Jacques TAILLET

2010/2011 Spécialité Maths Vilgénis

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Attention Soient a et b deux entiers relatifs. On ne peut dire que l'égalité $a = bq$ signifie que b divise a que si on s'est assuré que q est entier.

Exemple 1 : Soit n et a deux entiers naturels.non nuls.

On suppose que $a \mid (5n+31)$ et $a \mid (7n+12)$ montrer que $a \mid 33$

Il existe deux entiers non nuls k et k'tels que

$$\begin{cases} ak = 5n+31 \\ ak' = 3n+12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3ak = 15n+93 \\ 5ak' = 15n+60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3ak = 15n+93 \\ (3k-5k')a = 33 \end{cases}$$

Exemple 2 : Trouver les entiers a et b vérifiant $(a+4)(b+5) = 2004$

Correction :$a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ donc $a+4 \in \mathbb{N}^*$ et $b+5 \in \mathbb{N}^*$

$a+4$ et $b+5$ sont les diviseurs de 2004

Et on cherche les diviseurs de 2004

Exemple 3 Trouver les couples $(x;y)$ d'entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = 77$

Trouver les couples $(x;y)$ d'entiers naturels tels que $16x^2 - (y+1)^2 = 247$

Trouver les couples $(x;y)$ d'entiers naturels tels que $x^2 - xy = 240$

Exemple 4 : Montrer que pour n entier supérieur ou égal à 2, $5^n + 19$ est divisible par 4

Corr : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 5^i = \frac{5^n-1}{5-1} = \frac{5^n-1}{4}$ or cette somme est la somme de n entier, c'est un entier.

Il existe k entier tel que $5^n - 1 = 4k$ de plus $20 = 5 \times 4$ donc en faisant la somme des deux égalités on obtient : $5^n + 19 = 4(k+5)$

Propriété

Soient a et b deux entiers relatifs.

1) Si $n \in \mathbb{N}^*$ $a^n - b^n$ est un multiple de a-b

2) Si n est un entier naturel impair $a^n - b^n$ est un multiple de $a+b$

Dem

1) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}\ldots+b^{n-1})$

2) On remplace b par -b dans 1)

Division euclidienne

Exemple 5 : Déterminer les entiers q et r tels que $a = bq + r$ et $0 \le r < |b|$

1) $a = 122$ et $b = 15$ 2) $a = -122$ et $b = -15$

3) $a = 122$ et $b = -15$ 4) $a = -122$ et $b = 15$

Correction : 1) $122 = 15 \times 8 + 2$

2) $-122 = -(15 \times 8 + 2) = 8 \times (-15) - 2 = 9 \times (-15) - 2 + 15 = 9 \times (-15) + 13$

3) $122 = (-15) \times (-8) + 2$

4) $-122 = -(15 \times 8 + 2) = 15 \times (-8) - 2 = 15 \times (-9) - 2 + 15 = 15 \times (-9) + 13$

Exemple 6: Soit n un entier naturel

Pour quelles valeurs de n $\dfrac{n^3-n}{n+2}$ est-il un entier ?

$n^3 - n = (n+2)(n^2 - 2n + 3) - 6$

Donc $\dfrac{n^3-n}{n+2}$ est-il un entier si $\dfrac{6}{n+2}$ est-il un entier, soit n$\in$ $\{-8;-3;0;1;4\}$.

Exemple 7: Déterminer solon les valeurs de l'entier narurel n le reste de la division

euclidienne de n^2+5n+9 par $n+2$
On pose en potence : $n^2+5n+9 = (n+2)(n+3)+3$
Il faut vérifier que le reste est strictement inférieur au quotient (et positif)
C'est à dire $3 \leq n+2$
Si $n \geq 2$; $n+2 \geq 4 > 3$ le reste est 3
Si $n = 1$ alors $n+2 = 3$ Or 3 n'est pas strictement supérieur à 3, il faut calculer la valeur du reste..$n = 1$alors $n^2+5n+9 = 15$
Le reste de 15 par 3 est 0
Si $n = 0$ alors $n+2 = 2$ Le reste de 9 par 2 est 1

