SOMMAIRE

INTRODUCTION

La météorologie, le mouvement d'une attraction foraine, ou encore le déplacement des planètes sont des systèmes dynamiques ayant en commun d'être extrêmement difficiles à être décrits par le calcul.

Cette difficulté réside dans le fait que l'évolution de ces systèmes déterministes est sensible à leurs états initiaux. Comme il est en pratique impossible de connaître avec précision ces états, il est donc théoriquement impossible de prédire le devenir de tels systèmes. Ils sont qualifiés de chaotique. Cette constatation vient en opposition avec la vision de la physique classique qui veut que tout soit prévisible par le calcul.

Néanmoins, l'essor de l'informatique a entrouvert une conciliation entre les deux parties. La possibilité de faire des simulations à partir de conditions initiales proches a pu mettre en évidence le chaos. Ainsi il peut être envisagé de le théoriser. Reste à savoir si c'est possible. Alors l'informatique explique t-elle le chaos?

Après avoir défini ce que le chaos symbolise en sciences, il sera vu dans une deuxième partie ses représentations par l'informatique. Ceci permettra dans une troisième partie de savoir s'il est possible de le maîtriser.

I – La mise en évidence du chaos par l'informatique

La réalité du chaos physique est une notion récente. Toute la physique classique, depuis l'école antique de Pythagore, pense en effet que tout système doit être prédit par les nombres. Ce n'est qu'au début du siècle dernier que Henri Poincaré émis l’hypothèse, par l'illustration du problème à trois corps, que le devenir d'un système pouvait demeurer mathématiquement insoluble. Il faudra cependant attendre l'émergence de l'informatique et un heureux « hasard » pour que Lorenz expose toute la mesure de cette constatation.

I.A – Le déterminisme imprévisible

Le déterminisme est l'opposé du hasard. Dans le premier cas, le présent a une incidence sur le futur alors que dans le second il n'en a pas. De façon surprenante, ces deux concepts semblent être vérifiés par la science ! En effet, dans les années 30, Albert Einstein, héritier de la physique classique, déclara : « Dieu ne joue pas aux dés. », tandis que Niels Bohr, qui soutenait la théorie quantique laissant une part au hasard, répliqua : « Comment savoir à quoi Dieu joue ? ».

Niels Bohr avec Albert Einstein en 1930 à l'occasion d'un Congrès Solvay pris par Paul Ehrenfest (http://emm.upsd.wikispaces.net/Bohr+%28mod+4%29)

Plus intriguant encore, les travaux du mathématicien Henri Poincaré établis peu auparavant semblent proposer une conciliation. Ces travaux trouvent leurs sources dans ceux de Pierre-Simon de Laplace, l’un des premiers scientifiques du XIXème siècle à s’intéresser de près à la question de la stabilité à long terme du système solaire prévue par la loi de la gravitation newtonienne. Cette loi stipule que *tous les corps interagissent mutuellement et proportionnellement (selon G: la constante de gravitation) à chacune de leur masse respective (m_x), et inversement proportionnellement au carré de la distance (r) qui les sépare*. Cet énoncé étonnamment simple semble à lui seul traduire tous les mouvements connus à l'époque, de la chute des pommes à la rotation lunaire.

$$|\mathbf{F}| = G \frac{m_1 \, m_2}{r^2}$$

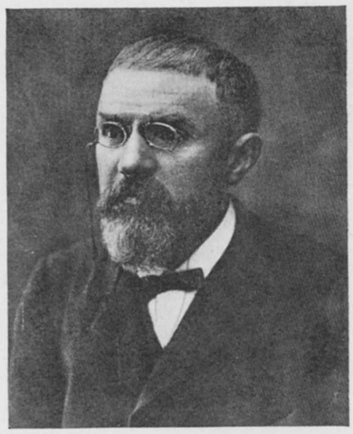
Expression mathématique de la Gravitation Newtonienne

Laplace tente de prouver que la gravitation newtonienne à elle seule est suffisante pour décrire le monde. Il approuve que les orbites des planètes ne décrivant pas d'ellipses parfaites peuvent être prédites par cette seule loi de Newton. Il établit ainsi que l'Univers est déterministe et prévisible ! Cette attestation se retrouve dans l'introduction de sa théorie analytique des probabilités :*« Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux. »*

Pierre-Simon Laplace

source: http://www.learn-math.info/french/historyDetail.htm?id=Laplace

Poincaré mit cependant fin au mythe. Pour ce faire, il a considéré un simple système à trois corps : Terre, Lune, Soleil. L'application de Newton lui révèle un système d'équations différentielles pour la trajectoire des corps insolubles grâce a la simple connaissance de l'état initial. En clair, la théorie de Newton empêche toute prédiction dès que l'on considère plus de deux corps. La seule possibilité pour faire une prédiction est de négliger l'influence lunaire sur la terre et le soleil donc de faire une simplification. Celle-ci a pour nom « problème à trois corps restreints ». La conséquence de cette simplification est l'apparition d'une incertitude sur la prédiction. Il existe bien un déterminisme puisque le présent limite les possibilités du futur. Cependant, ce futur est incertain. C'est là où intervient la conciliation entre déterminisme et hasard citée précédemment. Le futur est qualifié par cette étude de déterministe mais en restant hasard pour l'homme. Il faut toutefois noter que dans la rigueur mathématique, il ne sera pas question de hasard mais d'imprédictibilité.

