>12</sup>. Pour quel motif ? Tout simplement parce que l'espace observé est le miens mais aussi celui du voisin et plus encore celui de l'interaction de nos relations. Il y a donc bien coopération dans les logiques de perception. A présent, existe-t-il une pleine coopération où la perception de A interagit avec celle de B ou a-t-on également un principe d'additivité ?

Si l'on considère une simple coopération, alors on doit admettre que seule la relation de A à B intervient et produit l'espace sans tenir compte des perceptions spécifiques de A et de B. Aussi, il convient de bien conserver ces deux éléments<sup>13</sup>. Au final, la seule logique admissible pour une métrique multiple est une somme de métriques individuelles soit

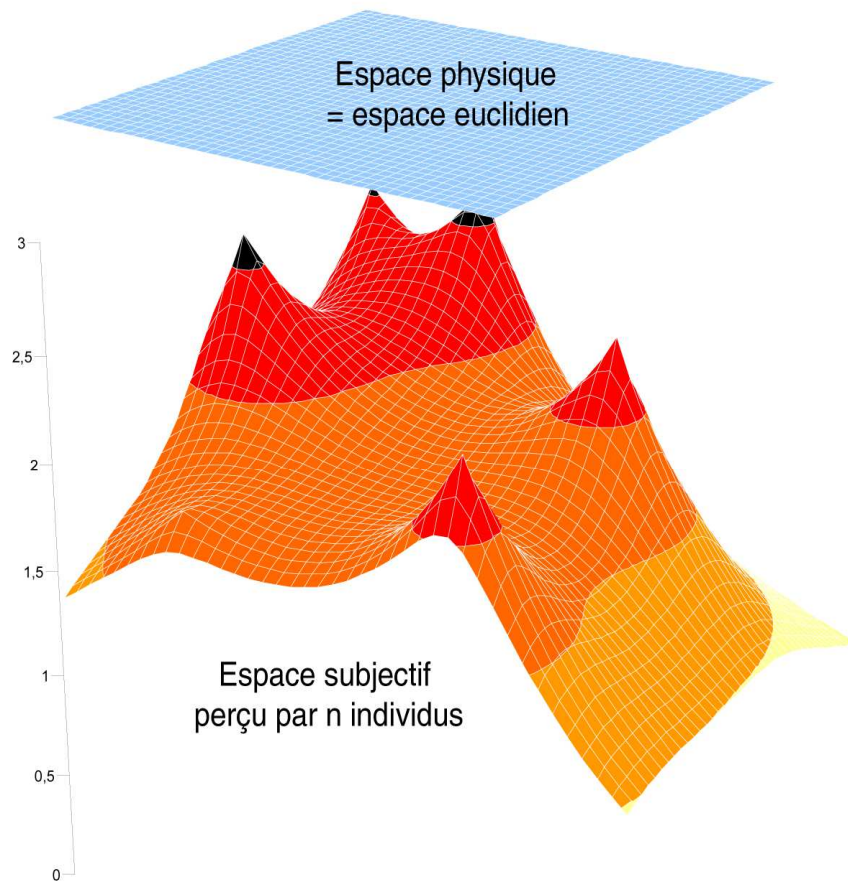
$$L(x_i) = \sum_{i=0}^N Lr^{x_i} \quad [3]$$

Dans cette relation les valeurs  $L$  et  $r$  peuvent être subjectives à l'individu ou non selon que l'on considère une homogénéité de perception des populations<sup>14</sup>.  $i$  représente le nombre d'individus ou par extension le nombre de groupe d'individus (un quartier, une commune...). Le graphique suivant nous donne l'image stylisée d'un monde subjectif non homogène.

<sup>12</sup> Pour une perception, on ne peut pas imaginer qu'il y ait compétition, ce qui impliquerait un produit comme relation.

<sup>13</sup> Soit la relation de A et B à l'espace ainsi que la relation de l'interaction de A sur B et de B sur A à l'espace.

<sup>14</sup> On pourrait imaginer plus que de raisonner à l'échelle individuelle de considérer une perception par un groupe d'individus, par exemple une couche de la société, une catégorie sociale. Dans tout autre cas, il est possible d'homogénéiser les facteurs  $L$  et  $r$  et de les concevoir comme des constantes absolue.