Congruence

Propriété : Addition et multiplication.
Soit n un entier $n \geq 2$ Soient a, b, a', b' quatre entiers relatifs. Si $a = a'(n)$ et $b = b'(n)$ alors $a+b = a'+b'(n)$ et $a \times b = a' \times b'(n)$
Dem Si $a = a'(n)$ et $b = b'(n)$ alors n divise a-a' et b-b', donc n divise la somme de ces deux nombres :$(a-a')+(b-b')$, on endéduit que n divise a+b-$(a'+b')$
On conclut$a+b = a'+b'(n)$
De même n divise a-a' et b-b' ; il existe deux entiers k et k' tels que $a = a'+kn$ et $b = b'+k'n$
On effectue le produit $ab = (a'+kn)(b'+k'n) = a'b'+knb'+nk'a'+kn^2k'$
il existe K tel que $ab-a'b' = nK$
donc n divise ab-a'b'
cqfd

csq : si $a = b(n)$ alors : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $ak = bk(n)$
$\forall p \in \mathbb{Z}$, $a^p = b^p(n)$

ATTENTION ON NEPEUT DIVISER LES CONGRUENCES 20=16(4) mais pas 10 et 8
exemple : Montrer que pour tout entier naturel, n ; $(2n+1)^2 = 1(8)$
$(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 4n(n+1)+1$
$n(n+1) = 0(2)$
Il existe un entier p tel que $n(n+1) = 2p \Leftrightarrow 4n(n+1) = 8p \Leftrightarrow 4n(n+1)+1 = 8p+1$
cqfd
Exemple divisibilité par 3, **par 9**
Demonstration
$10 \equiv 1[9]$
Pour tout n entier naturel $10^n \equiv 1[9]$
Si $A = a_n10^n+\ldots+a_0 \equiv a_n+\ldots+a_0[9]$
$A \equiv 0[9] \Leftrightarrow a_n+\ldots+a_0 \equiv 0[9]$
Exemple 10:On considère le système de congruences :

$$(S)\begin{cases} n \equiv 2 \quad (\text{modulo } 3) \\ n \equiv 1 \quad (\text{modulo } 5) \end{cases}$$,où n désigne un entier relatif.

1. Montrer que 11 est solution de (S).
2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n-11$ est divisible par 3.
3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11+15k$, où k désigne un entier relatif.
4. On a $11 = 3\times3+2$ et $1 = 5\times1$; 11 est donc solution de (S).

5. On a $\begin{cases} n & \equiv & 2 & (\text{modulo } 3) \\ 11 & \equiv & 2 & (\text{modulo } 3) \end{cases}$ donc par différence $n - 11 \equiv 0$ modulo 3, qui signifie que $n - 11$ est un multiple de 3.

6. De même $\begin{cases} n & \equiv & 1 & (\text{modulo } 5) \\ 11 & \equiv & 1 & (\text{modulo } 5) \end{cases}$ donc par différence $n - 11 \equiv 0$ modulo 5, qui signifie que $n - 11$ est un multiple de 5.

Comme 3 et 5 sont premiers entre eux, $n - 11$ est multiple de $3 \times 5 = 15$. D'où $n - 11 = 15k$, avec $k \in \mathrm{N}$ et enfin $n = 11 + 15k,\ k \in \mathrm{N}$.

Exemple 11

Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a :

$11x \equiv j(modulo26)$ équivaut à $x \equiv 19j(modulo26)$.

- Soit x et j deux entiers relatifs tels que $11x \equiv j$ (modulo 26). Alors, en multipliant par 19: $19 \times 11x \equiv 19j$ (modulo 26). Or $19 \times 11 = 209$ et $209 \equiv 1$ (modulo 26), donc $x \equiv 19j$ (modulo 26).
- Réciproquement, si $x \equiv 19j$ (modulo 26), alors, en multipliant par 11: $11x \equiv 11 \times 19j$ (modulo 26), d'où $11x \equiv j$ (modulo 26). L'équivalence est donc démontrée.

