

## SUITES DE FONCTIONS

On se place dans l'espace  $B(I, \mathbb{R})$  des fonctions réelles bornées sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Cet espace est *normé* en prenant : pour  $f \in B(I, \mathbb{R})$ ,  $\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|$ .

Enfin, cet espace normé est *complet*.

On considère maintenant une suite  $(f_n)_{n \geq n_0}$  de fonctions de  $B(I, \mathbb{R})$ .

### Les 2 convergences des suites de fonctions

On définit la *convergence simple* de la suite  $(f_n)_{n \geq n_0}$  en un point  $x \in I$  en examinant la convergence de la suite réelle  $(f_n(x))_{n \geq n_0}$ . On a alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \ell(x)$ .

[ Cette notion n'a rien de nouveau par rapport à l'étude des suites numériques ].

Si la convergence simple est vérifiée en *tout point*  $x \in I$ , on obtient une *fonction limite*  $\ell$  définie sur  $I$ .

On peut alors examiner la *convergence uniforme de la suite*  $(f_n)_{n \geq n_0}$  vers  $\ell$  sur  $I$ , qui est la convergence de cette suite dans l'espace  $B(I, \mathbb{R})$ . C'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - \ell\| = 0 \text{ ou encore : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in I} |f_n(x) - \ell(x)| \right) = 0$$

La convergence uniforme *nécessite* donc la convergence simple. La réciproque est fautive : une suite peut converger simplement vers  $\ell(x)$  en tout point  $x \in I$  sans converger uniformément vers  $\ell$  sur  $I$ .

### Les trois théorèmes concernant la limite d'une suite de fonctions

On veut examiner les "propriétés" de la fonction limite  $\ell$  au regard des propriétés des fonctions  $f_n$ .

*Continuité.* Si :  $\rightarrow$  chaque fonction  $f_n$  est continue sur  $I$  ;

$\rightarrow$  la suite  $(f_n)_{n \geq n_0}$  converge uniformément vers  $\ell$  sur  $I$  ;

alors la fonction limite  $\ell$  est continue sur  $I$ .

[ Remarque : ce théorème est surtout pratique par sa contraposée : si la suite de fonctions continues converge simplement vers  $\ell$  discontinue ( ne serait-ce qu'en un point de  $I$  ) alors la convergence ne peut pas être uniforme sur  $I$  ].

*Intégrabilité.* Ici l'intervalle  $I$  est un *compact*  $[a, b]$ .

Si :  $\rightarrow$  chaque fonction  $f_n$  est intégrable sur  $[a, b]$  ;

$\rightarrow$  la suite  $(f_n)_{n \geq n_0}$  converge uniformément vers  $\ell$  sur  $[a, b]$  ;

alors :  $\rightarrow$  la fonction limite  $\ell$  est intégrable sur  $[a, b]$  ;

$\rightarrow$  et on a la formule :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$  [ c'est-à-dire  $\int_a^b \ell(x) dx$  ].

*Dérivabilité.* Ici l'intervalle  $I$  est un compact  $[a, b]$ .

Si :  $\rightarrow$  chaque fonction  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  ;

$\rightarrow$  il existe un réel  $\alpha \in [a, b]$  pour lequel la suite  $(f_n(\alpha))$  converge  
( convergence simple en un point ) ;

$\rightarrow$  la suite des dérivées  $(f'_n)_{n \geq n_0}$  converge uniformément vers  $g$  sur  $[a, b]$  ;

alors :  $\rightarrow$  la suite  $(f_n)_{n \geq n_0}$  converge uniformément sur  $[a, b]$  ;

$\rightarrow$  sa limite  $\ell$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  ;

$\rightarrow \forall x \in [a, b], \ell'(x) = g(x)$  ; soit :  $(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x))' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$ .

*Par la suite, on étendra ces résultats aux séries de fonctions...*