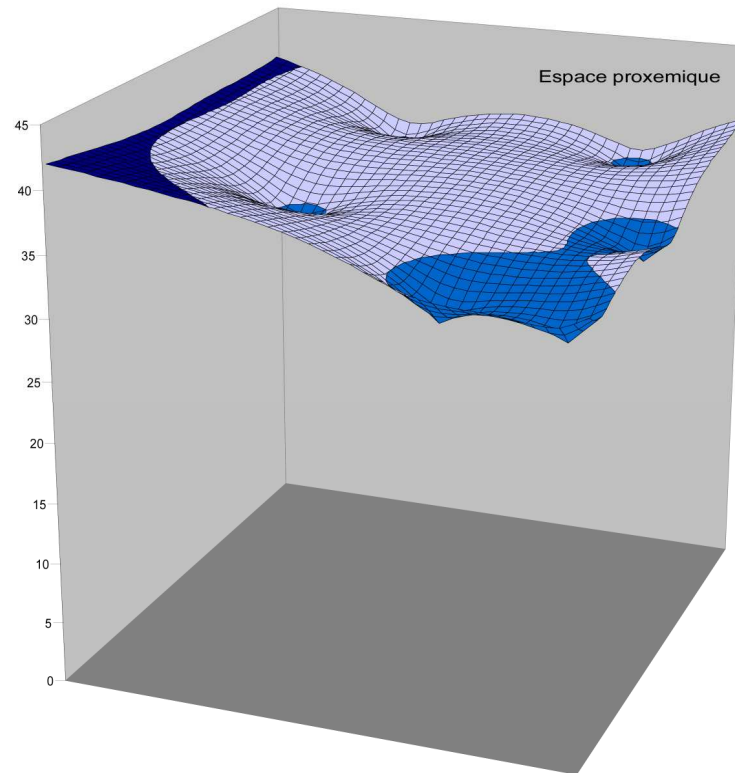
**Figure 3.** Le territoire déformé et imaginé par  $i$  individus<sup>15</sup>.

En poursuivant ce raisonnement, il est possible de représenter non plus les métriques allocentriques mais les distances allocentriques ou proxémique. Il suffit pour cela de sommer l'expression [2] en fonction de  $i$  individus soit :

$$X(x_i) = \sum_{i=0}^N -\frac{L}{Lnr} (1 - r^{x_i}) \quad [4]$$

Graphiquement, la géométrie de la proxémique ressemble à cela :

<sup>15</sup> A noté que la métrique a été à chaque fois pondérée ici par un nombre d'individus présent en  $i$ .



**Figure 4.** Espace proxémique, distance perçue pour un territoire multi-égocentré.

#### 2.2.4. Le lien mécanique proxémique-occupation de l'espace

Comme nous avons pu le noter dans la partie précédente, une des idées principales de l'espace est qu'il est occupé par des densités obéissant à une règle classique de répartition : le modèle de Clark (1951).

Or, nous avons énoncé que notre espace de base, sur lequel se réalise nos dynamiques sur le temps long, est non euclidien, on est donc en droit de montrer l'existence d'un lien mécanique unissant densité et proxémique.

L'hypothèse est donc la suivante :

Ce n'est pas l'espace physique qui guide la répartition des populations mais l'espace psychologique ; la distance physique, dans la formule de Clark (généralisée à  $i$  centres) doit être remplacée par la distance proxémique ou distance perçue soit :

$$D(X(x_i)) = \sum_i M_i e^{-\alpha X(x_i)} \quad [5]$$

Dans le sens inverse on obtient donc une expression de la proxémique en fonction de la densité soit :

$$X(x_i) = -\frac{1}{\alpha} \sum_i \text{Ln} \left( \frac{D(X(x_i))}{M_i} \right) \quad [6]$$

On notera par la suite  $X(x_i)$  plus simplement  $X_i$  et  $D(X(x_i))$ ,  $D(X_i)$

A noter que les dynamiques de vitesse ou de trafic se réalisent sur le temps court et donc ne nécessitent pas l'introduction de distance psychologique dans les calculs.