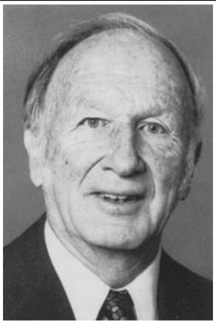


Henri Poincaré.

http://reporterducoindru.blog.lemonde.fr/2006/08/23/2006_08_de_quoi_se_perd/

Néanmoins, les travaux physiques de Poincaré furent peu suivis à l'époque. C'est seulement avec l'apparition de l'informatique que Lorenz mesura toute l'importance de cette constatation.

I.B – L'expérience d'Edward Lorenz



Edward Lorenz

http://fergdawg.blogspot.com/2008/04/in-passing-edward-lorenz.html

Edward Lorenz (1917-2008) est un éminent météorologue américain. En 1963, grâce à une célèbre expérience, rendue possible par le développement de l'informatique, Lorenz a montré, l'extrême sensibilité aux conditions initiales dans l'évolution d'un système.

Tout d'abord, l'informatique a permis une formidable avancée dans la résolution des calculs des équations de la météorologie. En effet, elles comportent un grand nombre de variables ce qui ne permettait pas de les résoudre à la main, les calculs étant trop longs. Pour décrire la complexité des mécanismes de l'atmosphère, Lorenz suggère alors l'utilisation de modèles très simples afin de comprendre ces mécanismes.

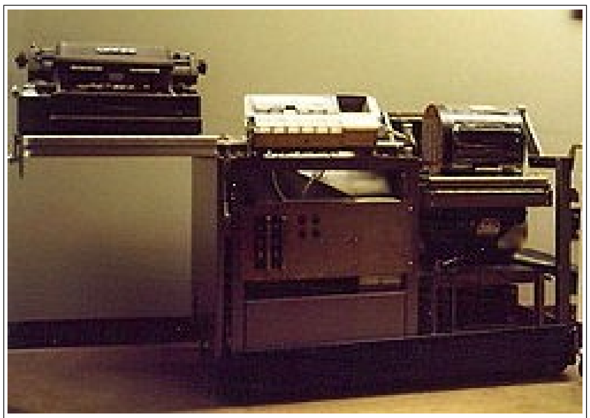
Il travaillait sur un modèle mathématique ayant pour but de prédire la température. Ainsi, dans un premier temps, il aborde le problème avec sept variables mais s'apercevant que quatre n'ont pas de rôle crucial, il garde finalement trois variables. Dès lors, Lorenz met en évidence des phénomènes très compliqués avec seulement trois équations non-linéaires.

Lorsque Lorenz veut relancer son modèle avec des résultats obtenus quelques jours plus tôt, il recopie les valeurs qu'il avait imprimées. Mais contrairement à son ordinateur, qui affiche les résultats avec un grand nombre de décimales, son imprimante n'en affiche que trois. Cependant, il s'attend quand même à retrouver les résultats qu'il avait obtenus précédemment bien qu'il n'a qu'une partie des décimales. Or il vient, sans y penser, d'entraîner une infime modification des conditions initiales en recopiant ces données imprimées. Si bien qu'une fois l'expérience relancée, il s'aperçoit qu'à partir de deux états initiaux très voisins, les trajectoires, au départ proches, divergent très rapidement. Lorenz en conclut que si d'aussi petites différences (trois décimales derrière une virgule) dans les conditions initiales débouchent sur de telles divergences dans les trajectoires alors la possibilité de prévision est détruite. Le rêve de Laplace se retrouve détruit.

En résumé, cette expérience a permis à Lorenz de montrer la possibilité de produire du compliqué à partir du très simple. Il a en effet isolé les trois variables les plus importantes des équations météorologiques, obtenant de ce fait un modèle simple correct permettant de comprendre le mécanisme. Il a ensuite réussit à mettre en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales qui est la caractéristique fondamentale de la théorie du chaos. Ce grand pas en avant dans la science du XXème siècle qui tend à condamner la prédiction sur le long terme est souvent appelé « effet papillon ». Autrement dit si deux états initiaux diffèrent d'une toute petite perturbation (un battement d'ailes de papillon), ils peuvent donner lieu à deux évolutions ultérieures, à l'autre bout du monde, tout à fait différentes : un beau temps quelque part, un cyclone ailleurs. Cette image, bien qu'exagérée, illustre tout de même clairement ce phénomène de sensibilité aux conditions initiales.