Bezout Gauss

Th 1 : Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$

Th 2 : Deux entiers relatifs a et b non tous nuls il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = d$

La réciproque est fausse si d différent de 1

Equation 1

1)Résoudre(E) $8x + 5y = 1$où $(x;y)$ est un couple d'entiers relatifs.

On a $8 \times 2 + 5 \times (-3) = 1$ donc $(2;-3)$ est solution particulière de (E)

2) Soit $(x;y)$ un couple de solution de (E)

$8x + 5y = 1 \Leftrightarrow 8x + 5y = 8 \times 2 + 5 \times (-3) \Leftrightarrow 8(x-2) + 5(y+3) = 0 \Leftrightarrow 8(x-2) = -5(y+3)$

Comme 8 et 5 sont premiers entre eux d'après le théorème de GAUSS, 8 divise $(y+3)$

Il existe k entiers relatifs tel que $y + 3 = 8k$

On reporte dans l'égalité : $8(x-2) = -5(y+3)$

On obtient $8(x-2) = -5 \times 8k$

C'est à dire $x - 2 = -5k$ donc $x = 2 - 5k$

Les couples solutions de (E) sont de la forme $(2-5k;-3+8k)$

Réciproquement , on considère $(2-5k;-3+8k)$ avec k entiers relatifs.

$8x + 5y = 8(2-5k) + 5(-3+8k) = 1$

Tous les couples de la forme $(2-5k;-3+8k)$ avec k entiers relatifs.sont solutions de (E)

L'ensemble des solutions de (E) est $(2-5k;-3+8k)$ avec k entiers relatifs

Equation 2

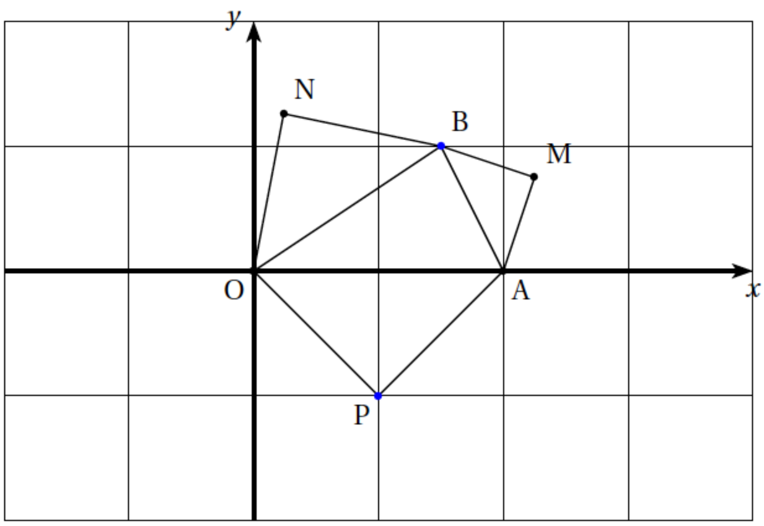
Résoudre(E) $2x + 4y = 5$où $(x;y)$ est un couple d'entiers relatifs.

2 ne divise pas 5 donc on ne peut trouver de couple $(x;y)$ vérifiant (E)