### 1.3. Des hypothèses de base maintenues par rapport au système précédemment construit

3 grandes hypothèses sont maintenues dans ce modèle au regard de celui que nous avons défini dans un article de cybergeogéographie, accepté en cours de relecture (Enault 2011)

- Le modèle LRW

$$\begin{cases} Q_i = K_i V_i \\ \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} + \frac{\partial K_i}{\partial t} = R \\ Q_i = -aK_i^2 + bK_i \end{cases}$$

Avec  $Q_i$  le débit au lieu  $i$  en véhicules par heure,  $K_i$  la concentration véhiculaire au lieu  $i$  en véhicules par km,  $V_i$  la vitesse moyenne agrégée en  $i$

- La quantité de force en  $i$

$$\sum \vec{P}_i = \tau_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} \quad [7]$$

$P_i$  représente les forces gravitaires s'exerçant à un instant donné  $t$  et en un lieu  $i$  sur l'objet en mouvement dans notre espace et  $\tau_i$  un paramètre relatif au lieu  $i$ .

- Le modèle gravitaire dans une variation avec le modèle de Clark généralisé

$$Q_i = G \sum_i M_i e^{-\alpha_i X_i} = G g_i \quad [8]$$

$M_i$  densité extrapolée au centre,  $G$  paramètre,  $X_i$  distance psychologique au centre,  $\alpha$ , gradient de densité,  $g_i$  densité polycentrique.

A présent, nous avons fixé nos hypothèses de travail, il convient donc de les mettre en musique dans une démonstration.

## 2. Le modèle général : démonstration du système différentiel

---

### 2.1. Exprimer la dynamique de la vitesse

L'objet de ce paragraphe est, à partir des hypothèses de §2.1 de rechercher une expression dynamique de la vitesse en fonction de la densité.

Pour ce faire, on part de la relation débit-concentration. En introduisant la vitesse, on montre d'après le système LRW que :

$$V_i = -aK_i + b \quad [9]$$

Où  $V_i$  est la vitesse moyenne,  $K_i$  la concentration véhiculaire et  $a$  et  $b$  des paramètres à déterminer.

Recherchons ensuite la dynamique de la vitesse par la dérivée soit :

$$\frac{dV_i}{dt} = -a \frac{dK_i}{dt}$$

La concentration peut être réduite.

$$\frac{dV_i}{dt} = -a \left( R - \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} \right)$$

Calculons à présent  $\delta Q_i / \delta x_i$ . On fait également apparaître  $g_i = M_i \exp(-\alpha X_i)$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial x_i} = -\alpha G \frac{\partial X_i}{\partial x_i} M_i e^{-\alpha X_i} = -\alpha G \frac{\partial X_i}{\partial x_i} g_i$$

La dérivation de  $X_i$  peut faire l'objet d'un calcul spécifique soit, il reste toutefois à en exprimer la partie  $x_i$  en fonction de  $X_i$ .

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_i} = L r^{x_i} \text{ or } r^{x_i} \text{ peut s'exprimer en fonction de } X_i \text{ dans [2], on en déduit que :}$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_i} = L \left( 1 + \frac{Lnr}{L} X_i \right)$$

D'où

$$\frac{\partial Q_i}{\partial x_i} = -\alpha LG \left( 1 + \frac{Lnr}{L} X_i \right) g_i$$

On posera au final  $\alpha GL = \lambda$ ,  $Lnr/L = -\beta$  et  $aR = \Gamma$ <sup>16</sup> ; ce qui nous donne la première partie de notre système vitesse-densité.

$$\frac{dV_i}{dt} = -\lambda(1 - \beta X_i) g_i - \Gamma \quad [10]$$

## 2.2. Définition de la gravitation des populations et de la dynamique des flux

Pour chaque point  $i$  de l'espace, on définira un repère de Frenet<sup>17</sup> de coordonnées curvilignes offrant ainsi la possibilité de mettre en évidence le lien densité vitesse par le biais de la seconde loi de Newton.