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = rx - y - xz$$
$$\dot{z} = -bz + xy$$

Les trois équations qui donnèrent à Lorenz un modèle météorologique simplifié à partir des sept équations de Navier-Stokes



Le Royal-McBee LGP-30 qui permit à Lorenz de mener ses simulations

source:*ArnoldReinhold; http://en.wikipedia.org/wiki/LGP-30*

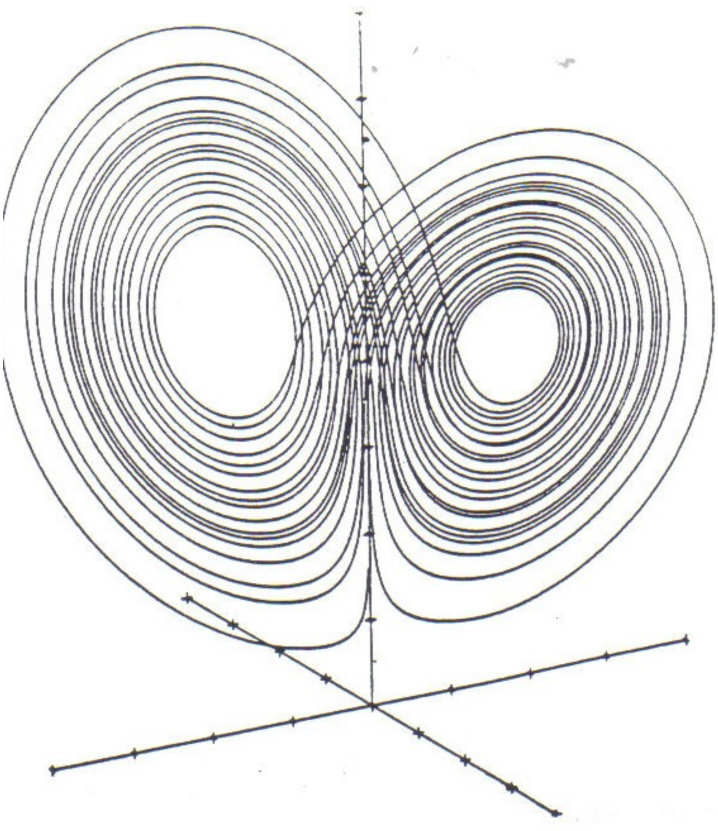
Le chaos est une théorie qui associe déterminisme et imprévisibilité. Cette imprévisibilité est embarrassante pour une discipline qui a pour but de faire des prédictions. Existe t-il néanmoins des outils pour aborder cette imprévisibilité ?

II – Les représentations du chaos

Grâce à l'informatique, les physiciens et les mathématiciens ont réussi à développer deux outils pour comprendre le chaos. Un outil concret, l'attracteur, et un autre plus abstrait, la fractale.

II.A – Les attracteurs étranges

Un système dynamique, comme l'évolution d'une population, est défini par les conditions initiales x0∈X et par des lois d'évolutions: f: X-> X Un système dynamique ayant pour état initial x0 présente donc une évolution de la forme (x0, f(x0), f(f(x0)), f(f(f(x0))),…). C'est effectivement à partir de l'état initial que découle les futurs possibles du système dynamique. Toutes les valeurs issues de l'évolution d'un tel système dépendent de l'état initial x0.



L'attracteur de Lorenz avec 3 axes pour les 3 variables

source :http://www.ex-tempore.org/little/little.htm

La totalité des trajectoires possibles découlant de l'évolution d'un système dynamique finie par donner une structure finie. Cette structure est appelée espace des phases. Les variables à la base de la construction de cet espace sont celles qui interviennent dans les équations différentielles, du second ordre, décrivant l'évolution du système dynamique. Elles contiennent toute l'information sur la dynamique du système physique étudié. L'espace des phases permet d'interpréter géométriquement l'évolution de ce système. Un attracteur est en fait la représentation de toutes les composantes suffisantes pour décrire un système dynamique dans un espace de phases. Ainsi, l'attracteur d'un système régit par la vitesse et la position sera la synthèse graphique de ces deux composantes. Il aura la forme d'un cercle. Ce n'est pas une trajectoire réelle, mais il permet de rendre compte, dans ce cas, de la régularité du mouvement. Néanmoins, lorsqu'il est issu de l'évolution d'un système chaotique, la trajectoire étant imprévisible, l'attracteur déraille : il est dit étrange.

L'attracteur étrange de Lorenz représente l'ensemble des trajectoires du système dynamique qu'il étudiait (la météorologie). En sachant que le système qu'il étudiait était simplifié : l'étude étant faite avec trois variables seulement, il est considéré comme tridimensionnel. L'attracteur montre donc l'évolution de ces trois variables uniquement. Il est décrit en forme d'ailes de papillon. La trajectoire s'enroule d'abord sur une aile puis s'enroule sur la deuxième avant de revenir sur la première etc. L'attracteur montre donc que cette trajectoire n'est pas périodique. Il est la représentation d'un système chaotique à savoir la météorologie.

Même si Poincaré avait forgé les outils mathématiques nécessaires à la science de chaos, le manque de moyens de l'époque ne permettait pas d'expliquer et de représenter très précisément le chaos. Cependant, l'apparition de l'informatique puis le perfectionnement actuel de logiciels spécifiques permet d'obtenir des images surprenantes et toujours plus précises d'attracteurs étranges. Étant des transcriptions directes du chaos, cela permet de mieux le représenter. Ces images permettent enfin de voir le visage du chaos.