Exercice 2 p 79 corrigé

Similitudes

Propriété 1 : Soit f une transformation du plan.
f est une similitude ssi il existe un réel k strictement positif tel que f multiplie les distances par k. On dit que k est le rapport de la similitude.
Pour tous points M, N d'images respectives M', N' on a $M'N' = kMN$
Propriété 2 : Si f est une similitude de rapport k, alors sa réciproque est une similiude de rapport $k^{-1} = \frac{1}{k}$
Si f et $f_1$sont deux similitudes de rapport k et k_1 (d'angle Θ_1 et Θ_2)alors les composées $f \circ f_1$ et $f_1 \circ f$ sont des similitudes de rapports kk_1.(en général $f \circ f_1 \neq f_1 \circ f$)
(et d'angle $\Theta_1 + \Theta_2$)
Propriété 3 Une application du plan dans lui même ayant pour écriture complexe $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est une similitude de rapport $k = |a|$
Dans le cas de la similitude directe si $a \neq 1$, la similitude admet un point invariant Ω :
$\arg a = \left(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega A'}\right)$
Propriété 4 : Une similitude conserve les angles.
Une similitude transforme un triangle en un triangle semblable.
Si A, B, C sont trois points distincts d'images respectives A', B', C' par une similitude alors $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$; $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$; $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$
Propriété 5 :Les similitiudes conservent les milieux, l'alignement, les angles.
Savoir faire : 1) Quand on connait deux points et leur image on peut déterminer le rapport et l'angle de la similitude
s est une similitude directe donc $\left(\overrightarrow{PQ}; \overrightarrow{PR}\right) = \left(\overrightarrow{P'Q'}; \overrightarrow{P'R'}\right)$ et $\frac{P'R'}{P'Q'} = \frac{PR}{PQ}$
2) On peut déterminer l'écriture complexe de la similitude : Quand on connait deux points et leur image on résout $z'_A = az_A + b$ et $z'_B = az_B + b$(idem pour une similitude indirecte)
Exemple 1 en ayant le centre de la similitude
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \frac{3}{2} + i$.
On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous.



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N. On considère la transformation $r = s_2 \circ s_1$.

1. **a**. Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2.
   b. Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r.
   c. Justifier que r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.
   d. Donner les écritures complexes de s_1 et s_2

Correction

1. **a**. $\begin{array}{lll} s_1 : & A & \mapsto A \\ & M & \mapsto B \end{array}$ donc l'angle de s_1 est $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$ et le rapport $\frac{AB}{AM} = \sqrt{2}$ car le triangle AMB est rectangle isocèle direct.
   $\begin{array}{lll} s_2 : & O & \mapsto O \\ & B & \mapsto N \end{array}$ donc pour s_2 l'angle est $\frac{\pi}{4}$ et le rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
   b. $s_2 \circ s_1(M) = s_2(B) = N$donc $r(M) = N$.
   $s_2 \circ s_1(I) = s_2(P) = I$donc $r(I) = I$.
   c. r est la composée de deux similitudes directes, c'est donc une similitude directe ; son rapport est le produit des rapports, c'est donc 1 ; son angle, la somme des angles donc $\frac{\pi}{2}$. Enfin, le centre est l'unique point invariant, c'est donc I (question précédente).
   En résumé, r est la rotation de centre I et angle $\frac{\pi}{2}$.
   d. L'écriture complexe de s_1 est $z' - z_A = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z - z_A)$ soit
   $$z' - 2 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z - 2)$$
   L'écriture complexe de s_2 est $z' - z_O = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z - z_O)$ soit
   $$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}z$$

Exemple 2 en n'ayant pas le centre de la similitude

Soit ABC le triangle défini par $\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $AB = 3$ et $BC = 4$

Soit I le milieu de $[BC]$

Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe qui transforme A en I et B en C.

Correction

$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{IC}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\frac{IC}{AB} = \frac{2}{3}$

Exemple 3 en utilisant les nombres complexes

Soient A, B, C et D les points d'affixes $z_A = -1 - i$, $z_B = i$, $z_C = 1 + 3i$, $z_D = 5 + i$,

Déterminer les caractéristiques de la similitude directe qui transforme A en C et B en D.

Correction L'écriture complexe de la similitude directe est de la forme $z' = az_{'} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

on résout le système $\left\{\begin{array}{l} z_C = az_A + b \\ z_D = az_B + b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 1 + 3i = a(-1 - i) + b \\ 5 + i = ai + b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2i \\ b = 3 + i \end{array}\right.$

on a $z' = -2iz_{'} + 3 + i$

$\arg a = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $|a| = 2$

La similitude directe à pour rapport 2 et pour angle $-\frac{\pi}{2}$
Il reste à déterminer son centre de symétrie.
On trouve $1 - i$