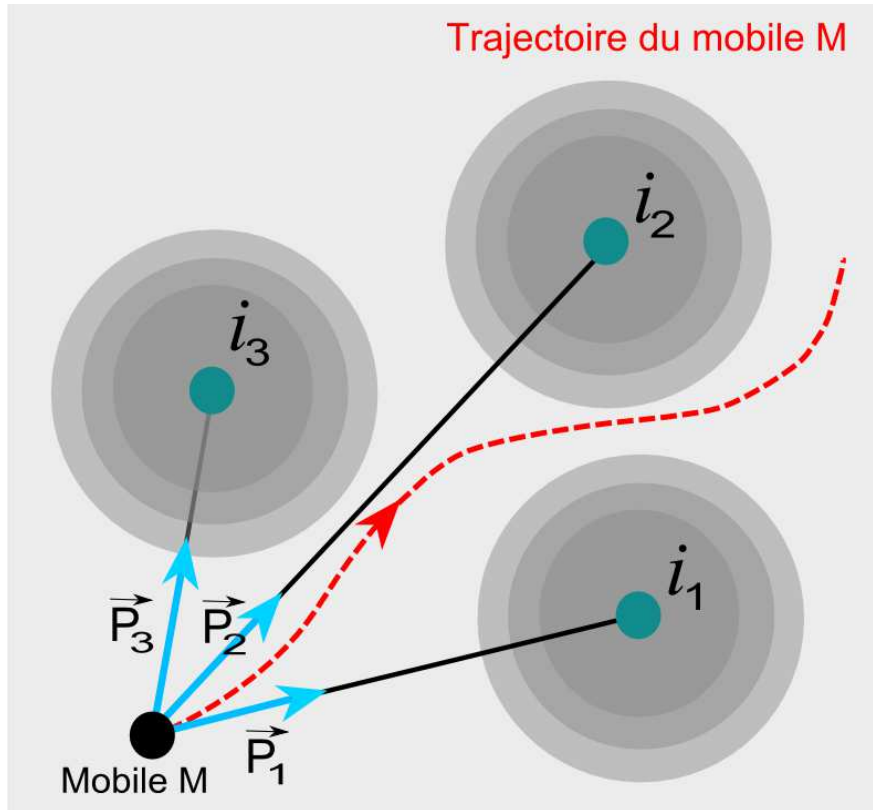
Dans une logique d'attraction gravitaire, tout flux est considéré comme convergeant ou divergeant vers la totalité des lieux  $i$  (suivant ainsi un principe polycentrique). La trajectoire alors suivie par un mobile sera fonction de la répartition gravitaire des masses de population pour l'ensemble des lieux  $i$ .

De fait, le mouvement observé oscille entre les différentes trajectoires autour des points  $i$ . Le schéma suivant explicite les modalités de la trajectoire du mobile suivant le repère de Frenet<sup>18</sup> soit :

<sup>16</sup>  $\lambda$  estime la part de la densité de population qui explique la variation de vitesse.  $\Gamma$  estime la part constante de décroissance de la variation de vitesse.

<sup>17</sup> Le repère de Frenet se définit comme un repère orthonormé mobile centré sur l'objet en mouvement. Il est décrit par deux coordonnées : la coordonnée tangentielle qui est tangente à la trajectoire de l'objet et la coordonnée radiale qui est perpendiculaire à cette dernière. La coordonnée tangentielle est formalisée par l'accélération  $dV/dt$  et la coordonnée radiale par le carré de la vitesse par la distance au centre de courbure soit  $V^2/x_i$ . On peut dans certain cas, linéariser les deux coordonnées en écrivant  $M = dt/dt + V^2/x_i$

<sup>18</sup> Dans lequel on ne conservera pas la partie tangentielle, ce qui conduirait à un mouvement spiralé.



**Figure 5.** Mouvement et attraction gravitaire

Dans ce modèle la composante radiale est par définition égale à  $V_i^2/x_i$ <sup>19</sup>. Il est également possible que les mouvements soient en sens contraires pour les populations. Dans ce cas, alors, la partie  $V_i^2/x_i$  devient négative car contraire à l'orientation du repère de Frenet.

On proposera alors une fonction aléatoire pour modéliser les déplacements du centre vers la périphérie ou de la périphérie vers le centre<sup>20</sup> ou plus concrètement, cela permet de formaliser des mouvements centrifuges ou centripètes (on choisit alors une fonction aléatoire pipée pour favoriser la dispersion ou la concentration).

Soit

$$aléa = (-1)^{\text{Entier}(\text{random}() + 1 + f)}$$

$f$  est défini comme un paramètre de randomisation pour « piper » la probabilité. Il est compris entre 0 et 0.5. Plus ce paramètre est proche de 0.5, plus la probabilité d'obtenir des mouvements de concentration est forte.