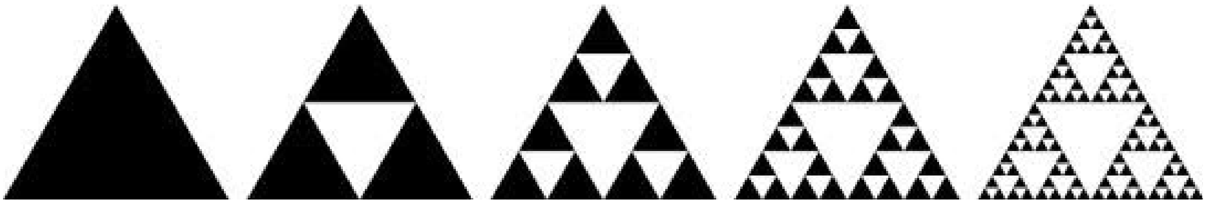
A partir de là, des phénomènes tels que les perturbations orbitales du système solaire, la météorologie ont pu être mieux compris.

II.B – Les Fractales

Benoît Mandelbrot

Les fractales ont toujours existé ; elles sont dans nos poumons, nos reins, dans les plantes, les fleurs, jusque dans les mouvements climatiques. De nombreuses formes présentes dans la nature peuvent être décrites mathématiquement comme fractales. Par définition, une fractale est une courbe ou surface aux contours irréguliers et fragmentés. Elle se crée en suivant des règles déterministes ou stochastiques impliquant une homothétie interne.

Le processus itératif à l'infini est l'une des caractéristiques déterminantes des fractales que l'on appelle « autosimilarité ». Autrement dit, que l'on fasse un zoom avant ou arrière sur un objet fractal, la structure reste invariante. Si l'on veut faire simple, on dit que le tout ressemble à la partie, qui ressemble elle-même à une partie plus petite ; le motif se répète à l'infini. Prenons un exemple d'autosimilarité dans la nature. De la base d’un arbre à sa partie supérieur, on à des branches mères qui se divisent en branches plus petites. Si on regarde les ramifications un peu plus haut, on voit que le schéma est le même et se répète sur l’ensemble des branches jusqu’aux feuilles situées aux extrémités. L’aspect



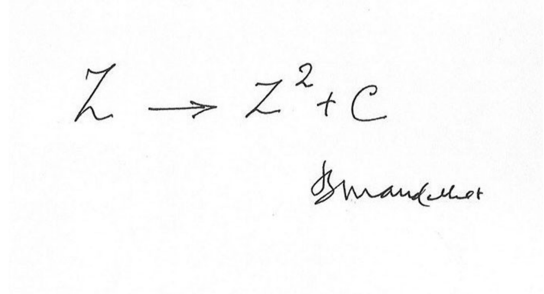
Représentation d’une fractale : le triangle de Sierpiński (ou joint de culasse de Sierpiński)

source: http://www.opusmang.com/forums/index.php?topic=1100.0

fractal est donc relié au chaos mathématique ; il y a un ordre derrière le désordre apparent.

Pendant longtemps les motifs de la nature échappaient donc aux lois des mathématiques classiques basées sur des formes simples telles que des cercles, des pyramides, des tétraèdres, etc. Néanmoins, dans les années 70, Benoît Mandelbrot fait voler en éclat des siècles de mathématiques en présentant sa nouvelle géométrie : la géométrie fractale. Dans la géométrie dite normale, 1 dimension c’est une ligne droite, 2 dimensions c’est une surface plane, et 3 dimensions c’est un cube. Le mathématicien affirme qu’un objet peut avoir une dimension; c’est le cas des fractales, d’où le terme de géométrie fractale. Tous les motifs de la nature présentent donc une géométrie fractale ; en l’exprimant mathématiquement on réduit ainsi le chaos apparent. Ce sont les travaux de Julia et Mandelbrot.

Gaston Julia, durant la première guerre mondiale, réalisa une expérience qui attira l’attention de Mandelbrot par la suite. Julia utilisa une équation de récurrence de la forme ci contre et pour une valeur fixe de « C », il fit varier « Z ». Grâce à l’invention d’ordinateurs puissants, on reporta les résultats sur un graphique et obtient alors une fractale appelée « ensemble de Julia. »



