NAO :
Sur la validité du comportement euclidien à grande échelle.

par
Bénédictus Servant *
Québec, Amérique du Nord

15 février 2016

1 Introduction

Le présent travail est une annexe d'un précédent article[1]. Il a pour but de valider le résultat (38) de [1]. Celui-ci caractérise un comportement euclidien à grande échelle. Mais ce résultat est basé sur une approximation. Celle-ci consiste au remplacement de l'éq. (10) de [1] (qui est exacte) par l'éq. (11) qui est une approximation.

2 Comportement à grande échelle.

Reprenons l'éq. (6) de [1] :

$$R_{c'}(\phi_{c'}) = R_b(\phi_b)R_a(\phi_a)R_c(\phi_c)\ . \tag{1}$$

Lorsque $\phi_{c'}$ tend vers zéro l'éq. (1) ci-dessus nous conduit au résultat suivant (i.e. éq. (10) de [1]) :

$$\begin{aligned}\lim_{\phi_{c'}\to 0}\phi_a &= \phi_{c'}\sin(\varphi)\sin(\chi)\\ \lim_{\phi_{c'}\to 0}\phi_b &= \phi_{c'}\sin(\varphi)\cos(\chi)\\ \lim_{\phi_{c'}\to 0}\phi_c &= \phi_{c'}\cos(\varphi)\ .\end{aligned} \tag{2}$$

Supposons maintenant que $\phi_{c'}$ est très petit mais non nul. Il est encore possible de satisfaire (1) mais avec des valeurs pour ϕ_a, ϕ_b et ϕ_c un peu différentes de celles en (2). Prenons la somme des carrés de ces nouvelles valeurs et posons, par définition, que cette somme est $\bar{\phi}_{c'}^2$:

$$\bar{\phi}_{c'}^2 \equiv \phi_a^2 + \phi_b^2 + \phi_c^2\ . \tag{3}$$

*email : bservant05@hotmail.com

Compte tenu de (3) nous pouvons écrire :

$$\frac{\phi_a}{\bar{\phi}_{c'}} = \sin(\varphi)\sin(\chi) \tag{4}$$

$$\frac{\phi_b}{\bar{\phi}_{c'}} = \sin(\varphi)\cos(\chi) \tag{5}$$

$$\frac{\phi_c}{\bar{\phi}_{c'}} = \cos(\varphi)\ . \tag{6}$$

Soit Δ l'écart relatif entre $\bar{\phi}_{c'}$ et $\phi_{c'}$:

$$\Delta \equiv \frac{\bar{\phi}_{c'} - \phi_{c'}}{\phi_{c'}} \tag{7}$$

avec $|\Delta| \ll 1$. Notons que, compte tenu de (2) :

$$\lim_{\phi_{c'}\to 0}|\Delta| = 0\ . \tag{8}$$

À l'aide de (7), les éqs. (4) à (6) deviennent respectivement :

$$\frac{\phi_a}{\phi_{c'}} = \sin(\varphi)\sin(\chi)(1+\Delta) \tag{9}$$

$$\frac{\phi_b}{\phi_{c'}} = \sin(\varphi)\cos(\chi)(1+\Delta) \tag{10}$$

$$\frac{\phi_c}{\phi_{c'}} = \cos(\varphi)(1+\Delta)\ . \tag{11}$$

En utilisant (9) à (11) ci-dessus dans [1] en lieu et place de l'éq. (11) de l'article [1], l'éq. (38) de [1] devient :

$$\mathrm{j_a}^2 + \mathrm{j_b}^2 + \mathrm{j_c}^2 = \mathrm{j}^2(1+\Delta)^2 \ . \tag{12}$$

Ainsi, tant que $\phi_{c'}$ demeure un très petit angle, le comportement euclidien à grande échelle reste valide avec une bonne approximation.

Références

[1] Servant, B., "Génération d'un Espace Euclidien Discret Tridimensionnel à partir des NAO", 10 déc. 2014. bservant05.blogspot.com