La somme des forces  $P_i$  s'exprime selon le modèle gravitaire polycentrique défini par [8]

D'où d'après [24] et [25] :

$$\frac{dg_i}{dt} = aléa \frac{2\tau_i \lambda}{Gx_i} (1 - \beta X_i) V_i g_i + aléa \frac{2\Gamma \tau_i}{Gx_i} V_i$$

On posera alors  $2\lambda/Gx_i = \xi$  et  $2\Gamma/Gx_i = \Phi$ <sup>21</sup>

On retiendra alors l'expression suivante pour le couple vitesse-densité :

$$\frac{dg_i}{dt} = aléa \tau_i \xi (1 - \beta X_i) V_i g_i + aléa \tau_i \Phi V_i \quad [11]$$

<sup>19</sup> Selon les lois d'accélération gravitaire

<sup>20</sup> Selon un processus de dès à 2 faces soit 1, soit -1 avec une partie pour accroître les chances d'obtenir soit un 1 soit un -1.

<sup>21</sup>  $\xi$  estime la force du lien entre vitesse et densité dans la variation de densité de population.  $\Phi$ , exprime la part de croît de la variation de densité liée à la vitesse

### 2.3. Calcul de l'espace psychologique dynamique

Il reste donc une autre équation à évaluer, celle de la dynamique de l'espace psychologique. Pour ce faire, il convient de se référer à la formule [6] et de procéder au calcul de la dynamique.

On a donc :

$$X_i = -\frac{1}{\alpha} \text{Ln}\left(\frac{g_i}{M_i}\right) \text{ on a donc}$$

$$\frac{dX_i}{dt} = -\frac{1}{\alpha} \frac{dg_i}{dt} \frac{1}{g_i}$$

On en conclue donc que

$$\frac{dX_i}{dt} = -\frac{1}{\alpha g_i} (\text{aléa} \tau_i \xi (1 - \beta X_i) V_i g_i + \text{aléa} \tau_i \Phi V_i)$$

Ou encore en posant  $1/\alpha = \Lambda$ , on obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dV_i}{dt} = -\lambda(1 - \beta X_i) g_i - \Gamma \\ \frac{dg_i}{dt} = \text{aléa} \tau_i \xi (1 - \beta X_i) V_i g_i + \text{aléa} \tau_i \Phi V_i \\ \frac{dX_i}{dt} = -\Lambda \left( \text{aléa} \tau_i \xi (1 - \beta X_i) V_i + \frac{\text{aléa} \tau_i \Phi V_i}{g_i} \right) \end{cases} \quad [12]$$

Le résultat, que nous obtenons ici, est un système dynamique mettant en relation directe la densité de population  $g_i$  avec la vitesse routière  $V_i$  et la distance psychologique  $X_i$  moyennant des variables d'ajustement. Dans la pratique cela signifie que l'évolution de la vitesse agit sur l'évolution de la densité et la distance psychologique et cela de manière interactive.

Si le système est relativement simple dans son expression, il ne dispose toutefois pas de solution car les trois fonctions  $V_i$ ,  $X_i$  et  $g_i$  sont liées dans le temps par leurs dérivées.

De par sa construction, il recèle également une partie aléatoire (*aléa*).

Le paramètre  $\tau_i$  représente, quant à lui, le taux local de croissance de la densité de population, on le calculera selon la formule suivante :

$$\tau_i = \frac{\Delta g_i}{\Delta t}$$

Enfin, le modèle suit l'évolution du trio vitesse densité espace perçu et cela pour un lieu  $i$  indéfini de l'espace. En conséquence, il permet dans le cadre d'une application à de multiples entités géographiques de suivre les trajectoires différenciées des espaces.

En cela, on peut dire que mathématiquement, notre modèle s'apparente au champ tridimensionnel de vecteurs d'un espace géographique.

### 2.4. Hypothèse pour l'initialisation du modèle [12]

Comment mesurer un espace psychologique ? Ce n'est pas évident d'autant plus les valeurs qui devront être attribuées seront anciennes.

On se base donc à la technique encore une fois pour évaluer les valeurs.

La formule est simple :  $X_i = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{g_i}{M_i}\right)$

Les valeurs  $\alpha$  et  $M_i$  sont évaluées en fonction de l'ajustement global de la densité à l'espace selon la formule de Clark.

Nous proposons dans la suite de cette étude d'appliquer notre modèle à la région Ile de France.

### 3. Application de la modélisation à L'Ile de France

---