La transformé de Julia dédicacé par Mandelbrot

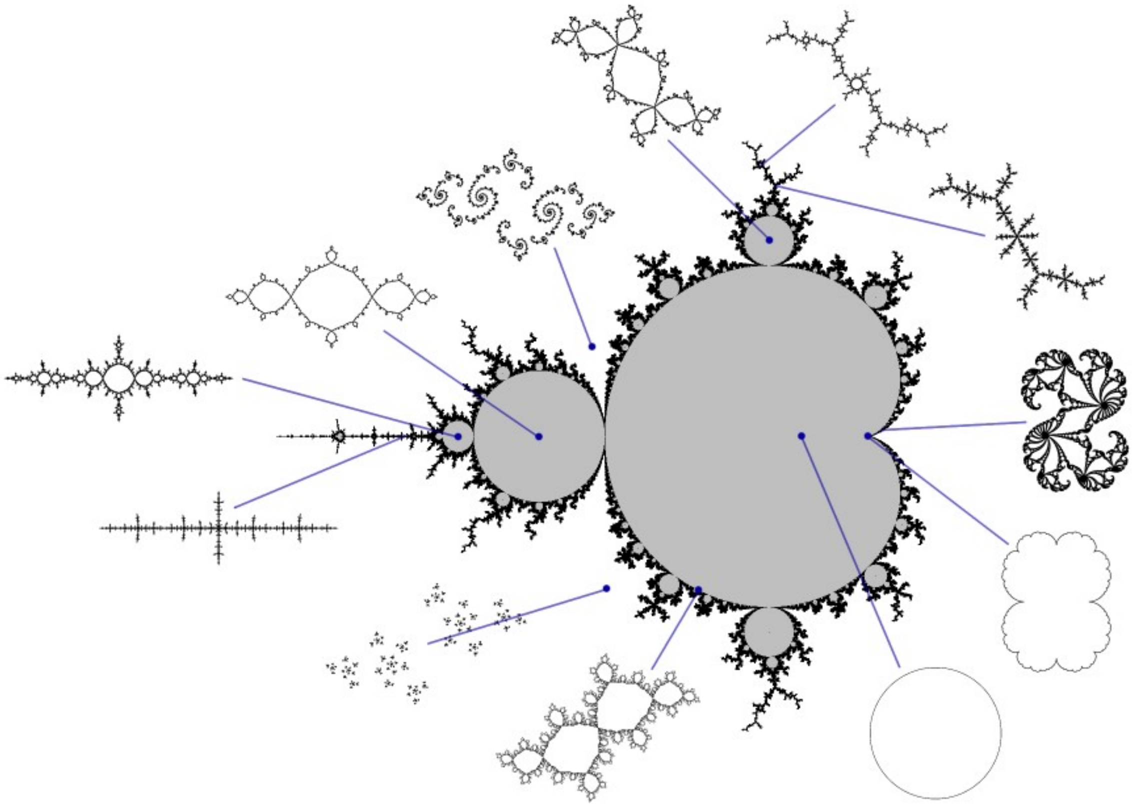
source: http://www.edge.org/3rd_culture/serpentine07/Mandelbrot.html

Par exemple, la « fractale de Newton » est un ensemble de Julia donné à l’aide de la méthode de Newton. Soit l’équation : $X_{n+1} = Xn - \frac{f(Xn)}{f'(Xn)}$

Si le zéro d’une fonction est suffisamment près de X=X0, la suite des nombres réels définie à partir de l'équation converge vers le zéro en question. Il y à plusieurs valeurs de X0 pour lesquelles la méthode de Newton converge vers un même zéro. En reportant cela sur ordinateur, on obtient selon une fractale de Newton.

Benoît Mandelbrot pris la même équation de récurrence mais fit varier la valeur de « C » pour un « Z0 » fixe. En procédant à l'itération de son équation, il obtient sa propre suite de valeurs qu'il reporte graphiquement sur ordinateur ; le résultat est une sorte de cartographie de tous les ensembles de Julia ; il à pour nom « l'ensemble de Mandelbrot ». De ce fait, cet ensemble devient le symbole de la géométrie fractale.

Dès lors, il fut possible de créer des motifs complexes grâce à une équation simple. C'est pourquoi Benoît Mandelbrot affirme pouvoir mesurer avec précision des formes naturelles et effectuer des calculs capables d'étudier des formations diverses comme les traces d'assèchement des fleuves, les mouvements des nuages, etc. ; on a réduit le chaos à l'aide des fractales.



L'ensemble de mandelbrot: "une carte des ensembles de julia contigus"

source : http://images.math.cnrs.fr/L-ensemble-de-Mandelbrot.html

Les physiciens et les mathématiciens ont chacun su développer des outils nécessaires pour aborder le chaos. Ces outils peuvent-il néanmoins permettre de le contrôler ?

III/Le contrôle du chaos par l'informatique

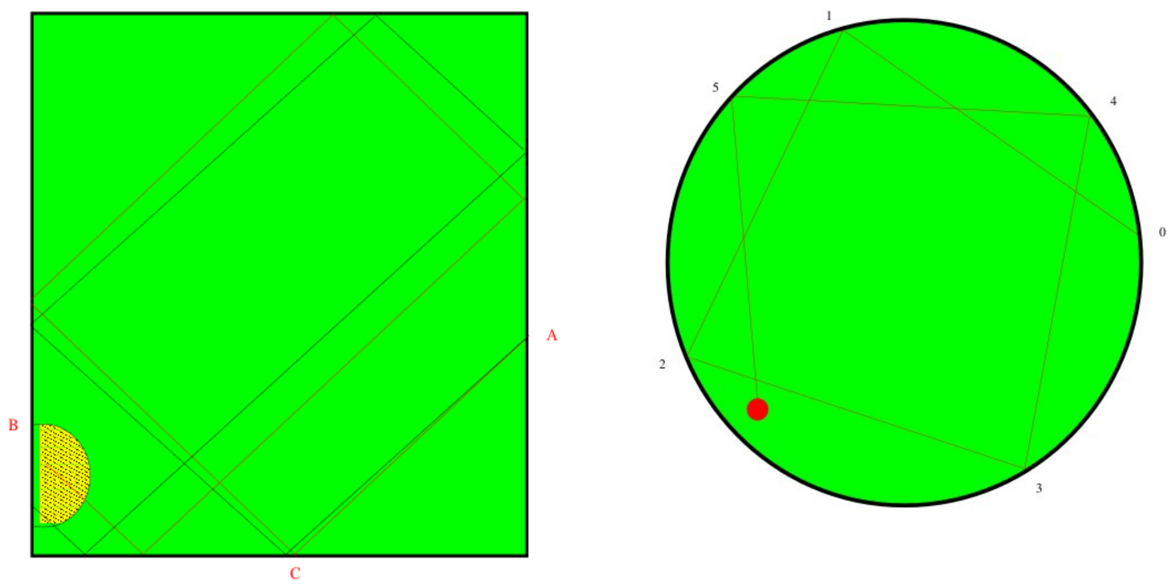
L'idée de contrôler le chaos revient à rendre indépendant un système de ses conditions initiales. Cette action nécessite une excitation extérieure au système appelé forçage. La difficulté réside dans le choix du forçage. L'étude mathématiques de systèmes dits hamiltoniens comme le billard ont pu développer les outils nécessaire pour faire ce choix.

III.A La formation de systèmes chaotiques

Le chaos a pour essence la complexité. En effet comme le démontre plus haut le problème à N corps d'Henri Poincaré, plus N est grand, plus le système a de probabilité d'être chaotique. Dans de nombreux cas le système a tout de même ses possibilités d'évolution restreintes par sa nature. Cette restriction est la définition mathématique de hamiltonien.

Pour mettre en évidence cette relation entre chaos et complexité il convient d'étudier les mouvements de boules sur différents billards. Ici, par exemple des caractéristiques hamiltoniennes sont données par la nature des matériaux et les dimensions des objets.

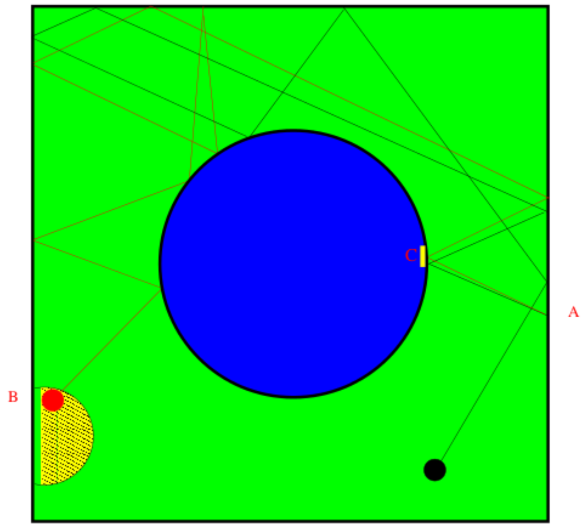
Il faut d'abord déterminer les trajectoires possibles pour un billard régulier, c'est à dire carré ou circulaire. Johannes Kepler a démontré que dans ce cas le déplacement des boules est parfaitement prédictible. En effet, en partant d'un point A et en visant un point C, un joueur est certain de passer par un point B à chaque tentatives (voir figure 1 ci-dessous).



<u>Figure 1</u> : Pour un billard régulier les boules partant de A avec des conditions voisines arrivent à coup sur B, la prédiction est possible : le chaos ne s'est pas manifesté.

Source : www-gat.univ-lille1.fr/~debievre/chaosmathphys0611.pdf

En revanche, pour un billard plus complexe, par exemple celui dit de Sinai qui possède un obstacle circulaire en son centre (voir figure 2 ci-contre), le mouvement à une description plus complexe. Ceci est du à la superposition de deux contraintes : celle donnée par les bordures de l'objet plus celle de l'obstacle. Les tentatives du joueur se retrouvent hasardeuses. Une petite différence de d'impulsion donné à la boule par la queue, peut radicalement modifier la trajectoire de la boule. Le système reste toutefois déterministe car toute la trajectoire emprunté par la boule est conditionné par l'état initial en A. La position future reste toujours dépendante de l'instant présent. Ce n'est que le trop grand nombre d'interactions de la boule qui la rend extrêmement sensible à la conditions initiale. Ceci empêche la prédiction. Effectivement, pour réaliser une prédiction il faudrait avoir une précision infinie sur la condition initiale ce qui par définition est physiquement impossible. En effet, la théorie quantique actuelle précise, par le principe d'incertitude d'Heisenberg, qu'à très petite échelle il existe une limite de l'information due à la nécessité pour collecter cette dernière d'influencer soit sur la position ou la vitesse de l'objet étudié.



<u>Figure 2 :</u> Pour le billard de Sinaï les boules partant de A avec des conditions voisines peuvent se retrouver partout ; la prédiction n'est plus possible, il y a chaos.

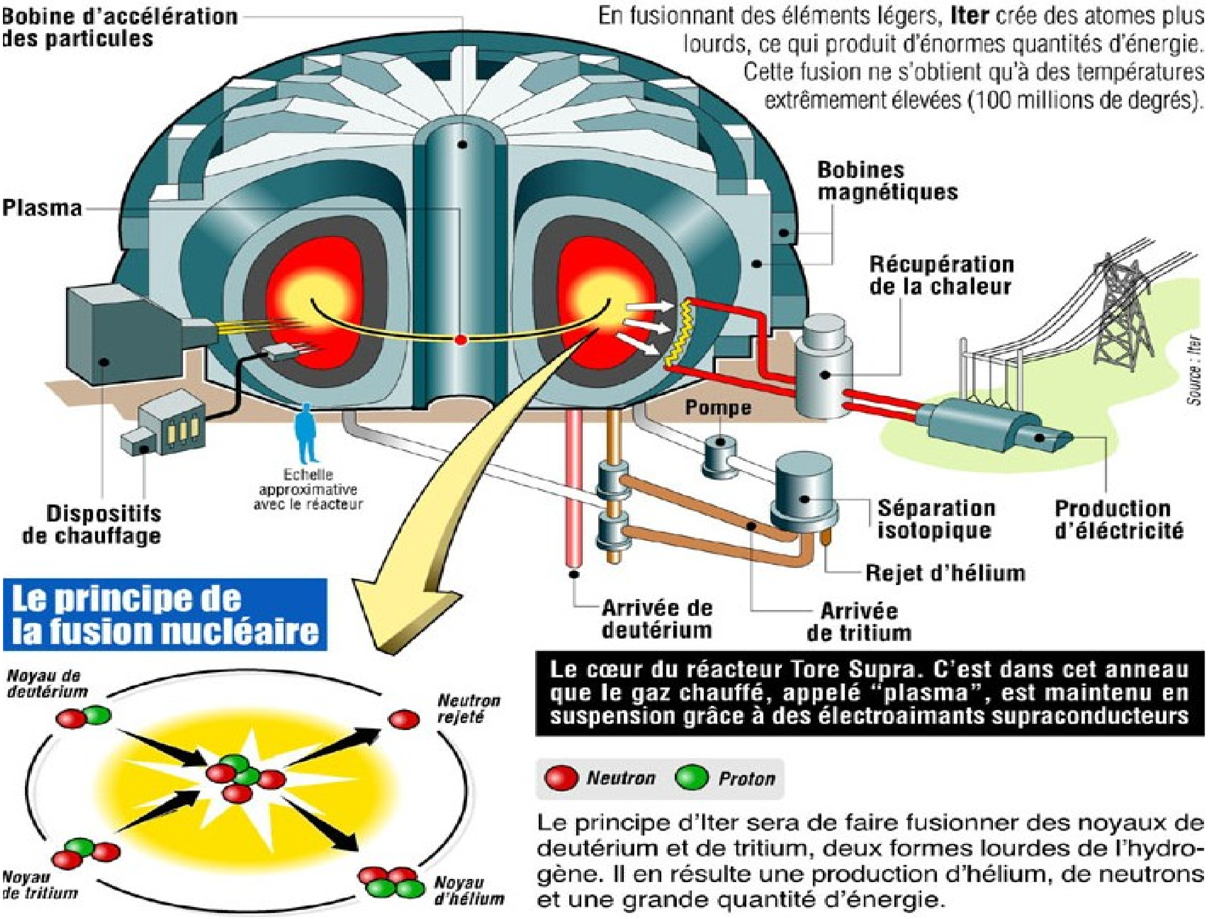
Si la connaissance sur le présent est limité, l'ordinateur permet de faire des études sur les chemins privilégiés via les attracteurs décrits précédemment. La possibilité de réaliser ces études est la clef pour entrevoir de contrôler, de façon relative, le chaos.

III.B La réduction du chaos

Une solution triviale mais pour le moins efficace pour se débarrasser du problème posé par le billard de Sinaï est de surélever un des quatre pieds de la table. A coup sur, la boule ira se réfugier dans le coin opposé au pied levé. L'action réalisé est appelé forçage. Le système devient parfaitement prévisible et n'est donc, par définition, plus chaotique. En réalité, les chocs avec les bords et l'obstacle du billard créant la complexité originale deviennent peu importants face à l'attraction terrestre. Sur un système à plusieurs variables, le forçage permet d'en créer une qui surpasse les autres. L'importance des conditions initiales devient ainsi marginale pour décrire le mouvement de la boule.

Si, dans ce cas, le forçage semble efficace, il modifie en outre les propriétés hamiltonienne du système. Ce dernier a perdu en degré de liberté. Un unique mouvement devient possible : vers le coin inférieur. Dans la pratique cela pose un problème de taille. Il devient souvent inutile de contrôler un système dénaturé car sa caractéristique bénéfique disparaît également. L'objectif est donc de trouver le forçage qui réduise l'aspect chaotique tout en conservant les propriétés du système. Le forçage doit notamment avoir un faible coût énergétique pour des applications industrielles.

Une de ces application est le projet ITER (en français : Réacteur Thermonucléaire Expérimental International ; voir schéma ci-dessous). Celui-ci peut être mené à terme uniquement par le contrôle des champs magnétiques qui ont par nature un aspect chaotique. Le forçage en vu d'être employé est celui dit de barrière de potentiels qui crée des « conduits » pour le champ magnétique.



Plaquette d'information de l'IRSN (Institut de Radioprotection et de Sureté Nuclaire)

http://www.irsn.fr/FR/base_de_connaissances/Installations_nucleaires/recherche/iter/Pages/sommaire.aspx

L'informatique se révèle essentielle pour réaliser les simulations nécessaires pour le choix du forçage. Elle arrive donc à rendre possible le contrôle du chaos. Cependant, le chaos continu malgré tout à persister et se révèle irréductible.

CONCLUSION

Le problème à trois corps de Poincaré a annoncé de façon précoce la théorie du chaos. Ce n'est qu'un demi-siècle plus tard, lors des premières simulations informatiques, qu'Edward Lorenz en proposera une représentation par les attracteurs étranges suivie par les fractales du mathématicien marginal Benoît Mandelbrot. Ces représentations permettent aujourd'hui de s'orienter vers une étude plus qualitative que calculatoire. Cela s'illustre dans de nombreux champs d'applications, notamment en météorologie, en électrodynamique ou encore en fusion thermonucléaire (ITER) où l'on ne recherche plus à éliminer l'effet chaotique mais à le contrôler.

Cet abandon du rêve Laplacien qui voulait que toute la physique soit résolue par le calcul vient de deux constatations. Premièrement, la puissance de calcul requise devait être infinie pour un modèle complet prenant en compte toutes les interactions possibles ; ce qui est techniquement impossible. Deuxièmement, les conditions initiales devaient être parfaitement connues ce qui est impossible si l'on considère le principe d'incertitude d'Heisenberg. Pour ces raisons, bien que l'informatique se soit révélée déterminante pour mettre en évidence le chaos, voire le contrôler, il semble qu'elle soit impuissante pour le résoudre totalement.

Au delà de cet échec, les philosophes s'intéressent également au chaos pour savoir si une société zéro risque est possible. Il semble que cette dernière prive nécessairement les individus de liberté. Ceci peut amener à s'interroger si finalement le chaos n'est pas l'essence même de la vie : dynamique, déterministe et imprévisible.

GLOSSAIRE

Condition initiale : État initial d'un système.

Déterminisme : Principe selon lequel le futur est conditionné par le présent.

Équation : Relation entre différents paramètres

Hamiltonien : Système d'équation indiquant les degrés de liberté d'un système

Théorie Quantique : Théorie moderne qui décrit le monde à l'échelle atomique. Elle révèle une conception non linéaire des événements et les observations ne sont que des probabilités. Cela est en totale opposition avec les théories décrivant le monde macroscopique (à notre échelle).

BIBLIOGRAPHIE

ALVAREZ Aurélien (Prod.), GHYS, Étienne (Scénar.), LEYS, Jos (Réal.). Dimensions, Une promenade mathématique... Chapitre 6 [Vidéo en ligne]. Lyon : École Normale Supérieure de Lyon.

BERGÉ, Pierre, DUBOIS, Monique. CHAOS, physique. In : Encyclopaedia Universalis : Numérique. Paris : Encyclopaedia Universalis, 2005.

BOUALI, Safieddine, LEYS, Jos. Sculptures du chaos. In : Images des Mathématiques : La recherche Mathématique en mots et en images, [en ligne]. <http://images.math.cnrs.fr/Sculptures-du-chaos.html> (article consulté le 07-11-11)

CHANDRE, Cristel. Réduction du chaos hamiltonien , [en ligne]. <http://www.cnrs.fr/publications/imagesdelaphysique/Auteurs2006/09_Reduction_du_chaos.html> (consultation le 11-11-11)

JAMES, Gleick. La théorie du chaos. Éd 2008. Paris : Flammarion, 2008. 496 p. (Champs sciences ; 860)

LETTELIER, Christophe. Chaos sous contrôle. Pour La Science, 2009, N° 385, pp. 60-67.

MALLET, Vivien. CHAOS : Contrôle de systèmes chaotiques, [en ligne]. <http://vivienmallet.net/chaos> (consultation le 07-11-11)

MANDELBROT, Benoît. Les objets fractals: Forme, hasard et dimension. Éd 4 poche. Paris : Flammarion, 2010. 212 p. (Champs sciences ; 301)

POIRIER, Henri-Louis. Les voies du chaos [Vidéo en ligne]. Paris: La cité des sciences, 1997. <http://www.universcience-vod.fr/media/571/les-voies-du-chaos.html>